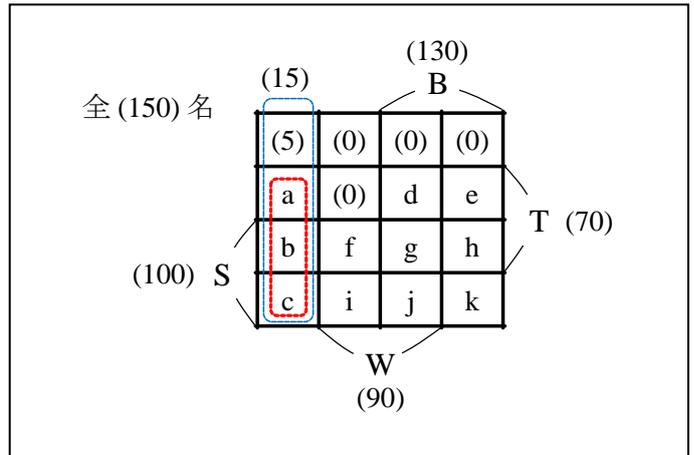


【10】

野球が好きな学生の集合を B,
 水泳が好きな学生の集合を W,
 サッカーが好きな学生の集合を S,
 テニスが好きな学生の集合を T とし,
 これらの集合をベイチ図で描くと右図のようになる.
 この図には, 調査結果から分かる人数が () 内に
 書いてある. また, 人数が分からないマス(B, W, S, T
 とこれらの補集合の積集合で表せる集合)には, a~
 k の変数を書き込んでいる.



問の (i) は $|B \cap T| = d + e + g + h$ の, (ii) は $|B \cap S \cap T| = g + h$ の人数を求めており, (iii) は a, b, c に関して何か分かれば, 答えることができるであろう.

まず, 全員で 150 名であり, $|\bar{B} \cap \bar{W}| = a + b + c + 5 = 15$ であることから, 次式を得る.

$$|B \cup W| = 150 - |\bar{B} \cap \bar{W}| = 135 \tag{1}$$

さらに, ベイチ図で示される集合間の関係より, 次式を得る.

$$|B \cap \bar{W}| = e + h + k = 135 - 90 = 45 \tag{2}$$

$$|\bar{B} \cap W| = f + i = 135 - 130 = 5 \tag{3}$$

$$|B \cap W| = d + g + j = 90 - 5 = 85 \tag{4}$$

また, $a + b + c = 10$ であるから,

$$|(B \cup W) \cap S| = f + g + h + i + j + k = 100 - (b + c) \geq 100 - (a + b + c) = 90 \tag{5}$$

$$|(B \cup W) \cap T| = d + e + f + g + h = 70 - (a + b) \geq 70 - (a + b + c) = 60 \tag{6}$$

を得る. さらに,

$$|B \cup W| = |(B \cup W) \cap S| + |(B \cup W) \cap T| - |(B \cup W) \cap S \cap T|$$

および (5) 式, (6) 式より,

$$|(B \cup W) \cap S \cap T| = f + g + h = |(B \cup W) \cap S| + |(B \cup W) \cap T| - |B \cup W| \geq 90 + 60 - 135 = 15 \tag{7}$$

を得る.

(i) =====

そこで, $B \cup W$ の範囲において考え, (3) 式および (6) 式より, 次式を得る.

$$|B \cap T| = d + e + g + h \geq d + e + f + g + h - (f + i) \geq 60 - 5 = 55 \tag{8}$$

従って, 野球とテニスの両方が好きな学生は少なくとも 55 名いる.

(ii) =====

さらに, $|(B \cup W) \cap \bar{S}| = |B \cup W| - |(B \cup W) \cap S|$ であるから, (5) 式より, 次式を得る.

$$|(B \cup W) \cap \bar{S}| = d + e = |B \cup W| - |(B \cup W) \cap S| \leq 135 - 90 = 45 \tag{9}$$

従って, (8) 式および (9) 式より, 次式を得る.

$$|B \cap S \cap T| = g + h = d + e + g + h - (d + e) = |B \cap T| - |(B \cup W) \cap \bar{S}| \geq 55 - 45 = 10 \quad (10)$$

すなわち, 野球, サッカー, テニスの全てが好きな学生は少なくとも 10 名いる.

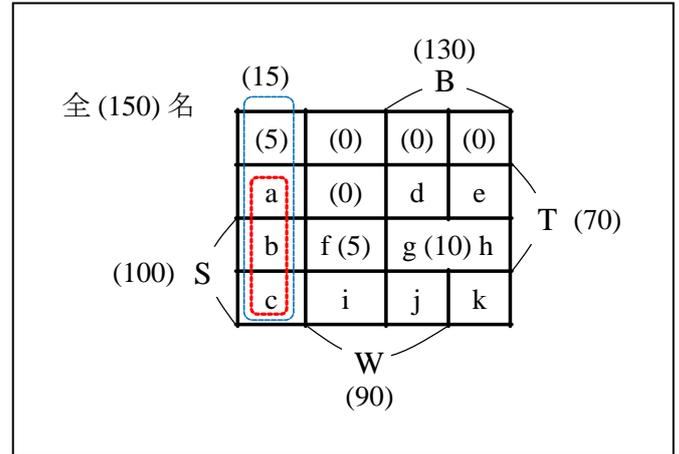
(iii) =====

(10) 式において等号 $|B \cap S \cap T| = g + h = 10$ が成立する仮定すると, (7) 式より, $f \geq 5$ が得られるが, これと (3) 式より, $f = 5, i = 0$ であることが分かる.

これらの数をベイチ図に書き込むと右図のようになる.

このとき, $|S \cup T| = 150 - |\bar{S} \cap \bar{T}| = 150 - 5 = 145$ であるから, 次式を得る.

$$\begin{aligned} |S \cap T| &= b + f + g + h \geq |S| + |T| - |S \cup T| \\ &= 100 + 70 - 145 = 25 \end{aligned} \quad (10)$$



従って, $g + h = 10, f = 5$ であるから, $b \geq 10$ であり, また, $a + b + c = 10$ であるから, $a = c = 0, b = 10$ が成り立つことが分かる.

これは, 水泳と野球のどちらも嫌いな学生 ($\bar{B} \cap \bar{W}$ に属す学生) が, 全員サッカーとテニスが好きである ($S \cap T$ に含まれる) ことを意味する.