【12】===========================================

$n$ ビットの符号 $c$ からのハミング距離が $i$ の符号は，丁度 $i$ 個のビットにおいて記号が異なる符号であるから，そのような符号は ${}_n\mathrm{C}_i = \frac{n!}{i!\cdot(n-i)!}$ 個ある．従って，ハミング距離が $i$ 以下の符号の個数は下記である．

$$\sum_{k=0}^{i} {}_n\mathrm{C}_k$$

【13】===========================================

**(i)**

8 ビットの符号が誤りを含む確率は，次式で計算できる．

$$\sum_{k=1}^{8} p^k \cdot {}_8\mathrm{C}_k = 10^{-3}\cdot 8 + 10^{-2\cdot 3}\cdot\frac{8\cdot 7}{2\cdot 1} + 10^{-3\cdot 3}\cdot\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} + 10^{-4\cdot 3}\cdot\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} + \cdots$$

$$= 10^{-3}\cdot\left(8 + \frac{28}{1000} + \cdot\frac{56}{1000^2} + \frac{70}{1000^3} + \cdots\right) = 10^{-3}\cdot(8 + 0.028 + 0.000056 + \cdots)$$

$$\cong 0.8028 \times 10^{-2}$$

すなわち，$p = 1/1{,}000$ の場合，約 0.008 の確率で誤ることがことが分かる．

**(ii)**

1 ビットのパリティ符号が付加されていると，1 ビットの誤りは検出できるから，検出不可能な誤りが生じるのは，2 ビット以上の誤りが生じたときである．従って，次式で計算できる．

$$\sum_{k=2}^{8} p^k \cdot {}_8\mathrm{C}_k = 10^{-2\cdot 3}\cdot\frac{8\cdot 7}{2\cdot 1} + 10^{-3\cdot 3}\cdot\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} + 10^{-4\cdot 3}\cdot\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} + 10^{-5\cdot 3}\cdot\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} + \cdots$$

$$= 10^{-6}\cdot\left(28 + \frac{56}{1000} + \cdot\frac{70}{1000^2} + \frac{56}{1000^3} + \cdots\right) = 10^{-6}\cdot(28 + 0.056 + 0.00007 + \cdots)$$

$$= 10^{-6}\cdot(28.056 + 0.00007 + \cdots) \cong 0.2806 \times 10^{-4}$$

すなわち，$p = 1/1{,}000$ の場合，1 ビットのパリティビットを付加するだけで，誤り確率を 0.008 から約 1/300 に減少できることが分かる．