ディジタル回路設計　＜付録：ブール代数＞　解答例

【1】==

まず，次のようにして，集合 S の同値類を生成する．

1°：初めに，S の部分集合 S’ を空集合とする（$S' = \emptyset$）．

2°：S’ に属さない S の要素が存在する（$S - S' \neq \emptyset$ の）間，次の操作を繰り返す．

2-1°：任意に要素 $a \in S - S'$ を一つ選び，同値類 $[a]_{\mathcal{R}} = \{ b \in S \mid a \mathcal{R} b \}$ を求め，

2-2°：$S' = S' \cup [a]_{\mathcal{R}}$ とする．

この操作の終了時には，$S = S'$ となっており，S は同値類の和集合で表されている．従って，後は，同値類が互いに素であることを示せばよい．

そこで，ある要素 $x \in S$ が異なる同値類 $[y]_{\mathcal{R}}$ と$[z]_{\mathcal{R}}$ の両方に含まれていたと仮定する．そうすると，$x \in [y]_{\mathcal{R}}$ より，$x \mathcal{R} y$ であり，対称律より，$y \mathcal{R} x$ である．また，$x \in [z]_{\mathcal{R}}$ より，$x \mathcal{R} z$ であるから，$y \mathcal{R} x$ かつ $x \mathcal{R} z$ が成り立つ．従って，推移律より，$y \mathcal{R} z$ となる．今，上に述べた操作において，同値類 $[y]_{\mathcal{R}}$ が同値類 $[z]_{\mathcal{R}}$ より先に生成されたとすると，$y \mathcal{R} z$ より，z は $[y]_{\mathcal{R}}$ に含まれていたはずで，同値類 $[z]_{\mathcal{R}}$ が生成されることはなく，同値類 $[z]_{\mathcal{R}}$ が存在することに矛盾する．従って，生成される同値類は互いに素である．

【2】==

$a \wedge a = b$ とおくと，$a \vee b = a \vee (a \wedge a)$ となるが，吸収律より $a \vee (a \wedge a) = a$ であるから，$a \vee b = a$ を得る．従って，$a \wedge a = a \wedge (a \vee b)$ と書けるが，右辺は，吸収律のもう一方の式より，$a \wedge (a \vee b) = a$ となるから，$a \wedge a = a$ を得る．

【3】==

今，ある要素 $x \in S$ の補元が 2 つあるとし，それらを $y, z \in S$ とすると，$x \vee y = 1$，$x \vee z = 1$，$x \wedge y = 0$，$x \wedge z = 0$ が成り立つ．そうすると，以下のようにして，$y = z$ であることが分かる．

$$
\begin{aligned}
y &= y \wedge 1 && \text{（単位元 1 の性質より）} \\
&= y \wedge (x \vee z) && \text{（z が x の補元という仮定 } x \vee z = 1 \text{ より）} \\
&= (y \wedge x) \vee (y \wedge z) && \text{（分配律より）} \\
&= (x \wedge y) \vee (y \wedge z) && \text{（交換律より）} \\
&= 0 \vee (y \wedge z) && \text{（y が x の補元という仮定 } x \wedge y = 0 \text{ より）} \\
&= (x \wedge z) \vee (y \wedge z) && \text{（z が x の補元という仮定 } x \wedge z = 0 \text{ より）} \\
&= (z \wedge x) \vee (z \wedge y) && \text{（交換律より）} \\
&= z \wedge (x \vee y) && \text{（分配律より）} \\
&= z \wedge 1 && \text{（y が x の補元という仮定 } x \vee y = 1 \text{ より）} \\
&= z && \text{（単位元 1 の性質より）}
\end{aligned}
$$