【10】

野球が好きな学生の集合を B,

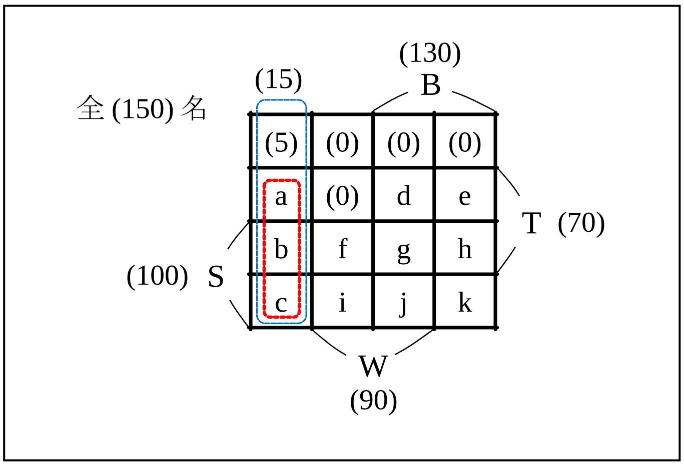
水泳が好きな学生の集合を W,

サッカーが好きな学生の集合を S,

テニスが好きな学生の集合を T とし,

これらの集合をベイチ図で描くと右図のようになる.

この図には，調査結果から分かる人数が ( ) 内に書いてある．また，人数が分からないマス(B, W, S, T とこれらの補集合の積集合で表せる集合)には，a～k の変数を書き込んでいる.



問の (i) は $|B \cap T| = d + e + g + h$ の，(ii) は $|B \cap S \cap T| = g + h$ の人数を求めており，(iii) は a, b, c に関して何か分かれば，答えることができるであろう.

まず，全員で 150 名であり，$|\overline{B} \cap \overline{W}| = a + b + c + 5 = 15$ であることから，次式を得る.

$$|B \cup W| = 150 - |\overline{B} \cap \overline{W}| = 135 \tag{1}$$

さらに，ベイチ図で示される集合間の関係より，次式を得る.

$$|B \cap \overline{W}| = e + h + k = 135 - 90 = 45 \tag{2}$$

$$|\overline{B} \cap W| = f + i = 135 - 130 = 5 \tag{3}$$

$$|B \cap W| = d + g + j = 90 - 5 = 85 \tag{4}$$

また，$a + b + c = 10$ であるから,

$$|(B \cup W) \cap S| = f + g + h + i + j + k = 100 - (b + c) \geq 100 - (a + b + c) = 90 \tag{5}$$

$$|(B \cup W) \cap T| = d + e + f + g + h = 70 - (a + b) \geq 70 - (a + b + c) = 60 \tag{6}$$

を得る．さらに,

$$|B \cup W| = |(B \cup W) \cap S| + |(B \cup W) \cap T| - |(B \cup W) \cap S \cap T|$$

および (5) 式，(6) 式より,

$$|(B \cup W) \cap S \cap T| = f + g + h = |(B \cup W) \cap S| + |(B \cup W) \cap T| - |B \cup W| \geq 90 + 60 - 135 = 15 \tag{7}$$

を得る.

(i) ====================================

そこで，$B \cup W$ の範囲において考え，(3) 式および (6) 式より，次式を得る.

$$|B \cap T| = d + e + g + h \geq d + e + f + g + h - (f + i) \geq 60 - 5 = 55 \tag{8}$$

従って，野球とテニスの両方が好きな学生は少なくとも 55 名いる.

(ii) ====================================

さらに，$|(B \cup W) \cap \overline{S}| = |B \cup W| - |(B \cup W) \cap S|$ であるから，(5) 式より，次式を得る.

$$|(B \cup W) \cap \overline{S}| = d + e = |B \cup W| - |(B \cup W) \cap S| \leq 135 - 90 = 45 \tag{9}$$

従って，(8) 式および (9) 式より，次式を得る．

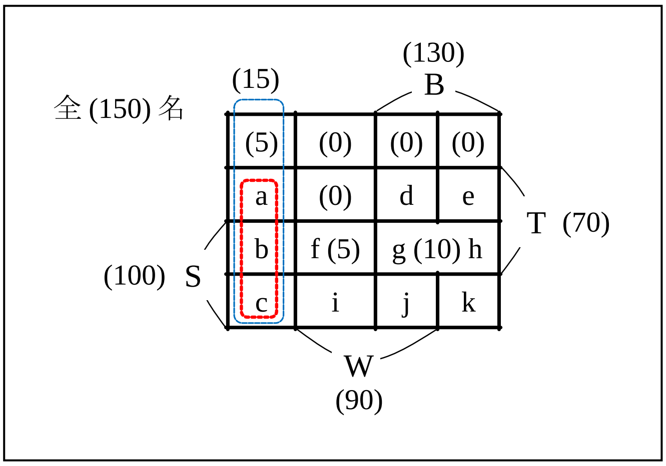
$$|B \cap S \cap T| = g + h = d + e + g + h - (d + e) = |B \cap T| - |(B \cup W) \cap \overline{S}| \geq 55 - 45 = 10 \qquad (10)$$

すなわち，野球，サッカー，テニスの全てが好きな学生は少なくとも 10 名いる．

(iii) ======================================

(10) 式において等号 $|B \cap S \cap T| = g + h = 10$ が成立する仮定すると，(7) 式より，$f \geq 5$ が得られるが，これと (3) 式より，$f = 5$，$i = 0$ であることが分かる．

これらの数をベイチ図に書き込むと右図のようになる．



このとき，$|S \cup T| = 150 - |\overline{S} \cap \overline{T}| = 150 - 5 = 145$ であるから，次式を得る．

$$|S \cap T| = b + f + g + h \geq |S| + |T| - |S \cup T|$$
$$= 100 + 70 - 145 = 25 \qquad (10)$$

従って，$g + h = 10$，$f = 5$ であるから，$b \geq 10$ であり，また，$a + b + c = 10$ であるから，$a = c = 0$，$b = 10$ が成り立つことが分かる．

これは，水泳と野球のどちらも嫌いな学生（$\overline{B} \cap \overline{W}$ に属す学生）が，全員サッカーとテニスが好きである（$S \cap T$ に含まれる）ことを意味する．

【11】======================================

「M が第 2 種の集合」だとすると，M は自分自身を要素として含む．そうすると，「全ての第 1 種の集合の集合」である M が，第 2 種の集合 M を要素として含むことになり，M の定義（「全ての第 1 種の集合の集合」）に矛盾する．

「M が第 1 種の集合」だとすると，「全ての第 1 種の集合の集合」である M は，定義より M を含む．そうすると，M は自分自身を含む集合となるから，第 2 種の集合となり，「M が第 1 種の集合」であるという仮定に矛盾する．