【1】==

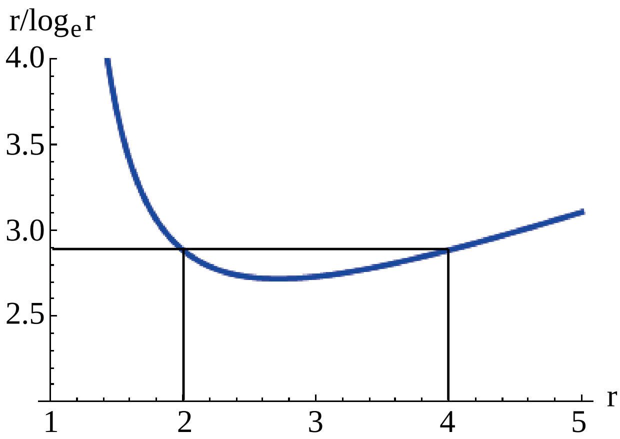
標準的（canonical）な r 進数の位取り記数法 $(d_{n-1}\ d_{n-2}\ \cdots\ d_0)_r$ では，各ディジット d_i は 0～(r–1) の r 個の記号を取ることができるから，0～N–1 までの N 個の整数をこの r 進数で表すのに必要な桁数 n は，$N \le r^n$ を満たす必要がある．従って，$n \ge \log_e N/\log_e r$ より，必要なランプの個数 C は，

$$C = r \cdot n = r \cdot \log_e N/\log_e r$$

と書ける．与えられた N に対して，この C を最小にする r は，$f(r) = r/\log_e r$ を最小にする r であるから，$f(r)$ を r で微分し，傾きの変化を調べると，

$$\frac{df(r)}{dr} = \frac{\log_e r - {}^{r}\!/_{r}}{(\log_e r)^2} = \frac{\log_e r - 1}{(\log_e r)^2}$$

より，$\log_e r = 1$ のとき，すなわち $r = e$ のとき，最小値を取ることが分かる．実際，$f(r)$ は下図のようなグラフである．



図からも分かるように，$f(r) = r/\log_e r$ を最小にする整数 r は 3 であるから，ランプの総数 C を最小にするには，3 進数が良い．

以下では，$N = 10^k$ の場合（10 進数 k 桁の数を表示する場合）について考える．このとき，必要な桁数 n は，$N \le r^n$ より，

$$n \ge \log_r N = \frac{\log_{10} 10^k}{\log_{10} r} = \frac{k}{\log_{10} r}$$

と書ける．従って，n は整数でなければならないから，3 進数（r = 3）の場合，

$$n = \left\lceil \frac{k}{\log_{10} 3} \right\rceil \cong \lceil k \times 2.0959 \rceil$$

であり，2 進数（r = 2）の場合，

$$n = \left\lceil \frac{k}{\log_{10} 2} \right\rceil \cong \lceil k \times 3.32193 \rceil$$

となる．ここで，$\lceil x \rceil$ は，x 以上の最小の整数を示し，ceiling（天井）x と言う．

これらより，最低限必要なランプの総数 C = r·n は，k の値に関して次表で示すような値を取ることが分かる．この表から分かるように，k = 3（N = 1000）の場合だけ，2 進数と 3 進数の大小関係が逆転し，2 進数の方が 3 進数よりランプの個数 C が少ない．

k		3	4	5	6	7	8
3 進数	n	7	9	11	13	15	17
	C = 3n	21	27	33	39	45	51
2 進数	n	10	14	17	20	24	27
	C = 2n	20	28	34	40	48	54