【5】==

n 次元ブールベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2,\cdots, a_n)\in B^n$ および $\mathbf{b} = (b_1, b_2,\cdots, b_n)\in B^n$ に対する OR 演算 + および AND 演算・が，成分毎の OR 演算および AND 演算であるから，これらの演算によって得られた結果 $\mathbf{a}+\mathbf{b} = (a_1+b_1, a_2+b_2,\cdots, a_n+b_n)$ および $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (a_1\cdot b_1, a_2\cdot b_2,\cdots, a_n\cdot b_n)$ も，明らかに n 次元ブールベクトルである．従って，与えられた OR 演算 + および AND 演算・は n 次元ブールベクトルの集合 B^n 上の 2 項演算となっている．

そこで，代数系 $< B^n, +, \cdot >$ がブール代数の公理 (1)～(4) を満たすか否かを調べる．

(1) 単位元の存在：

全ての成分が $0\in B = \{ 0, 1 \}$ であるような n 次元ブールベクトル $\mathbf{0} = (0, 0,\cdots, 0)\in B^n$ を考えると，これは任意の n 次元ブールベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2,\cdots, a_n)\in B^n$ に対して，$\mathbf{a}+\mathbf{0} = (a_1+0, a_2+0,\cdots, a_n+0) = (a_1, a_2,\cdots, a_n) = \mathbf{a}$ を満たす．従って，+ の単位元になっていることがわかる．

また，全ての成分が $1\in B$ であるような n 次元ブールベクトル $\mathbf{1} = (1, 1,\cdots, 1)\in B^n$ を考えると，これは任意の n 次元ブールベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2,\cdots, a_n)\in B^n$ に対して，$\mathbf{a}\cdot\mathbf{1} = (a_1\cdot 1, a_2\cdot 1,\cdots, a_n\cdot 1) = (a_1, a_2,\cdots, a_n) = \mathbf{a}$ を満たす．従って，・の単位元になっていることがわかる．

これらより，2 つの演算の単位元が B^n に存在することが分かる．

(2) 交換率：

任意の n 次元ブールベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2,\cdots, a_n)\in B^n$ および $\mathbf{b} = (b_1, b_2,\cdots, b_n)\in B^n$ に対して，

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = (a_1+b_1, a_2+b_2,\cdots, a_n+b_n) = (b_1+a_1, b_2+a_2,\cdots, b_n+a_n) = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

であり，

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (a_1\cdot b_1, a_2\cdot b_2,\cdots, a_n\cdot b_n) = (b_1\cdot a_1, b_2\cdot a_2,\cdots, b_n\cdot a_n) = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$$

であるから，交換率が成り立つことが分かる．

(3) 分配率：

任意の n 次元ブールベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2,\cdots, a_n)\in B^n$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2,\cdots, b_n)\in B^n$, および $\mathbf{c} = (c_1, c_2,\cdots, c_n)\in B^n$ に対して，

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) = (a_1, a_2,\cdots, a_n) + (b_1\cdot c_1, b_2\cdot c_2,\cdots, b_n\cdot c_n) = (\ a_1+(b_1\cdot c_1), a_2+(b_2\cdot c_2),\cdots, a_n+(b_n\cdot c_n)\ )$$

を得るが，各成分（$1\le i\le n$）に対する式 $a_i+(b_i\cdot c_i)$ は分配律を満たすので，次のように変形できる．

$$\begin{aligned}\mathbf{a}+(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) &= (\ a_1+(b_1\cdot c_1), a_2+(b_2\cdot c_2),\cdots, a_n+(b_n\cdot c_n)\ ) = (\ (a_1+b_1)\cdot(a_1+c_1), (a_2+b_2)\cdot(a_2+c_2),\cdots, (a_n+b_n)\cdot(a_n+c_n)\ )\\ &= (a_1+b_1, a_2+b_2,\cdots, a_n+b_n)\cdot(a_1+c_1, a_2+c_2,\cdots, a_n+c_n) = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{c})\end{aligned}$$

また，

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (a_1, a_2,\cdots, a_n)\cdot(b_1+c_1, b+c_2,\cdots, b_n+c_n) = (\ a_1\cdot(b_1+c_1), a_2\cdot(b+c_2),\cdots, a_n\cdot(b_n+c_n)\ )$$

を得るが，各成分（$1\le i\le n$）に対する式 $a_i\cdot(b_i+c_i)$ は分配律を満たすので，次のように変形できる．

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) &= (\ a_1\cdot(b_1+c_1), a_2\cdot(b+c_2),\cdots, a_n\cdot(b_n+c_n)\ ) = (\ (a_1\cdot b_1)+(a_1\cdot c_1), (a_2\cdot b_2)+(a_2\cdot c_2),\cdots, (a_n\cdot b_n)+(a_n\cdot c_n)\ )\\ &= (a_1\cdot b_1, a_2\cdot b_2,\cdots, a_n\cdot b_n) + (a_1\cdot c_1, a_2\cdot c_2,\cdots, a_n\cdot c_n) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\end{aligned}$$

従って，分配率が成り立つことが分かる．

(4) 補元の存在：

任意の n 次元ブールベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in B^n$ に対して，n 次元ブールベクトル $\bar{\mathbf{a}} = (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_n}) \in B^n$ を考えると，

$$\mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}} = (a_1 + \overline{a_1}, a_2 + \overline{a_2}, \cdots, a_n + \overline{a_n}) = (1, 1, \cdots, 1) = \mathbf{1}$$

および

$$\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}} = (a_1 \cdot \overline{a_1}, a_2 \cdot \overline{a_2}, \cdots, a_n \cdot \overline{a_n}) = (0, 0, \cdots, 0) = \mathbf{0}$$

を満たす．従って，**a** の補元であることが分かる．

【6】==

ブール代数 $\langle B^n, +, \cdot, \overline{\ }, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ が $\langle 2^S, \cup, \cap, \overline{\ }, \emptyset, S \rangle$ と同型であることを示すため，次のような写像 $f: B^n \rightarrow 2^S$ を考える．すなわち，S の要素を $S = \{ e_1, e_2, \cdots, e_n \}$ とし，n 次元ブールベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in B^n$ に対して，S の部分集合 $f(\mathbf{a}) \in 2^S$ を $f(\mathbf{a}) = \{ e_i \in S \mid a_i = 1, 1 \le i \le n \}$ とする．

このとき，+ の単位元 $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0) \in B^n$ に対応する S の部分集合は $f(\mathbf{0}) = \emptyset$ であり，空集合 $\emptyset$ はべき集合上のブール代数において $\cup$ の単位元になっている．また，・の単位元 $\mathbf{1} = (1, 1, \cdots, 1) \in B^n$ に対応する S の部分集合は $f(\mathbf{1}) = S$ であり，全体集合 S はべき集合上のブール代数において $\cap$ の単位元になっている．従って，単位元が単位元に対応付けられていることが分かる．

演算に関しても次の関係が成り立つ．すなわち，任意の n 次元ブールベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in B^n$ および $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in B^n$ に対して，$f(\mathbf{a}) = \{ e_i \in S \mid a_i = 1, 1 \le i \le n \}$，$f(\mathbf{b}) = \{ e_i \in S \mid b_i = 1, 1 \le i \le n \}$，$f(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \{ e_i \in S \mid a_i + b_i = 1, 1 \le i \le n \}$ であり，$f(\mathbf{a}) \cup f(\mathbf{b}) = \{ e_i \in S \mid a_i = 1$ あるいは $b_i = 1, 1 \le i \le n \}$ であるから，$f(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) \cup f(\mathbf{b})$ が成り立つ．また，$f(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \{ e_i \in S \mid a_i \cdot b_i = 1, 1 \le i \le n \}$ であり，$f(\mathbf{a}) \cap f(\mathbf{b}) = \{ e_i \in S \mid a_i = 1$ かつ $b_i = 1, 1 \le i \le n \}$ であるから，$f(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) \cap f(\mathbf{b})$ が成り立つ．さらに，$f(\bar{\mathbf{a}}) = \{ e_i \in S \mid \overline{a_i} = 1, 1 \le i \le n \} = \{ e_i \in S \mid a_i = 0, 1 \le i \le n \} = S - f(\mathbf{a}) = \overline{f(\mathbf{a})}$ が成り立つ．

これらより，$\langle B^n, +, \cdot, \overline{\ }, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ と $\langle 2^S, \cup, \cap, \overline{\ }, \emptyset, S \rangle$ が同型であることが分かる．