

## 章末問題詳細解説

### 第 1 章

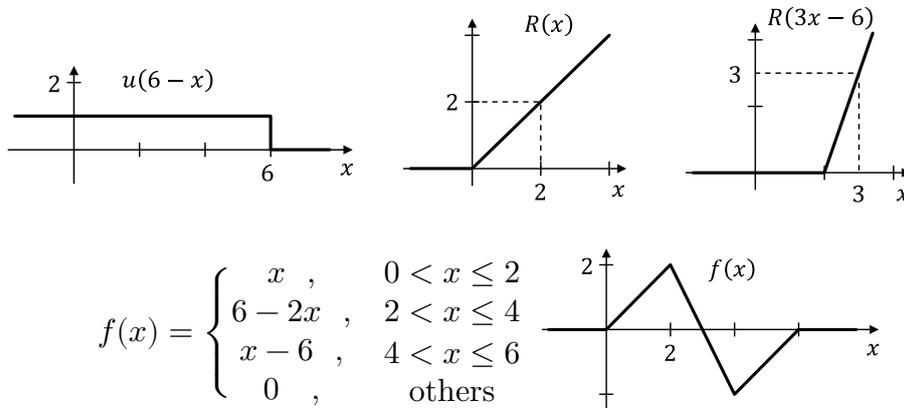
【1】 単位ステップ関数 $u(x)$ のランニング積分はランプ (ramp) 関数や ReLU 関数と呼び、 $R(x) = \int_{-\infty}^x u(\tau)d\tau$ と表せる。

- (1)  $R(x)$ を区関数形式の数式より示せ。
- (2)  $f(x) = u(6-x) \cdot [R(x) - R(3x-6) + 3R(x-4)]$ のグラフを描け。
- (3)  $f(x)$ の微分関数とランニング積分関数のそれぞれのグラフを描け。

#### 【解答】

$$(1) R(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

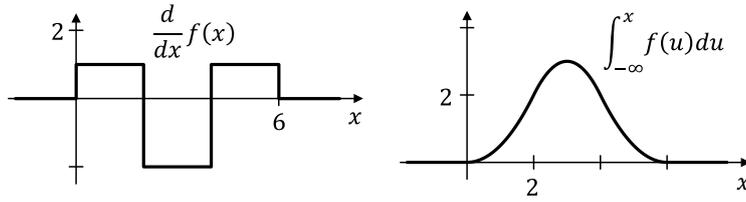
(2) 途中結果のグラフを含めて以下になる。



(3) 微分関数は $f(x)$ 各区間の傾き、この問題ではそれぞれ定数となる。1次関数のランニング積分は、正の傾きは凸関数、負の傾きは凹関数の特性がある。

$$\frac{d}{dx} f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 2 \\ -2, & 2 < x \leq 4 \\ 1, & 4 < x \leq 6 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^x f(u)du = \begin{cases} x^2/2, & 0 < x \leq 2 \\ 3 - (x-3)^2, & 2 < x \leq 4 \\ (x-6)^2/2, & 4 < x \leq 6 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$



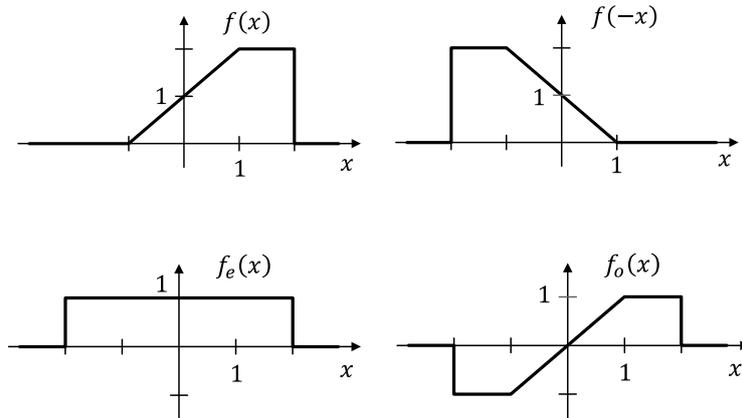
【2】 次に示す関数 $f(x)$ の奇関数成分と偶関数成分をそれぞれ図示せよ。

$$f(x) = p\left(\frac{x}{2}\right)(x+1) + 2p(x-1.5),$$

ここで $p(x)$ は単位パルス関数とする。

【解答】

まず $f(x)$ と $f(-x)$ のグラフを示す。偶関数成分 $f_e(x)$ と奇関数成分 $f_o(x)$ は、式(1.21)より求められる。



【3】 複素数値信号 $x(t) = 2e^{j(3t+1)}$ とする。

- (1)  $x(t)$ の奇関数と偶関数成分をそれぞれ実部と虚部に分けて示せ。
- (2)  $x(5t-1)$ の複素正弦波表現式を示し、角周波数と初期位相を示せ。
- (3)  $x(t)$ の基本周期を示せ。
- (4) 基本周期が $1/6$ となる周期信号の1つの例を、 $x(\cdot)$ 関数表記より示せ。
- (5)  $x(t)$ をサンプリングレート $f_s$ より離散化した ${}_s x[n]$ を指数関数に表し、 ${}_s x[n]$ は周期関数となるために $f_s$ の条件を示せ。

**【解答】**

(1)  $x(t) = 2e^{j(3t+1)} = (2e^j)e^{j3t}$ のように、時間 $t$ の関数 $e^{j3t}$ と、時間 $t$ に依存しない複素定数 $(2e^j)$ に分けて考える。

$e^{j3t} = \cos 3t + j \sin 3t$ より、直接に偶関数成分 $\cos 3t$ と奇関数成分 $j \sin 3t$ に分解できるが、式(1.21)よりも、 $\frac{(e^{j3t}+e^{-j3t})}{2} = \cos 3t$ ,  $\frac{(e^{j3t}-e^{-j3t})}{2} = j \sin 3t$ が求まる。

さらに、 $e^j = \cos 1 + j \sin 1$ に展開して、以下の結果が得られる。

$$x_e(t) = 2 \cos 1 \cos(3t) + j2 \sin 1 \cos(3t)$$

$$x_o(t) = -2 \sin 1 \sin(3t) + j2 \cos 1 \sin(3t)$$

複素指数関数と三角関数の関係を示すオイラーの式の活用がポイントである。

(2)  $x(5t-1) = 2e^{j(3(5t-1)+1)} = 2e^{j(15t-2)}$ より、角周波数=15, 初期位相=-2

一般的に、正弦波（複素正弦波も同）の時間変形によって、角周波数と初期位相の変化は以下に示せる。

$$s(at+b; A, \omega, \theta) = s(t; A, a\omega, \theta + \omega b)$$

(3)  $x(t) = 2e^{j(3t+1)}$ の角周波数=3, よって、周期 $T = 2\pi/3$

(4) 横軸伸縮によって周期が変化し、 $x(at)$ の周期は $T/a$ となるため、

$x(4\pi t) = 2e^{j(12\pi t+1)}$ は周期=1/6 となる。

(5) サンプルング間隔 $T_s = 1/f_s$ ので、 ${}_s x[n] = 2e^{j(3nT_s+1)} = 2e^{j(3n/f_s+1)}$ となる。

${}_s x[n]$ は周期関数となるために、 $T_s$ とCT信号 $x(t)$ の周期 $T = 2\pi/3$ の関係が $T/T_s \in \mathbb{Q}$ を満たす必要がある。この条件、 $2\pi f_s/3 \in \mathbb{Q}$ は、 $\pi f_s \in \mathbb{Q}$ と同等

例えば、 $\pi f_s = \frac{M}{N}$  ( $M, N \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ )の場合、 ${}_s x[n] = 2e^{j(3\pi n N/M+1)}$ となり、周期は $\text{LCM}(2M, 3N)/(3N)$ となる。

**【4】** 確率変数 $x$ は連続の場合、その確率は確率密度関数PDF( $x$ )より示され、 $x \in [a, b]$ の確率は $\int_a^b \text{PDF}(x)dx$ となる。物理的意味によって、 $\text{PDF}(x) \geq 0$ , かつ  $\int_{-\infty}^{\infty} \text{PDF}(x)dx = 1$ はPDFの特性である。例えば $x \in [0,1]$ の一様分布の乱数は $\text{PDF}(x) = p(x-0.5)$ となり、確実に $x=2$ の場合は $\text{PDF}(x) = \delta(x-2)$ と表せる。 $\delta$ 関数と単位パルス関数 $p(x)$ を用いて、次の裏表を当てる公平のコイン投げゲーム得点のPDF表現式とグラフを示せ。

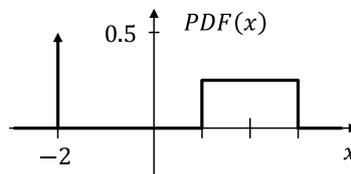
ルール：当たったら 1~3 の一様分布乱数を加点，外れると 2 点減点。

**【解答】**

公平なコインであれば，表裏の当たり外れはそれぞれ 0.5 の確率となり，この 0.5 ずつの確率を得点の PDF に反映させる。当たる場合の PDF は  $x \in [1,3]$  の有限区間矩形パルス，外れる場合では  $x = -2$  での  $\delta$  関数となるので

$$\text{PDF}(x) = \frac{1}{2}\delta(x + 2) + \frac{1}{4}p\left(\frac{x}{2} - 1\right)$$

が得られる。下図に示す。



$\delta$  関数は，連続関数として「1 点に集中する」コンセプトを表すものと理解しておきたい。なお，この例では，確率密度関数として，単位パルス関数  $p(x)$  も  $\delta$  関数と同様に，物理単位は変数  $x$  の物理単位の逆数となっている。

**【5】** 次の微分方程式を満たす信号  $x(t)$  の正弦波定常解を求めよ。

$$5 \cos(2t - 1) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 4 \frac{d}{dt} x(t) + 10x(t)$$

**【解答】**

$x(t) = A \cos(2t + \theta) = \text{Re}(Ae^{j\theta} e^{j2t})$  とし，例題 1.7 のように複素数領域に拡張する。ここで，左辺に合わせて角周波数=2 とした。その要旨は，正弦波信号の時間微分は，振幅と初期位相が変わるが，周波数が変化しないためである。

$$5e^{-j} e^{j2t} = Ae^{j\theta} (-4) e^{j2t} + 4Ae^{j\theta} (2j) e^{j2t} + 10Ae^{j\theta} e^{j2t} \text{ より}$$

$$Ae^{j\theta} = \frac{5e^{-j}}{6 + 8j} = 0.5e^{j(-1 - \tan^{-1}\frac{4}{3})}$$

$A = 0.5$ ， $\theta = -1 - \tan^{-1}\frac{4}{3}$  が求まり， $x(t) = 0.5 \cos(2t - 1 - \tan^{-1}\frac{4}{3})$  となる。

なお，問題の微分方程式を満たす全体解は，この定常解  $x(t)$  と次の斉次微分方

程式を満たす一般解 $x_0(t)$ の結合 $x(t) + x_0(t)$ となる。

$$0 = \frac{d^2}{dt^2} x_0(t) + 4 \frac{d}{dt} x_0(t) + 10x_0(t)$$
$$\Rightarrow x_0(t) = A_0 e^{-2t} \cos(\sqrt{6}t + \theta_0) \quad (\forall A_0, \theta_0 \in \mathbb{R})$$

## 第2章

**【1】** 次に示す各システム $y(t) = S\{x(t)\}$ の線形性と時不変性を判定せよ。

$$(1) y(t) = \sin(t)x(t) \quad (2) y(t) = x(t) \frac{d}{dt} x(t) \quad (3) \frac{d^2}{dt^2} y(t) = e^3 x(t)$$

$$(4) y(t) = \begin{cases} 2x(t), & t \geq 0 \\ x(t), & t < 0 \end{cases} \quad (5) y(t) = \begin{cases} x(t), & x(t) \geq 0 \\ 0, & x(t) < 0 \end{cases}$$

### 【解答】

(1) 従属変数 $y(\cdot)$ と $x(\cdot)$ とは線形関係であるが、係数 $\sin(t)$ は独立変数 $t$ に依存するため、システムは線形であり、時不変ではない。

(2)  $x(t)$ と $\frac{d}{dt} x(t)$ はそれぞれ線形・時不変演算であるが、両者の積は非線形となるため、システムは時不変であり、線形ではない。

(3) 2階微分 $\frac{d^2}{dt^2}$ と定数 $e^3$ 増幅とはいずれも線形時不変演算であるため、システムは線形・時不変である。

(4)  $x(t)$ と $2x(t)$ ともに線形時不変演算であるが、時間 $t$ によって切り替わる操作は時不変ではない。一般的に、時間 $t$ によって区分関数として定義されるシステムは時不変ではない。よって、このシステムは線形であり、時不変ではない。

(5) まず、定数0は線形時不変演算の特例として考えられる。ただし、このシステムでは、従属変数 $x(\cdot)$ によって出力が切り替わるため、「操作」は入力信号値に依存し、線形ではない。一般論として、このような信号値によって場合分けで定義するシステムは線形ではない。よって、このシステムは時不変であり線形ではない。

【2】 図 2.15 に示す各信号は LTI システム  $H\{\cdot\}$  の入出力とする。

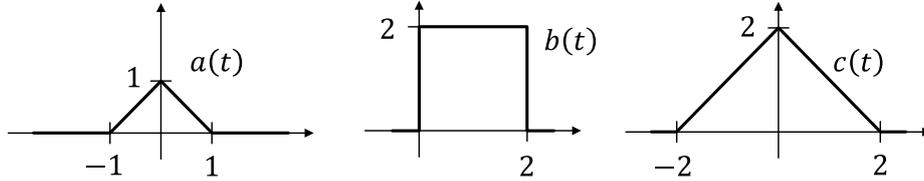
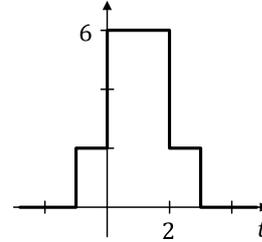


図 2.15

- (1)  $H\{a(t)\} = b(t)$  の場合,  $H\{c(t)\}$  を図示せよ。
- (2)  $H\{\delta(t)\} = b(t)$  の場合,  $H\{a(t)\}$  を図示せよ。
- (3)  $H\{\delta(t)\} = u(t)$  (単位ステップ関数) の場合,  $H\{b(t)\}$  を図示せよ。

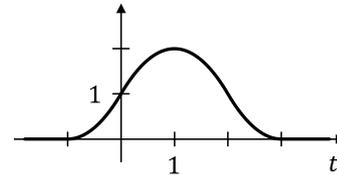
【解答】

(1)  $c(t) = a(t+1) + 2a(t) + a(t-1)$  と表せるため, LTI システムの遅延・線形結合保存によって,  $H\{c(t)\} = b(t+1) + 2b(t) + b(t-1)$  が得られる。

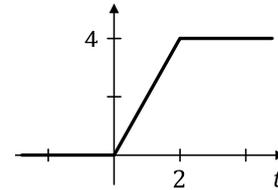


(2)  $b(t)$  は IRF であるため,  $H\{a(t)\} = a(t) * b(t)$  となる。畳み込み積分結果は以下に示す。

$$a * b(t) = \begin{cases} (t+1)^2, & -1 < t \leq 0 \\ 2 - (t-1)^2, & 0 < t \leq 2 \\ (t-3)^2, & 2 < t \leq 3 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$



(3)  $H\{b(t)\} = u(t) * b(t)$  となり,  $b(t)$  のランニング積分に同等。「ランニング積分」は LTI 操作であり, その IRF は単位ステップ関数になる。  $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$



【3】  $3 \cos(2t + 1) * p(t)$  ( $p(t)$  は単位パルス関数) を求め, 正弦波数式に表せ。

【解答】

$$\begin{aligned}
3 \cos(2t + 1) * p(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} 3 \cos(2\tau + 1) p(\tau - t) d\tau = \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} 3 \cos(2\tau + 1) d\tau \\
&= \frac{3}{2} [\sin(2t + 2) - \sin 2t] = 3 \sin 1 \cos(2t + 1)
\end{aligned}$$

LTI システムの操作は、入力信号のシフトと線形結合に相当し、この 2 種類の操作はいずれも正弦波の周波数を変えないため、正弦波信号を入力した場合での出力は同じ周波数の正弦波となることは本問題のポイントである。この例では初期位相 1 も変化していないが、これは IRF に相当する  $p(t)$  の偶関数対称性によるもので、一般的に振幅と初期位相は変化する。例えば、畳み込み積分の時間シフト特性式(2.25)により、IRF は  $p(t-1)$  の場合での出力は

$$3 \cos(2t + 1) * p(t - 1) = 3 \sin 1 \cos(2(t - 1) + 1) = 3 \sin 1 \cos(2t - 1)$$

となるため、初期位相の変化も現れる。

- 【4】** 線形回路のある端子間電圧（物理単位[V]）を入力、ある枝路電流（物理単位[A]）を出力と見立てた場合に、このシステムのインパルス応答関数の物理単位を考察せよ。ここで、すべての回路素子は時不変性を満たすものとし、時間の物理単位は[s]とする。

**【解答】**

LTI システムにおいて、出力信号は入力信号と IRF との畳み込み積分より表せる。また、畳み込み積分の結果の物理単位には独立変数の単位も含まれていることに留意しよう。

$$\text{IRF の単位} \times \text{入力信号の単位[V]} \times \text{時間単位[s]} = \text{出力信号の単位[A]}$$

よって、この問題の IRF の物理単位は  $[A \cdot V^{-1} \cdot s^{-1}]$  となる。物理単位の観点から、このシステムはアドミタンス（SI 単位は  $[S] = [A \cdot V^{-1}]$ ）の特性をもつ。IRF の単位に現れる時間逆数  $[s^{-1}]$  は、その場合での入力である  $\delta$  関数の単位である。

- 【5】** 図 2.3 に示す 3 種類のシステムの結合例において、 $S_1\{\cdot\}$  と  $S_2\{\cdot\}$  はそれぞれの IRF が  $h_1(t)$  と  $h_2(t)$  の LTI システムとする。 $S_1\{\cdot\}$  と  $S_2\{\cdot\}$  が結合し

たシステム全体の IRF を  $h(t)$  とした場合, これら 3 種類のシステム (a), (b), (c) それぞれ,  $h(t)$  と  $h_1(t)$ ,  $h_2(t)$  の関係式を示せ。

**【解答】**

(a) 並列結合の場合での入出力関係は式(2.4)に示すように表せる。

$$y(t) = S_1\{x(t)\}(t) + S_2\{x(t)\}(t)$$

ここで入力  $x(t) = \delta(t)$  とした場合での出力  $y(t) = h(t)$  となるため, 以下となる。

$$h(t) = S_1\{\delta(t)\}(t) + S_2\{\delta(t)\}(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

(b) 直列結合の場合では式(2.5)  $y(t) = S_2\{S_1\{x(t)\}(t)\}(t)$  より,

$$h(t) = S_2\{S_1\{\delta(t)\}(t)\}(t) = S_2\{h_1(t)\}(t) \text{ が得られ,}$$

ここで  $h_1(t)$  を  $S_2\{\delta(t)\} = h_2(t)$  の LTI システムの入力と見なし,

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) \text{ が得られる。}$$

(c) 帰還結合の場合では, 式(2.6)より, 以下の関係が得られる。

$$\begin{aligned} h(t) &= S_1\{\delta(t) + S_2\{h(t)\}\} = (\delta(t) + h(t) * h_2(t)) * h_1(t) \\ &= h_1(t) + h(t) * h_2(t) * h_1(t) \end{aligned}$$

この場合, 移行して

$$h(t) - h(t) * h_2(t) * h_1(t) = h(t) * (\delta(t) - h_2(t) * h_1(t)) = h_1(t)$$

と示すことができるが, 時間領域の信号形式で  $h(t)$  を直接に表すことができない。このような,  $x(t) * y(t) = z(t)$  の関係より,  $y(t)$  と  $z(t)$  から  $x(t)$  を求める問題は, デコンボリューション (deconvolution) という。

### 第 3 章

**【1】** 行列  $A$  とその固有ベクトル  $p_1, p_2$  を以下に与える。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(1) 2 つの固有ベクトルのそれぞれの固有値  $\lambda_1, \lambda_2$  を求めよ。

(2)  $\mathbf{x} = a\mathbf{p}_1 + b\mathbf{p}_2$  ( $a, b$ は定数) とし, ベクトル  $\mathbf{y} = \mathbf{A}^2\mathbf{x} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$  を求めよ。

【解答】

(1)  $\mathbf{A}\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{A}\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = -3\mathbf{p}_2$  より,  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$  が求まる。

(2)  $\mathbf{y} = \mathbf{A}^2\mathbf{x} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$

$$= \mathbf{A}^2(\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2) \begin{pmatrix} a(\lambda_1^2 + \lambda_1^{-1}) \\ b(\lambda_2^2 + \lambda_2^{-1}) \end{pmatrix}$$

に各固有ベクトルと固有値を代入し, 以下が求まる。

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9a/2 \\ 26b/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9a + 26b/3 \\ 9a/2 - 52b/3 \end{pmatrix}$$

【2】  $z^3 = 1$  を満たす複素数  $z$  の 3 つの根を  $z_1 = 1, z_2, z_3$  とする。

(1)  $z_2, z_3$  を求めよ。ただし,  $\text{Im}(z_2) > \text{Im}(z_3)$  とする。

(2) 3次元複素数空間において, ベクトル  $(1 \ 1 \ 1)^T$  と  $(1 \ z_2 \ z_3)^T$  の両方と直交するベクトルを  $(1 \ a \ b)^T$  とした場合, 複素数  $a$  と  $b$  を求めよ。

【解答】

(1) 1 を複素数  $e^{j2n\pi}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) とし,  $z = e^{j2n\pi/3}$  となり,  $n = 0, 1, 2$  の 3 つの異なる根が得られる。それぞれ以下となる。

$$z_1 = 1, \quad z_2 = e^{j2\pi/3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = e^{j4\pi/3} = e^{-j2\pi/3} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2) ベクトル直交によって,  $\langle (1 \ 1 \ 1)^T, (1 \ a \ b)^T \rangle = 1 + a + b = 0$  と

$\langle (1 \ z_2 \ z_3)^T, (1 \ a \ b)^T \rangle = 1 + az_2^* + bz_3^* = 0$  がそれぞれ得られ

$$1 + (-b - 1)e^{-j2\pi/3} + be^{j2\pi/3} = 0 \implies b = \frac{e^{-j\frac{2\pi}{3}} - 1}{e^{j\frac{2\pi}{3}} - e^{-j\frac{2\pi}{3}}} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = z_2$$

よって,  $a = -1 - b = z_3$ ,  $b = z_2$  が求まる。

なお, この 3 つの複素数ベクトルは互いに直交し, 3次元直交基底となる。

**【3】** 4次元複素数空間における次の2種類の基底ベクトル $\mathbf{r}$ と $\mathbf{q}$ それぞれの直交性, および巡回置換行列 $\mathbf{P}$ に対する固有性を確認せよ。

$$(\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{r}_3 \ \mathbf{r}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \mathbf{q}_3 \ \mathbf{q}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**【解答】**

$$\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle = 1 + 1 - 1 - 1 = 0, \quad \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_4 \rangle = 1 + j^*(-j) + 1 + (-j)^*j = 0$$

同様に,  $\langle \mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n \rangle = 4\delta_{m,n}$  と  $\langle \mathbf{q}_m, \mathbf{q}_n \rangle = 4\delta_{m,n}$  が確認できる。この2種類の基底ともに4次元直交基底である。

また,  $\mathbf{P}\mathbf{r}_1 = 1\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{P}\mathbf{r}_3 = (-1)\mathbf{r}_3$  となるが,  $\mathbf{P}\mathbf{r}_2 = (-1 \ 1 \ 1 \ -1)^T$  と  $\mathbf{P}\mathbf{r}_4 = (1 \ 1 \ -1 \ -1)^T$  によって,  $\mathbf{r}_2$  と  $\mathbf{r}_4$  は  $\mathbf{P}$  の固有ベクトルでないことが判る。一方,  $\mathbf{P}\mathbf{q}_1 = 1\mathbf{q}_1$ ,  $\mathbf{P}\mathbf{q}_2 = (-j)\mathbf{q}_2$ ,  $\mathbf{P}\mathbf{q}_3 = (-1)\mathbf{q}_3$ ,  $\mathbf{P}\mathbf{q}_4 = j\mathbf{q}_4$  より,  $\mathbf{q}$  は  $\mathbf{P}$  の固有ベクトルであることが確認できる。

**【4】** 次に示す各周期信号の  $t \in [0, 2\pi]$  の区間内積をそれぞれ求めよ。

$$(1) \langle \sin t, \cos t \rangle \quad (2) \langle \sin t, \sin 3t \rangle \quad (3) \langle \cos t, \cos t \rangle \quad (4) \langle e^{jt}, e^{j2t} \rangle$$

**【解答】**

$$(1) \int_0^{2\pi} \sin t \cos t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2t \, dt = 0$$

$$(2) \int_0^{2\pi} \sin t \sin 3t \, dt = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos 4t - \cos 2t) \, dt = 0$$

$$(3) \int_0^{2\pi} \cos t \cos t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos 2t + 1) \, dt = \pi$$

$$(4) \int_0^{2\pi} (e^{jt})^* e^{j2t} dt = \int_0^{2\pi} e^{jt} dt = 0$$

**【5】** 信号 $x(t)$ を区間 $t \in [0, 2\pi]$ において次のように近似する場合の最小二乗解の係数 $A$ と $B$ をそれぞれ示せ。

$$(1) Ae^{jt} + Be^{-jt} \quad (2) A \cos t + B \sin t$$

**【解答】**

(1)  $\langle e^{jt}, e^{-jt} \rangle = \int_0^{2\pi} (e^{jt})^* e^{-jt} dt = \int_0^{2\pi} e^{-j2t} dt = 0$ のため、 $e^{jt}$ と $e^{-jt}$ は直交である。さらに、 $\langle e^{jt}, e^{jt} \rangle = \langle e^{-jt}, e^{-jt} \rangle = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$ ので、 $A, B$ は以下に求まる。

$$A = \frac{\langle e^{jt}, x(t) \rangle}{\langle e^{jt}, e^{jt} \rangle} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) e^{-jt} dt, \quad B = \frac{\langle e^{-jt}, x(t) \rangle}{\langle e^{-jt}, e^{-jt} \rangle} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) e^{jt} dt$$

(2)  $\langle \cos t, \sin t \rangle = 0$ より、 $\cos t$ と $\sin t$ は直交することが判る。また、 $\langle \cos t, \cos t \rangle = \langle \sin t, \sin t \rangle = \pi$ を用いて、 $A, B$ は以下に求まる。

$$A = \frac{\langle \cos t, x(t) \rangle}{\langle \cos t, \cos t \rangle} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos t dt, \quad B = \frac{\langle \sin t, x(t) \rangle}{\langle \sin t, \sin t \rangle} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin t dt$$

## 第4章

**【1】** FS 係数が次に与えられた場合の各周期信号の実数関数形を示せ。ここで基本周期 $T_0 = \pi$ とする。なお、未定義部分のFS係数は0とする。

$$(1) \{-1, \underline{2}, -1\} \quad (2) \{2, 1-j, \underline{1}, 1+j, 2\} \quad (3) \{2, 0, 1-j, 0, \underline{1}, 0, 1+j, 0, 2\}$$

**【解答】**

$$(1) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{FS}[x(t)][k] \cdot e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t} = -1e^{-j2t} + 2 + (-1)e^{j2t} = 2 - 2\cos 2t$$

$$(2) 2e^{-j4t} + (1-j)e^{-j2t} + 1 + (1+j)e^{j2t} + 2e^{j4t}$$

$$= 1 + 2(e^{-j4t} + e^{j4t}) + (e^{-j2t} + e^{j2t}) + j(e^{j2t} - e^{-j2t})$$

$$= 1 + 4\cos 4t + 2\cos 2t - 2\sin 2t = 1 + 4\cos 4t + 2\sqrt{2}\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(3) 2e^{-j8t} + (1-j)e^{-j4t} + 1 + (1+j)e^{j4t} + 2e^{j8t}$$

$$= 1 + 2\sqrt{2}\cos\left(4t + \frac{\pi}{4}\right) + 4\cos 8t$$

- 【2】** 例題 4.2 の FS 係数結果は奇数番のみ非零値が取り得る。逆に偶数番のみ非零値が取り得る FS 係数である場合の信号にはどのような特徴があるかを考察し、次式に示す FS 係数が成り立つ信号  $y(t)$  と  $x(t)$  との関係を説明せよ。

$$\text{FS}[y(t)][k] = \begin{cases} \text{FS}[x(t)][n], & k = 2n \\ 0, & k = 2n + 1 \end{cases}$$

- 【解答】** FS 展開の式(4.6)より,  $k = 2n$ のみ非零値が取り得る場合

$$y(t) = y(t + T_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{FS}[y(t)][k] \cdot e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{FS}[y(t)][2n] \cdot e^{j2n\frac{2\pi}{T_0}t}$$

と表すことができ, この場合でのすべての基底関数  $e^{j2n\frac{2\pi}{T_0}t} = e^{jn\frac{2\pi}{T_0/2}t}$  は, 周期が  $T_0/2$  の周期関数となり,  $T_0/2$  は信号  $y(t)$  の周期でもある。すなわち,  $T_0$  は基本周期 (最小正周期) ではない。

例題 4.3 の(1)に類似し, FS 係数は整数番号を独立変数としているため,  $T_0$  が明示されていないことが要注意のポイントである。

$x(t) = x(t + T_0)$  の基本周期は  $T_0$  とし, FS の算出に使われる周期をパラメータとして明示すると, 次の関係が成り立つ。本問題では  $m = 2$  の場合となる。

$$\text{FS}[x(t)][k; T_0] = \text{FS}[x(at)][mk; mT_0/a] \quad (a > 0, m \in \mathbb{Z}^+)$$

- 【3】** 例題 4.1 に示した周期矩形パルス信号の振幅を  $A = 1$ , デューティー比を  $D/T_0 = 1/2$  とした場合の信号を  $x(t)$  とする。

- (1) 例題 4.1 の結果より  $\text{FS}[x(t)][k]$  を示せ。  
 (2)  $x(t)$  の FS 展開表現式に  $t = 0$  を代入して, 以下に示すライプニッツ級数より円周率を求める公式を証明せよ。

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

- (3)  $y(t) = x(t - T_0/4) - 1/2$  とし, FS の線形性と時間シフト特性などを利用して  $\text{FS}[y(t)][k]$  を求め, 例題 4.2 の矩形振動波の FS 係数  $c_k$  と比較せよ。

【解答】

(1)  $A = 1, D/T_0 = 1/2$ を代入し、以下に求まる。

$$\text{FS}[x(t)][0] = A \frac{D}{T_0} = \frac{1}{2}, \quad \text{FS}[x(t)][k] = \frac{A \sin\left(\frac{k\pi D}{T_0}\right)}{\pi k} = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{\pi k} \quad (k \neq 0)$$

(2)  $t = 0$ と(1)の結果を $x(t) = x(t + T_0) = \sum_k \text{FS}[x(t)][k] e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}$ に代入し

$$x(0) = 1 = \frac{1}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi n} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}$$

が得られる。また

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 4l \\ 1, & n = 4l + 1 \\ 0, & n = 4l + 2 \\ -1, & n = 4l + 3 \end{cases} = \begin{cases} 0, & n = 2m \\ (-1)^m, & n = 2m + 1 \end{cases}$$

を代入すると、以下が証明できる。

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

(3) まず、時間シフト特性式(4.19)より

$$\text{FS}[x(t - T_0/4)][k] = \text{FS}[x(t)][k] e^{-jk\frac{\pi}{2}} = \begin{cases} 1/2, & k = 0 \\ \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{k\pi}, & k \neq 0 \end{cases}$$

なお

$$\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & k = 2m \\ (-1)^m, & k = 2m + 1 \end{cases}, \quad e^{-jk\frac{\pi}{2}} = \begin{cases} (-1)^m, & k = 2m \\ -j(-1)^m, & k = 2m + 1 \end{cases}$$

と線形性 $\text{FS}[y(t)][k] = \text{FS}[x(t - \frac{T_0}{4})][k] - \text{FS}[\frac{1}{2}][k] = \text{FS}[x(t - \frac{T_0}{4})][k] - \frac{1}{2}\delta[k]$

より、以下が得られる。

$$\text{FS}[y(t)][k] = \begin{cases} 0, & k = 2m \\ \frac{-j}{k\pi}, & k = 2m + 1 \end{cases}$$

よって、例題 4.2 の結果とは、 $\text{FS}[y(t)][k] = c_k/2$ の関係がわかる。

この問題の $y(t)$ は例題 4.2 の $x(t)$ と類似することは、時間領域の波形よりも直接確認できるが、FS 係数の表現式には周期の具体値に対する縛りがない。

**【4】** 周期三角形パルス信号を  $x(t) = x(t+2)$ ,  $x(t) = 1 - |t|$  ( $|t| \leq 1$ ) とする。

(1)  $\text{FS}[x(t)][k]$  を定義式より求めよ。

(2)  $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$  とし,  $\text{FS}[x(t)][k]$  の結果に FS の時間微分特性を適用して,  $\text{FS}[y(t)][k]$  を求め, 例題 4.2 の  $c_k$  と比較せよ。

**【解答】**

(1) 積分の周期区間は  $t \in [-1, 1]$  とし, 定義式(4.5)より

$$\begin{aligned} \text{FS}[x(t)][k] &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x(t) e^{-jk\pi t} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (1+t) e^{-jk\pi t} dt + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t) e^{-jk\pi t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{-jk\pi t - 1}{(-jk\pi)^2} e^{-jk\pi t} \right]_{t=-1}^0 - \frac{1}{2} \left[ \frac{-jk\pi t - 1}{(-jk\pi)^2} e^{-jk\pi t} \right]_{t=0}^1 = \frac{1 - \cos k\pi}{k^2 \pi^2} \quad (k \neq 0) \end{aligned}$$

$k$  は偶数の時に  $\cos(k\pi) = 1$ ,  $k$  は奇数の時に  $\cos(k\pi) = -1$  より, 以下が求まる。

$$\text{FS}[x(t)][k] = \begin{cases} 1/2, & k = 0 \\ 0, & k = 2m \neq 0 \\ \frac{2}{k^2 \pi^2}, & k = 2m + 1 \end{cases}$$

ここで,  $k = 0$  の場合では  $\text{FS}[x(t)][0] = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x(t) dt = 1/2$  となる。

(2) 時間微分の特性式(4.20)より

$$\text{FS}[y(t)][k] = jk\pi \text{FS}[x(t)][k] = \begin{cases} 0, & k = 2m \\ \frac{2j}{k\pi}, & k = 2m + 1 \end{cases}$$

が得られ, 例題 4.2 の結果とは  $\text{FS}[y(t)][k] = -c_k$  の関係がなりたつ。  $y(t)$  の時間波形からも例題 4.2 の信号と極性反転することが確認できる。

この問題のように, (1)のように直接計算しにくい場合, (2)のように時間微分信号の FS 係数から

$$\text{FS}[x(t)][k] = \frac{T_0}{jk2\pi} \text{FS} \left[ \frac{dx(t)}{dt} \right] [k]$$

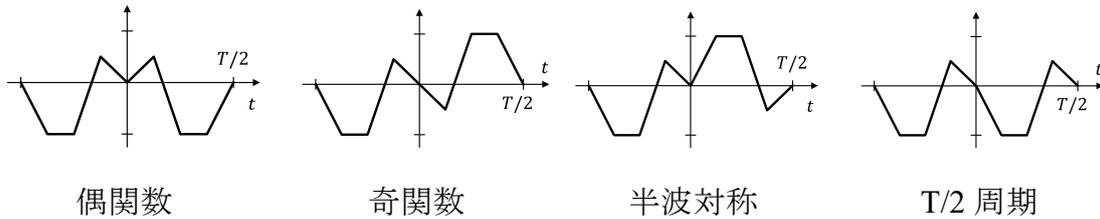
求めることもできるが,  $k = 0$  を特別に扱う必要がある。  $k = 0$  の FS 係数は時間変化しない DC 成分を表すため, 時間微分によって消えることが理解できる。

**【5】**  $x(t) = x(t+T) = -x(t+T/2)$  は周期信号の半波対称性といい, これを

満たす信号の FS 係数は  $FS[x(t)][2m] = 0$  の特性があり，すなわち  $x(t)$  に奇数次高調波しか含まれないことを証明せよ。

**【解答】**

まず， $-T/2 \sim T/2$  の 1 周期を例とし，半波対称性のイメージを以下に図示する。参考のため半波ごとの極性が反転しない  $y(t) = y(t+T) = y(t+T/2)$  も示すが，この信号においては  $T/2$  が周期となるため議論しない。



偶数番の FS 係数は，定義式によって以下となるが

$$\begin{aligned}
 FS[x(t)][2n] &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2n\frac{2\pi}{T}t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^0 x(t) e^{-j2n\frac{2\pi}{T}t} dt + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} x(t) e^{-j2n\frac{2\pi}{T}t} dt
 \end{aligned}$$

第 2 項のダミー変数を  $\tau = t - T/2$  に変換すると

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T} \int_0^{T/2} x(t) e^{-j2n\frac{2\pi}{T}t} dt &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^0 x(\tau + T/2) e^{-j2n\frac{2\pi}{T}(\tau + T/2)} d\tau \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^0 -x(\tau) e^{-j2n\frac{2\pi}{T}\tau} e^{-jn2\pi} d\tau = -\frac{1}{T} \int_{-T/2}^0 x(t) e^{-j2n\frac{2\pi}{T}t} dt
 \end{aligned}$$

第 1 項と打ち消すことが判る。これは，関数  $e^{-j2n\frac{2\pi}{T}t}$  は  $T/2$  の周期性があるので， $s(t) = s(t+T/2)$  と  $x(t) = -x(t+T/2)$  の乗算結果も半波対称性をもち，1 周期の積分は 0 となるためである。

**第 5 章**

**【1】**  $F[x(t)](\omega) = X(\omega)$  とし，次の各信号のスペクトルを  $X(\cdot)$  関数形より表せ。

- (1)  $x(3-t)$       (2)  $\frac{d}{dt}x(2t)$       (3)  $t \cdot x(t)$       (4)  $\cos(2t-1) \cdot x(t)$

**【解答】**

(1) 複数の操作の組合せでは、一つずつ仲介関数を用いるとわかりやすい。

$$y(t) = x(t + 3) \implies Y(\omega) = X(\omega)e^{j\omega 3}$$

$$x(3 - t) = y(-t) \implies F[x(3 - t)](\omega) = Y(-\omega) = X(-\omega)e^{-j3\omega}$$

(2) まず時間伸縮  $y(t) = x(2t) \implies Y(\omega) = \frac{1}{2}X(\frac{\omega}{2})$  より、以下が得られる。

$$F\left[\frac{d}{dt}x(2t)\right](\omega) = F\left[\frac{d}{dt}y(t)\right](\omega) = j\omega Y(\omega) = \frac{j\omega}{2}X\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

(3) 周波数微分特性の式(5.17)より、 $F[-jtx(t)](\omega) = \frac{d}{d\omega}X(\omega)$  さらに線形性より

$$F[tx(t)](\omega) = F[j(-j)tx(t)](\omega) = j\frac{d}{d\omega}X(\omega)$$

(4) まず正弦波の FT スペクトルを示す。

$$F[\cos(2t - 1)](\omega) = \pi e^{-j}\delta(\omega - 2) + \pi e^{j}\delta(\omega + 2)$$

次に畳み込み積分の特性より、以下が求まる。

$$\begin{aligned} F[\cos(2t - 1)x(t)](\omega) &= \frac{1}{2\pi}F[\cos(2t - 1)](\omega) * X(\omega) \\ &= \frac{1}{2}e^{j}X(\omega + 2) + \frac{1}{2}e^{-j}X(\omega - 2) \end{aligned}$$

**【2】** 信号  $x(t) = \cos t$  とし、 $F[x(t)](\omega)$  は  $\cos t$  の FT スペクトルとなる。

(1) 時間シフト特性より  $F[x(t - \frac{\pi}{2})](\omega)$  を求め  $F[\sin t](\omega)$  と比較せよ。

(2) 畳み込み積分特性より  $F[x(t) \sin t](\omega)$  を求め  $F[\sin(2t)](\omega)$  と比較せよ。

(3) 時間伸縮特性より  $F[x(2t)](\omega)$  を求め  $F[\cos(2t)](\omega)$  と比較せよ。

**【解答】**

$$F[x(t)](\omega) = X(\omega) = \pi\delta(\omega - 1) + \pi\delta(\omega + 1)$$

(1)  $F[x(t - \frac{\pi}{2})](\omega) = e^{-j\frac{\pi\omega}{2}}X(\omega) = \pi e^{-j\frac{\pi\omega}{2}}\delta(\omega - 1) + \pi e^{-j\frac{\pi\omega}{2}}\delta(\omega + 1)$

ここで、 $\delta$  関数の物差し特性を利用して、 $f(x)\delta(x - a) = f(a)\delta(x - a)$  より

$$\pi e^{-j\frac{\pi\omega}{2}}\delta(\omega-1) = \pi e^{-j\frac{\pi}{2}}\delta(\omega-1) = -j\pi\delta(\omega-1)$$

$$\pi e^{-j\frac{\pi\omega}{2}}\delta(\omega+1) = \pi e^{j\frac{\pi}{2}}\delta(\omega+1) = j\pi\delta(\omega+1)$$

が得られる。よって、 $F[x(t-\frac{\pi}{2})](\omega) = j\pi\delta(\omega+1) - j\pi\delta(\omega-1) = F[\sin t](\omega)$

(2) 畳み込み積分の特性より、以下が得られる。

$$F[x(t)\sin t](\omega) = \frac{1}{2\pi}F[\sin t](\omega) * X(\omega) = \frac{j}{2}X(\omega+1) - \frac{j}{2}X(\omega-1)$$

$$= \frac{j\pi}{2}(\delta(\omega) + \delta(\omega+2) - \delta(\omega-2) - \delta(\omega))$$

$$= \frac{1}{2}(j\pi\delta(\omega+2) - j\pi\delta(\omega-2)) = \frac{1}{2}F[\sin 2t](\omega)$$

$$(3) F[x(2t)](\omega) = \frac{1}{2}X(\frac{\omega}{2}) = \frac{\pi}{2}\delta(\frac{\omega}{2}-1) + \frac{\pi}{2}\delta(\frac{\omega}{2}+1)$$

ここで、 $\delta$ 関数の伸縮特性を利用し、 $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ より、以下が得られる。

$$F[x(2t)](\omega) = \frac{\pi}{2}\delta\left(\frac{\omega}{2}-1\right) + \frac{\pi}{2}\delta\left(\frac{\omega}{2}+1\right) = \pi\delta(\omega-2) + \pi\delta(\omega+2)$$

$$= F[\cos(2t)](\omega)$$

**【3】** 三角形パルス信号 $x(t) = p(t/2) \cdot (1 - |t|)$ と表せる。 $F[x(t)](\omega)$ をそれぞれ次の3種類の方法より求めよ。ここで $p(t)$ は単位パルス関数である。

(1)  $x(t)$ を区分別関数に表し、FT定義式より求めよ。

(2)  $x(t) = \int_{-\infty}^t [p(\tau + \frac{1}{2}) - p(\tau - \frac{1}{2})]d\tau$ とし、単位パルス関数のFTスペクトルとFTの時間シフト特性と時間積分特性を併用して求めよ。

(3)  $x(t) = p(t) * p(t)$ とし、FTの畳み込み特性を利用して求めよ。

**【解答】**

$$(1) x(t) = \begin{cases} 1+t, & -1 \leq t < 0 \\ 1-t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

$$F[x(t)](\omega) = \int_{-1}^0 (1+t)e^{-j\omega t} dt + \int_0^1 (1-t)e^{-j\omega t} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \frac{-j\omega t - j\omega - 1}{(-j\omega)^2} e^{-j\omega t} \right]_{t=-1}^0 + \left[ \frac{j\omega t - j\omega + 1}{(-j\omega)^2} e^{-j\omega t} \right]_{t=0}^1 \\
&= \frac{1 + j\omega - e^{j\omega}}{\omega^2} - \frac{e^{-j\omega} - 1 + j\omega}{\omega^2} = \frac{2 - 2\cos\omega}{\omega^2} = \frac{4\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega^2} \\
&= \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (\omega \neq 0)
\end{aligned}$$

$\omega = 0$ の場合では  $F[x(t)](0) = \int_{-1}^0 (1+t)dt + \int_0^1 (1-t)dt = 1 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$  のため、 $\omega = 0$  は除去可能の特異点であり、 $F[x(t)](\omega) = \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$  とまとめられる。

(2) 単位パルス関数のスペクトル  $F[p(t)](\omega) = \text{sinc}\frac{\omega}{2}$  より

$$\begin{aligned}
F\left[p\left(t + \frac{1}{2}\right) - p\left(t - \frac{1}{2}\right)\right](\omega) &= F\left[p\left(t + \frac{1}{2}\right)\right](\omega) - F\left[p\left(t - \frac{1}{2}\right)\right](\omega) \\
&= \text{sinc}\frac{\omega}{2}\left(e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}\right) = 2j\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)
\end{aligned}$$

$\omega = 0$  の場合では  $\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0$  ので、 $F[p(t + \frac{1}{2}) - p(t - \frac{1}{2})](0) = 0$  と式(5.18)より

$$F[x(t)](\omega) = \frac{1}{j\omega} 2j\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

(3) 畳み込み積分の特性より、以下が求まる。

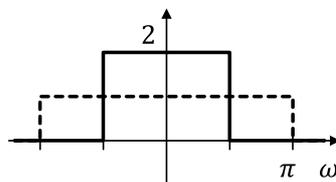
$$F[x(t)](\omega) = F[p(t) * p(t)](\omega) = F[p(t)](\omega)F[p(t)](\omega) = \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

**【4】** 信号  $x(t) = \text{sinc}(\pi t/2)$ ,  $y(t) = \text{sinc}(\pi t)$  とする。 $F[x(t)](\omega)$  と  $F[y(t)](\omega)$  をそれぞれ図示し、信号  $x(t) * y(t)$  を FT スペクトルより求めよ。

**【解答】**

$\text{sinc}$  関数の FT スペクトルより以下が得られ、 $F[x(t)](\omega)$  と  $F[y(t)](\omega)$  をそれぞれ実線、破線で図示する。

$$F[x(t)](\omega) = 2p\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$



$$F[y(t)](\omega) = p\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

畳み込み積分の特性より,  $F[x(t) * y(t)](\omega) = F[x(t)](\omega) F[y(t)](\omega)$  となるため, グラフよりこれらの乗算結果は  $F[x(t)](\omega) = 2p\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$  と同様であるので,  $x(t) * y(t) = x(t)$  がわかる。

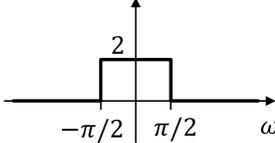
sinc 関数は矩形パルスのスペクトルをもつので, 理想 LPF の Kernel とされている。この問題では,  $y(t)$  を  $|\omega| \leq \pi$  の理想 LPF と見なせば, 帯域幅  $|\omega| \leq \pi/2$  の  $x(t)$  はこの帯域内にあるので, 完全通過になると考えられる。

**【5】** 信号  $x(t) = \text{sinc}(\pi t/2)$  とし, 次の各信号の FT スペクトルを順番に求めて図示せよ。ここで  $\delta_1(t)$  は周期 1 のインパルス列である。

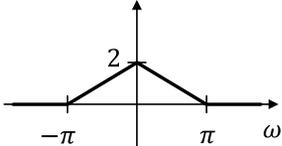
- (1)  $x(t)$                       (2)  $f(t) = x(t)x(t)$                       (3)  $g(t) = f(t)\delta_1(t)$   
 (4)  $h(t) = g(t) \cos(\pi t)$                       (5)  $y(t) = h(t) + g(t)$

**【解答】**

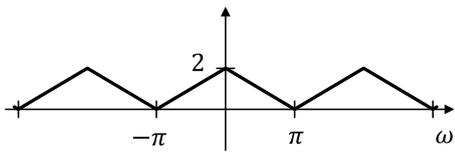
(1)  $X(\omega) = 2p\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$



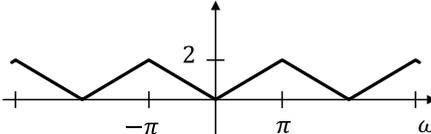
(2)  $F(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * X(\omega) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(t + \pi), & -\pi \leq t < 0 \\ \frac{2}{\pi}(\pi - t), & 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & \text{others} \end{cases}$



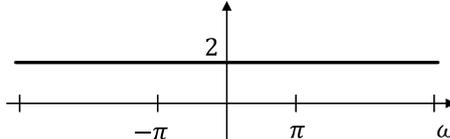
(3)  $G(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \text{FT}[\delta_1(t)](\omega)$   
 $= F(\omega) * \delta_{2\pi}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(\omega - 2\pi m)$



(4)  $H(\omega) = \frac{1}{2\pi} G(\omega) * \text{FT}[\cos \pi t](\omega)$   
 $= \frac{1}{2} G(\omega + \pi) + \frac{1}{2} G(\omega - \pi)$   
 $= G(\omega + \pi) = G(\omega - \pi)$



(5)  $Y(\omega) = H(\omega) + G(\omega) = 2$



- 【6】 例題 5.4 のように矩形窓より切り出した正弦波のスペクトルを下図の実線に示す。ピーク位置，メインローブ幅，リップルの大きさの違いより，点線スペクトルに対応する信号の周波数と窓関数の変化を考察せよ。

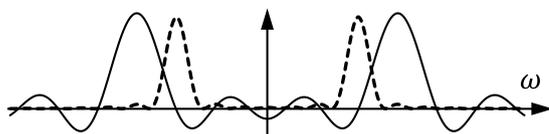


図5.17

【解答】

図より点線のスペクトルは実線と比べて以下の特徴が見受けられる。

- ①メインローブのピーク位置は原点により近い

これより，主周波数成分はより低いことが考えられる。

- ②メインローブの幅はより狭い

時間領域の有限長窓関数により，周波数漏洩が発生するが，同じ有限区間であれば，矩形窓の周波数スペクトルは最小メインローブ幅をもつ。これを直観的に理解するには，任意の窓関数であっても，それと同時間幅の矩形窓との乗算に等しいので，周波数スペクトルの畳み込み積分によって，矩形窓のスペクトルのメインローブ以上の幅になる。したがって，点線スペクトルに対応する時間窓の幅はより広いと考えられる。

- ③リップルはより小さい（サイドローブのピーク値はより低い）

時間領域窓関数の形状によって，スペクトルのサイドローブの具体的な形も様々あるが，時間窓の両端の切り捨てによる不連続点はリップルの要因の一つである。Gibbs 現象によって，スペクトル上の sinc 関数形のリップルであればサイドローブのピーク値は時間関数の不連続点でのジャンプの高さに比例する。ここでの点線スペクトルのサイドローブは明らかに低くなるため，時間窓の両端は矩形窓より低く，不連続ジャンプはより小さいと推測できる。なお，応用上比較的によく用いられている時間窓は，Hanning, Hamming, Blackman, Gauss などが挙げられ，いずれも図 5.10 に示した点線のように，時間幅の中央部が高く，両端が抑えられるようになっている。

【7】 例題 2.3 の図 2.7 に示す  $x_1(t)$  を入力した場合の出力が  $y_1(t)$  となる LTI システムは存在しないことを証明せよ。

【解答】

LTI システムの入出力信号の FT スペクトルと周波数応答関数との関係は

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

と表され、入力信号の FT スペクトルが  $X(\omega) = 0$  となる周波数において、出力信号の FT スペクトルも  $Y(\omega) = 0$  になることは肝要である。

この問題の入力信号  $x_1(t) = p(t/2)$  であり、その FT スペクトルは sinc 関数で  $\omega = \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$  にて 0 となる。一方、出力信号  $y_1(t) = p(t - 0.5) * p(t - 0.5)$  と表せ、FT スペクトルの 0 点は  $p(t - 0.5)$  と同じく  $\omega = \pm2\pi, \pm4\pi, \pm6\pi, \dots$  となる。

すなわち、 $\omega = \pm\pi, \pm3\pi, \pm5\pi, \dots$  にて入力信号の FT スペクトルが 0 であるのに、出力信号の FT スペクトルは 0 ではない。これを実現する LTI システムの周波数応答関数  $H(\omega)$  は存在しない。

なお、時間域の信号を直観的に考えると、LTI システムの入出力信号ともに有限区間である場合、 $y(t) = x(t) * h(t)$  のため、 $h(t)$  は  $\delta$  関数でない限り、出力信号の継続区間は入力信号より広くなることは一般的である。

## 第 6 章

【1】 実数値信号  $x(t)$  と  $y(t)$  の非零値周波数帯域はそれぞれ 0~20 kHz と 50 ~ 80 kHz とする。次の各信号の非零値周波数帯域、およびナイキストレートをそれぞれ示せ。

$$(1) 5x(3t) + 2y(t - 20) \quad (2) x(t)y(t) \quad (3) \frac{d}{dt}y(t)$$

【解答】

(1) 時間信号  $x(t)$  の横軸 1 次変形  $x(at + b)$  は、各周波数成分の周波数の  $|a|$  倍、初期位相の  $\omega b/a$  の変化に相当する。よって、 $x(3t)$  の帯域は 0~60 kHz、 $y(t - 20)$  の帯域は 50~80 kHz となり、 $5x(3t) + 2y(t - 20)$  の帯域はこれらの合成で 0~80 kHz となる。

ナイキストレートはこの領域最大周波数の 2 倍、160 kHz になる。

(2) 時間信号の乗算は周波数スペクトルの畳み込み積分になり、その結果は2つの信号のそれぞれの周波数の和と差の成分が現れる。三角関数の和積の定理や畳み込み積分の区間拡張から理解できる。よって、 $x(t)y(t)$ の帯域は30~100 kHzになり、ナイキストレートは200 kHzとなる。

(3) 時間微分は周波数領域の $j\omega$ 増幅に相当し、各周波数成分に対して $\pi/2$ の位相変化と振幅 $|\omega|$ 倍に相当するが、非零帯域は変化しない。よって、 $\frac{d}{dt}y(t)$ の帯域は50~80 kHz、ナイキストレートは160 kHzとなる。

**【2】** サンプルング間隔0.5 sの信号 $x[n]$ のDTFTスペクトルを $_{DT}X(\omega)$ とする。

(1)  $_{DT}X(\omega)$ の周期を【rad/s】単位で示せ。

(2)  $_{DT}X(3.5\pi)$ が対応する信号の周波数を【Hz】単位で示せ。

**【解答】**

(1) DTFT スペクトルの周期は $\omega_s = 2\pi/T_s$ 、 $T_s = 0.5$  s ので $\omega_s = 4\pi$  rad/s

(2) ナイキスト周波数 $\omega_s/2 = 2\pi$ より超えたので、 $\omega = 3.5\pi - \omega_s = -0.5\pi$  rad/s  
これを周波数 (Hz 単位) に換算、かつ、応用上では周波数を正の数値のみ使う場合が多いため、 $f = \frac{|\omega|}{2\pi} = 0.25$  Hz となる。

**【3】**  $N = 8$ のDT信号 $x[n]$ のDFTスペクトルを $X[m]$ とする。

(1)  $X[m] = \{-1, 0.25, 0.5j, 0, 0, 0, -0.5j, 0.25\}$ の場合 $x[n]$ の実数関数形を示せ。

(2)  $x[n] = (-1)^n$ の場合 $X[m]$ を求めよ。

**【解答】**

(1) DFT は信号とスペクトルともに有限個の数値になるが、関数形が求められる場合では、FS展開に類似し、基底関数の代入が必要となる。式(6.9)より

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{8} \sum_{m=0}^7 X[m] e^{j\frac{\pi}{4}mn} = -\frac{1}{8} + \frac{0.25}{8} (e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{j\frac{\pi}{4}7n}) + \frac{0.5j}{8} (e^{j\frac{\pi}{4}2n} - e^{j\frac{\pi}{4}6n}) \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{16} \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) - \frac{1}{8} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \end{aligned}$$

(2) 信号ベクトルを  $\mathbf{x} = (1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1)^T$ とし、式(6.8')より求め

られる。ここで  $N = 8$  の変換行列は以下となる。

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{\pi}{4}} & -j & e^{-j\frac{3\pi}{4}} & -1 & e^{j\frac{3\pi}{4}} & j & e^{j\frac{\pi}{4}} \\ 1 & -j & -1 & j & 1 & -j & -1 & j \\ 1 & e^{-j\frac{3\pi}{4}} & j & e^{-j\frac{\pi}{4}} & -1 & e^{j\frac{\pi}{4}} & -j & e^{j\frac{3\pi}{4}} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & e^{j\frac{3\pi}{4}} & -j & e^{j\frac{\pi}{4}} & -1 & e^{-j\frac{\pi}{4}} & j & e^{-j\frac{3\pi}{4}} \\ 1 & j & -1 & -j & 1 & j & -1 & -j \\ 1 & e^{j\frac{\pi}{4}} & j & e^{j\frac{3\pi}{4}} & -1 & e^{-j\frac{3\pi}{4}} & -j & e^{-j\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}$$

$W\mathbf{x}$  より、 $X[m] = \{0,0,0,0,8,0,0,0\}$  が求まる。

この問題では  $\mathbf{x}$  は 4 番目の基底関数と同じなので、 $X[4]$  しか非零値を取らない。また、このビンは  $N/2$  であり、DFT スペクトルに表せる最大周波数に相当し、時系列 DT 信号は  $\pm 1$  交互に現れることが理解できる。

- 【4】** サンプルングレート 1 MHz で取得した 2000 点の信号  $x[n]$  に、10 kHz 以上の周波数成分を遮断するように理想 LPF 処理を施すため、 $x[n]$  の DFT スペクトル  $X[m]$  を求め、高周波数成分の  $X[m]$  を 0 にしてから IDFT より所望の信号が得られる。ここで  $X[m]$  を 0 にすべき  $m$  の範囲を示せ。

**【解答】**

DFT スペクトルの周波数分解能は  $f_0 = f_s/N$  ので、1 周波数ビンは 0.5 kHz の周波数に対応する。10 kHz は  $m=10/0.5=20$  となり、 $N/2$  以上の場合での巡回シフトも考慮して、周波数ビンの 20~1000 と  $1000 \sim (2000-20)=1980$  はそれぞれ 10 kHz 以上の正周波数成分と負周波数成分に対応する。よって、遮断すべき  $m$  の範囲は 20~1980 となる。

- 【5】** 独立変数の離散と連続を組み合わせた 4 種類のフーリエ変換 FS, FT, DTFT, DFT は、すべて次式に示す複素回転因子の特性から導かれる。

$$\delta_N[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=m}^{N+m-1} e^{j2\pi\frac{kn}{N}}$$

ここで $\delta_N[n]$ は周期 $N$ の離散インパルス列である。任意関数 $x(\cdot)$ に対し $\delta$ 関数の物差し特性 $x[m] = \sum_n \delta[m-n]x[n]$ に合わせ、次式が得られる。

$$\begin{aligned} x(k\mu) &= x(k\mu + N\mu) \\ &= \sum_{m=-p}^{N-p-1} \left( \sum_{n=-q}^{N-q-1} x(n\mu) e^{-j2\pi\left(\frac{m}{N\mu}\right)(n\mu)\mu} \right) e^{j2\pi\left(\frac{m}{N\mu}\right)(k\mu)} \frac{1}{N\mu} \end{aligned}$$

これは次の変数と極限定義の条件下で式(5.8')と一致することを示せ。

$$\begin{aligned} dt = d\tau := \mu \rightarrow 0, \quad t_{[k]} &:= k \cdot dt, \quad \tau_{[n]} := n \cdot d\tau \\ p = q = N/2 \rightarrow \infty, \quad N\mu &\rightarrow \infty, \quad df := (N\mu)^{-1} \rightarrow 0, \\ f_{[m]} &:= m \cdot df \end{aligned}$$

### 【解答】

本書に紹介した4種類のフーリエ変換は、時間と周波数の離散や連続の扱い方に違いのあるものの、本質的に同じである。離散間隔の無限小極限、及び積分のリーマン和表現によって、連続関数と離散関数を数学的に結びつけることもできる。ここでは、合同整数に基づく複素回転因子特性、式(I)より、フーリエ変換の式変形を確認する。

$$\delta_N[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta[n-lN] = \frac{1}{N} \sum_{k=m}^{N+m-1} e^{j2\pi\frac{kn}{N}} \quad (\text{I})$$

周期 $N$ の任意離散関数 $f[n] = f[n+N]$ において、任意1周期内に対し $\delta$ 関数との畳み込みより、次の関係があり

$$f[k] = \sum_{n=m}^{m+N-1} \delta_N[k-n]f[n]$$

式(I)を代入し、総和の順番を入れ替えると、次式が得られる。

$$f[k] = f[k+N] = \frac{1}{N} \sum_{m=-p}^{N-p-1} \left( \sum_{n=-q}^{N-q-1} f[n] e^{-j2\pi\frac{mn}{N}} \right) e^{j2\pi\frac{mk}{N}}$$

離散関数の独立変数に時間間隔 $\mu$ を導入し、さらに係数変形すると式(II)になる。

$$\begin{aligned} x(k\mu) &= x(k\mu + N\mu) \\ &= \sum_{m=-p}^{N-p-1} \left( \sum_{n=-q}^{N-q-1} x(n\mu) e^{-j2\pi\left(\frac{m}{N\mu}\right)(n\mu)\mu} \right) e^{j2\pi\left(\frac{m}{N\mu}\right)(k\mu)} \frac{1}{N\mu} \quad (\text{II}) \end{aligned}$$

これより、各種のフーリエ変換は、変数の条件定義によってそれぞれ表現できる。一例として、連続フーリエ変換への変形を示す。

変数定義：

$$dt = d\tau := \mu \rightarrow 0, \quad t_{[k]} := k \cdot dt, \quad \tau_{[n]} := n \cdot d\tau$$

$$p = q = \frac{N}{2} \rightarrow \infty, \quad N\mu \rightarrow \infty, \quad df := (N\mu)^{-1} \rightarrow 0, \quad f_{[m]} := m \cdot df$$

よって、式(II)は以下になる。

$$x(t) = x(t + \infty) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(\tau_{[n]}) e^{-j2\pi f_{[m]} \tau_{[n]}} d\tau \right) e^{j2\pi f_{[m]} t} df$$

リーマン和を積分に変形すると、式(5.8')が得られ、()内はCTFTスペクトルである。

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{FT}[x(t)](f) \cdot e^{j2\pi ft} df, \quad \text{FT}[x(t)](f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

## 第7章

- 【1】** 式(7.5)に示す Morlet 変換の $\lambda$ を大きくするとスカログラムの周波数分解能と時間分解能はどのように変化するかを考察せよ。

**【解答】**

Kernel 関数は

$$e^{-\frac{2(\pi f)^2 t^2}{\lambda^2} + j2\pi ft}$$

であり、複素正弦波 $e^{j2\pi ft}$ に振幅包絡 $e^{-\frac{2(\pi f)^2 t^2}{\lambda^2}}$ より構成されている。この包絡は $t$ に対して正規分布 $e^{-(\alpha t)^2}$ の形状となり、 $t$ の係数 $\alpha = \sqrt{2}\pi f/\lambda$ によって横方向伸縮する。 $\lambda$ が大きくなると係数が小さくなり、実質上の横方向の広がりとなるため、周波数分解能が向上し、時間分解能が低下すると考えられる。ここで分解能の向上とは、分解可能な間隔が小さくなることを意味する。

- 【2】** 以下の各ラプラス変換を証明せよ。ただし、 $\mathcal{L}[x(t)](s) = X(s)$ とする。

(1)  $\mathcal{L}[u(t)](s) = 1/s$

$$(2) \mathcal{L}[-t \cdot x(t)u(t)] = \frac{d}{ds} X(s) \quad \text{ヒント : 式(7.8)を利用}$$

$$(3) \mathcal{L}[t^n u(t)](s) = n!/s^{n+1} (n \geq 0) \quad \text{ヒント : (1)と(2)の結果を利用}$$

$$(4) \mathcal{L}[e^{-at} x(t)u(t)](s) = X(s+a) \quad \text{ヒント : 式(7.8)を利用}$$

$$(5) \mathcal{L}[\sin(\omega t) u(t)](s) = \omega/(s^2 + \omega^2) \quad \text{ヒント : (1)と(4)の結果を利用}$$

$$(6) \mathcal{L}[e^{-at} \cos(\omega t) u(t)](s) = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

### 【解答】

(1) 式(7.8)より，次式となる。

$$\mathcal{L}[u(t)](s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \frac{-1}{s} [e^{-st}]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s} (1 - e^{-s \cdot \infty})$$

ここで $e^{-s \cdot \infty}$ は $s$ の値によるが，収束領域の条件を考慮し，収束領域は $s > 0$ であり， $e^{-s \cdot \infty} = 0$ が考えられる。よって， $\mathcal{L}[u(t)](s) = 1/s$

(2) 式(7.8)の両辺に $s$ に対して微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} X(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} x(t) \frac{d}{ds} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} [-t \cdot x(t)] e^{-st} dt \\ &= \mathcal{L}[-t \cdot x(t)u(t)] \end{aligned}$$

(3) 数学的帰納法より証明する。まず， $n = 0$ の場合に

$$\mathcal{L}[t^0 u(t)](s) = \frac{0!}{s^{0+1}} = \frac{1}{s}$$

は，(1)より確認できる。次に $n$ の場合

$$\mathcal{L}[t^n u(t)](s) = n!/s^{n+1}$$

が成立すると仮定し， $n+1$ でも成立することを確認する。

$$\mathcal{L}[t^{n+1} u(t)](s) = \mathcal{L}[t \cdot (t^n u(t))](s)$$

なので，(2)の結果

$$\mathcal{L}[-t \cdot x(t)u(t)] = \frac{d}{ds} X(s)$$

を適用し，以下に証明できる。

$$\mathcal{L}[t^{n+1}u(t)](s) = \mathcal{L}[t \cdot (t^n u(t))](s) = -\frac{d}{ds} \left( \frac{n!}{s^{n+1}} \right) = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}$$

(4) 式(7.8)に  $s$  を  $s+a$  に置き換え、以下が得られる。

$$X(s+a) = \int_0^\infty x(t)e^{-(s+a)t} dt = \int_0^\infty [e^{-at}x(t)]e^{-st} dt = \mathcal{L}[e^{-at}x(t)u(t)]$$

(5)  $\sin(\omega t) = \frac{1}{2j}e^{j\omega t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega t}$  と(4), (1)の結果を利用して

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin(\omega t)u(t)] &= \frac{1}{2j}\mathcal{L}[e^{j\omega t}u(t)] - \frac{1}{2j}\mathcal{L}[e^{-j\omega t}u(t)] = \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

(6)  $\mathcal{L}[\cos(\omega t)u(t)]$  は(5)の方法を使って、次に求まる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos(\omega t)u(t)] &= \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{j\omega t}u(t)] + \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-j\omega t}u(t)] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s+j\omega} + \frac{1}{s-j\omega} \right) \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

さらに(4)より、以下証明できる。

$$\mathcal{L}[e^{-at}\cos(\omega t)u(t)](s) = \mathcal{L}[\cos(\omega t)u(t)](s+a) = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

**【3】** 以下の各  $z$  変換を証明せよ。ただし、 $\mathcal{Z}[x[n]](z) = X(z)$  とする。

$$(1) \mathcal{Z}[u[n]](z) = 1/(1-z^{-1}) \quad (2) \mathcal{Z}[a^{-n}x[n]u[n]] = X(az)$$

$$(3) \mathcal{Z}[\sin(\omega T_s n)u[n]] = \frac{\sin(\omega T_s)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega T_s)z^{-1} + z^{-2}}$$

**【解答】**

(1) 式(7.34)より

$$\mathcal{Z}[u[n]](z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{z^{-\infty} - 1}{z^{-1} - 1}$$

が得られる。ここで収束する条件として、 $|z| > 1$  は収束領域となり、 $z^{-\infty} =$

0より,  $\mathcal{Z}[u[n]](z) = 1/(1 - z^{-1})$

(2) 式(7.34)に $z$ を $az$ として代入し, 以下が確認できる。

$$X(az) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n](az)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-n}x[n])z^{-n} = \mathcal{Z}[a^{-n}x[n]u[n]]$$

(3)  $\sin(\omega T_s n) = \frac{1}{2j}e^{j\omega T_s n} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega T_s n}$ と(1), (2)の結果を利用して, 以下が得られる。

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\sin(\omega T_s n)u[n]] &= \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{1 - (e^{-j\omega T_s}z)^{-1}} - \frac{1}{1 - (e^{j\omega T_s}z)^{-1}} \right) \\ &= \frac{\frac{1}{2j}(e^{j\omega T_s} - e^{-j\omega T_s})z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T_s} + e^{-j\omega T_s})z^{-1} + z^{-2}} = \frac{\sin(\omega T_s)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega T_s)z^{-1} + z^{-2}} \end{aligned}$$

**【4】** LT の時間微分特性を示す式(7.17)と ZT の定義式(7.34)それぞれより, 以下の初期値定理を証明せよ。

$$x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \mathcal{L}[x(t)](s), \quad x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{Z}[x[n]](z)$$

また, 初期値定理を利用して, 十分に高いサンプリングレートの条件下,  $H(s)$ から双一次法より $G_B(z)$ を求める場合,  $g_B[0] \approx h(0)T_s/2$ を証明せよ。

**【解答】**

まず LT の初期値定理について証明する。

式(7.17)の左辺に LT の定義式(7.8)を適用し, 以下となり

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d}{dt} x(t) \right] (s) = \int_0^{\infty} \left( \frac{d}{dt} x(t) \right) e^{-st} dt$$

$\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} = 0$  ( $t > 0$ )のため,  $\frac{d}{dt} x(t)$ が存在する場合に, 以下が確認できる。

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left( \frac{d}{dt} x(t) \right) e^{-st} dt &= \int_0^{\infty} \left( \frac{d}{dt} x(t) \right) 0 dt = 0 \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \mathcal{L}[x(t)](s) - x(0) \end{aligned}$$

よって,  $x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \mathcal{L}[x(t)](s)$ がわかる。ここで,  $\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \mathcal{L}[x(t)](s)$ が存在することを条件とする。

次に ZT の初期値定理について証明する。

$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-n} = 0$  ( $n > 0$ )を定義式(7.34)に適用し、以下が得られる。

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{Z}[x[n]](z) = x[0] + \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[0]$$

双一次変換のスペクトル式(7.45)に示す次式と ZT の初期値定理によって

$$G_B(z) = H\left(\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}\right)$$

$$g_B[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} G_B(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} H\left(\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}\right) = H\left(\frac{2}{T_s}\right) = \frac{T_s}{2} \left(\frac{2}{T_s} H\left(\frac{2}{T_s}\right)\right)$$

が得られ、サンプリングレートが十分に高い場合では $T_s$ が小さくなり

$$\frac{2}{T_s} H\left(\frac{2}{T_s}\right) \approx \lim_{s \rightarrow \infty} sH(s) = h(0)$$

が考えられる。よって、 $g_B[0] \approx h(0)T_s/2$

ここで、双一次変換のインパルス応答はサンプリング間隔のスケールに依存することは、式(7.46)と一致する。また、インパルス不変法の $g_I[0] = h(0)$ なので、 $T_s = 1$ での例題 7.2 に $g_B[0]$ は $g_I[0]$ の約半分になっていることも例示される。

**【5】** ある LTI システムの入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ の関係は以下に示される。

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 6\frac{d}{dt}y(t) + 25y(t) = 4x(t)$$

- (1) このシステムの伝達関数 $H(s)$ とインパルス応答 $h(t)$ を求めよ。
- (2) インパルス不変法より $H(z)$ を求め、DT システムの差分方程式を示し、デジタルフィルタを設計せよ。ただし $T_s = 0.1$ とする。

**【解答】**

(1) まず LT より微分方程式を代数方程式に変換し、 $H(s)$ を求める。

$$s^2Y(s) + 6sY(s) + 13Y(s) = 4X(s) \implies H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{4}{s^2 + 6s + 25}$$

分母が 0 となる  $s$  の根は、 $-3 \pm 4j$ となるため、 $H(s)$ を部分分数分解し

$$H(s) = \frac{-j/2}{s+3-4j} + \frac{j/2}{s+3+4j}$$

式(7.27)よりインパルス応答 $h(t)$ が求まる。

$$h(t) = u(t)e^{-3t} \frac{j}{2} (e^{-j4t} - e^{j4t}) = u(t)e^{-3t} \sin(4t)$$

(2)  $T_s = 0.1$ の場合でのインパルス不変法より，DT インパルス応答は

$$g_I[n] = u[n]e^{-0.3n} \sin(0.4n)$$

となる。この $z$ 変換は

$$\mathcal{Z}[\sin(\omega T_s n) u[n]] = \frac{\sin(\omega T_s) z^{-1}}{1 - 2 \cos(\omega T_s) z^{-1} + z^{-2}}$$

$$\mathcal{Z}[a^{-n} x[n] u[n]] = X(az)$$

を併用して，以下に求まる。

$$\begin{aligned} H(z) = \mathcal{Z}[g_I[n]] &= \frac{\sin(0.4) (e^{0.3} z)^{-1}}{1 - 2 \cos(0.4) (e^{0.3} z)^{-1} + (e^{0.3} z)^{-2}} \\ &= \frac{\sin 0.4 e^{-0.3} z^{-1}}{1 - 2 \cos 0.4 e^{-0.3} z^{-1} + e^{-0.6} z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \end{aligned}$$

上式を変形し

$$Y(z) - 2 \cos 0.4 e^{-0.3} z^{-1} Y(z) + e^{-0.6} z^{-2} Y(z) = \sin 0.4 e^{-0.3} z^{-1} X(z)$$

次の差分方程式，およびデジタルフィルタが得られる。

$$y[n] = \sin 0.4 e^{-0.3} x[n-1] + 2 \cos 0.4 e^{-0.3} y[n-1] - e^{-0.6} y[n-2]$$

