次世代信号情報処理シリーズ　1

Next SIP series

信号・データ処理のための
行列とベクトル

―複素数，線形代数，統計学の基礎―

田中聡久　著

コロナ社

シリーズ刊行のことば

信号処理とは，音声，音響，画像，電波など，連続する数値や連続波形が意味を持つデータを加工する技術です。現代のICT社会・スマート社会は信号処理なしには成り立ちません。スマートフォンやタブレットなどの情報端末はコンピュータ技術と信号処理技術が見事に融合した例ですが，私たちがその存在を意識することがないほど，身の回りに浸透しています。さらには，応用数学や最適化，また統計学を基礎とする機械学習などのさまざまな分野と融合しながらさらに発展しつつあります。

もともと信号処理は回路理論から派生した電気電子工学の一分野でした。抵抗，コンデンサ，コイルを組み合わせると，特定の周波数成分を抑制できるアナログフィルタを構成できます。アナログフィルタ技術は電子回路と融合することで能動フィルタを生み出しました。そしてディジタル回路の発明とともに，フィルタもディジタル化されました。一度サンプリングすれば，任意のフィルタをソフトウェアで構成できるようになったのです。ここに「ディジタル信号処理」が誕生しました。そして，高速フーリエ変換の発明によって，ディジタル信号処理は加速度的に発展・普及することになったのです。

ディジタル技術によって，信号処理は単なる電気電子工学の一分野ではなく，さまざまな工学・科学と融合する境界分野に成長し始めました。フィルタのソフトウェア化は，環境やデータに柔軟に適応できる適応フィルタを生み出しました。信号はバッファリングできるようになり，画像信号はバッチ処理が可能になりました。そして，線形代数や統計学を柔軟に応用することで，テレビやカメラに革命をもたらしました。もともと周波数解析を基とする音声処理技術は，ビッグデータをいち早く取り込み，人工知能の基盤技術となっています。電波伝送の一分野だった通信工学は，通信のディジタル化によって信号処理技術

なしには成り立たないうえ，現代のスマート社会を支えるインフラとなっています。このように，枚挙に暇がないほど，信号処理技術は社会における各方面での基盤となっているだけでなく，さまざまな周辺技術と柔軟に融合し新たなテクノロジーを生み出しつつあります。

また，現代テクノロジーのコアたる信号処理は，電気・電子・情報系における大学カリキュラムでは必要不可欠な科目となっています。しかしながら，大学における信号処理教育はディジタルフィルタの設計に留まり，高度に深化した現代信号処理からはほど遠い内容となっています。一方で，最新の信号処理技術，またその周辺技術を知るには，論文を読んだり，洋書にあたったりする必要があります。さらに，高度に抽象化した現代信号処理は，ときに高等数学をバックグラウンドにしており，技術者は難解な数学を学ぶ必要があります。以上のことが本分野へ参入する壁を高くしているといえましょう。

これがまさに，次世代信号情報処理シリーズ “Next SIP” を刊行するに至ったきっかけです。本シリーズは，従来の伝統的な信号処理の専門書と，先端技術に必要な専門知識の間のギャップを埋めることを目的とし，信号処理分野で先端を走る若手・中堅研究者を執筆陣に揃えています。本シリーズによって，より多くの学生・技術者に信号処理の面白みが伝わり，さらには日本から世界を変えるイノベーションが生まれる助けになれば望外の喜びです。

2019 年 6 月

次世代信号情報処理シリーズ監修　田中聡久

ま　え　が　き

アナログの時代には，信号処理技術の理解には複素関数論が重要でした。しかし，ディジタルの時代には，信号は数ある「データ」の一種にすぎなくなり，これを適切に処理・解析するには，数学の知識がますます重要になってきています。特に，線形代数や統計学は重要で，その理解なしには研究開発が困難になるだけでなく，既存のアルゴリズムの理解や実装も難しいでしょう。本書では，信号処理研究者として長年研究してきた筆者独自の視点で，機械学習や最適化と密接につながっている現代の信号処理を理解するために必要な基礎数学を網羅しました。

一般的に，数学書はとてもレベルが高く，現実の課題に直面している技術者，研究者にとっても難しく感じられます。また個別技術の専門書は，数学の解説が断片的で，知識の点と点がなかなかつながっていきません。本書は，数学書と技術専門書の間を埋めることを目的としています。信号処理技術者や研究者，またこの分野に参入しようとしている大学生や大学院生が，高等学校の数学知識（プラス α）で読めるように配慮してあります。また，一通り大学初年度の数学を学んだものの，数年後に研究や開発で必要となったとき，どのように学び直したらいいのかわからない，という人でも理解しやすいように記述しました。なお，本書では直接触れていませんが，プログラミング言語の Python や MATLAB を意識した表記や構成になっています。

本書の特徴は，複素数から始めることです。通信や音声・音響を扱う場合，一度複素数を介した処理をする必要があります。したがって第 1 章で必要な複素数の知識が得られるようになっています。

第 2 章は，ベクトルの話です。高等学校の数学ではベクトルを平面・空間上の「長さを持った矢印」として習いますが，むしろ数列やプログラミング言語

における配列とみなすべきです。また，単なる数の集まりではなく，連続関数もベクトルとしてみなすことができる点が，線形代数の醍醐味であり，そのことについて理解できるようにしてあります。

第 3 章では行列について，一通りの知識を得られるようになっています。行列に関しては，高等学校で行列を習っていない人にもわかりやすい説明を心がけました。なぜ行列などという演算を考えるのかを明確にするために，ベクトルの線形結合の観点から導入しました。行列を導入することで，連立 1 次方程式の見通しがよりクリアになります。

第 4 章からいよいよ抽象的な数学に突入します。基底と部分空間の概念は信号やデータの背後に存在する構造を理解するのに非常に有用です。特にランクや次元の概念により，信号やデータの見かけの次元と本当の次元を明確に区別することができるようになるのです。

第 5 章では，ベクトルどうしの位置関係を決める内積の概念を導入します。別々のデータの近さを測るための基礎概念を習得します。

第 6 章と第 7 章が本書での最初の山場です。固有値と固有ベクトルから固有値分解を定義できます。そして固有値分解を通じて，矩形行列に特異値分解を導入できます。特異値分解を用いると，連立 1 次方程式の解が一意に決まらない場合，または存在しないような場合にも何らかの「解」を得ることができます。この見通しをクリアにする道具が一般化逆行列と射影行列です。

第 8 章からは，データが不確かな振舞いをする場合について述べます。実際の信号やデータは観測するまでわからないので，何らかの「傾向」があるものとして信号処理アルゴリズムを組み立てる必要があります。その「傾向」が確率と呼ばれるものです。

そして第 9 章で，確率的な対象を処理するための基礎的な方法であるパラメータ推定を学びます。パラメータ推定とは，処理アルゴリズムに特性を調整できるツマミ（パラメータ）をつけて，そのツマミを観測信号やデータから決定する方法のことです。この考え方は，統計学や機械学習と大きな共通点を持っています。

最後の付録には，ベクトルや行列の関数の微分についてまとめました。ベクトルや行列の関数は，信号処理や機械学習では頻出の数学的テクニックです。本書では，トレースと全微分を用いた形式的な求め方について触れました。2 乗誤差を扱う場合，この方法は非常に有用ですが，これについてまとめられている成書は多くないようです。

伝統的な信号処理に必要な数学であるフーリエ解析は，第 1 章で簡単に触れるに留めました。フーリエ解析の成書はすでにたくさん出版されているためです。

本書を執筆するにあたって，多くの方の協力を得ました。特に，新潟大学の村松正吾先生，大阪市立大学の林和則先生，東京工業大学の小野峻佑先生には大変有益なコメントをいただきました。付録のベクトル関数の微分については，林和則先生の助言が大変役に立ちました。図の作成には，筆者の研究室の山本紗有さんに助けてもらいました。筆者には画才がないので，とても助かりました。

2019 年 6 月

田中聡久

目　　　次

1.　複　　素　　数

2.　ベ　ク　ト　ル

3. 行　　　列

4.　基底と部分空間

5.　内積と直交性

6. 固有値分解

7. 特異値分解，一般逆行列

8. 確 率 ベ ク ト ル

9. パラメータの推定

付録：ベクトル・行列関数の微分

1 複　素　数

Next SIP

時系列の信号を扱う場合，複素数は重要な概念です。また，数学を用いる場合も，最初から複素数の範囲で考えておけば，実数のみの議論をする場合もすべて包含できるので，大変便利です。ここでは，高等学校で複素数に触れたことがある程度の知識を前提に，複素数について説明していきます。

1.1 実数，虚数，複素数

実数は，整数や有理数（分母分子が整数で表される数）に加えて，無理数（有理数で表現できない無限小数）を包含した数のことです[†1]。例えば無理数は方程式の解として現れます。例として，$x^2 = 3$ の解は整数や有理数で表現できず，無理数を利用して $x = \pm\sqrt{3}$ となります。

同様にして，$x^2 = -1$ のように2乗して負になるような方程式にも解を導入できたら便利です。この解は形式的には $x = \pm\sqrt{-1}$ となりますが，$\sqrt{\cdot}$ は正の数のみに定義されているため，本来は $\sqrt{-1}$ は存在しません。そこで，2乗すると負になる数を定義し，それを**虚数**（imaginary number）と呼ぶことにします。特に2乗すると -1 になる虚数を**虚数単位**（imaginary unit）と呼び，i で表します[†2]。そうすると，$x^2 = -2$ の解は，$x = \pm i\sqrt{2}$ と表現できます。

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ の解は，$b^2 - 4ac > 0$ のとき

---

†1　実数の正確な定義は数学書を見てください。

†2　電気工学では i ではなく，j が広く使われます。電流の記号に i を用いるためです。

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

です。しかし，$b^2 - 4ac < 0$ となる場合にも，虚数を導入することで必ず解を持つことになります。例えば，$x^2 + 2x + 3 = 0$ の解は，$x = -1 \pm i\sqrt{2}$ となることが，上の公式からわかります。このように，a，b を実数としたとき

$$z = a + ib$$

で表現できる数のことを**複素数**（complex number）と呼びます。複素数の集合を $\mathbb{C}$ と表記します。「z は複素数である」を，集合論の記号を使って $z \in \mathbb{C}$ と表記します。虚数と複素数を混同する人をよく見かけますが，あくまでも虚数は ib のことであり，$a + ib$ は虚数ではなく複素数です。a のことを**実数成分**（real component），b のことを**虚数成分**（imaginary component）と呼びます。

また，複素数 z の実数成分を $\mathrm{Re}[z]$，虚数成分を $\mathrm{Im}[z]$ と書く場合もあります。つまり，$z = a + ib$ に対しては，$\mathrm{Re}[z] = a$，$\mathrm{Im}[z] = b$ です。

このように便宜的に導入した複素数ですが，数学をとても豊かなものにし，関数論という大きな分野が生まれました。ただし本書では深入りせず，必要な知識だけ扱っていきます。特に，音や株価，気象変動や脳波のような時系列信号を扱う場合，複素数を用いることで，解析の幅が大きく広がります。

1.2 複素数の演算

複素数には，加算，乗算，除算が定義されます。

1.2.1 共　役

それらについて見る前に，まず複素数特有の演算である共役について述べます。複素数 $z = a + ib$ に対して，共役 $\bar{z}$ とは虚数の符号を反転させる操作のことで，具体的には

$$\bar{z} = a - ib$$

と定義されます。本によっては，共役を z^* と表記する場合もあります。

実数の共役は，もとの実数そのものです。つまり実数 a に対しては $\bar{a} = a$ が成り立ちます。

1.2.2 複素数の加算

二つの複素数 $z_1 = a_1 + ib_1$，$z_2 = a_2 + ib_2$ に対して，その和は

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

と定義されます。

複素数とその共役の和は，必ず実数になります。複素数 $z = a + ib$ に対して

$$z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a$$

です。一方，複素数とその共役の差は，次式のように必ず虚数になります。

$$z - \bar{z} = (a + ib) - (a - ib) = i2b$$

したがって，実数成分を取り出すには

$$\mathrm{Re}[z] = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

とし，虚数成分を取り出すには

$$\mathrm{Im}[z] = \frac{z - \bar{z}}{i2}$$

とすればよいことがわかります。

1.2.3 複素数の乗算

乗算は，つぎのように自然に決まります。

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \\ &= a_1 a_2 + a_1(ib_2) + (ib_1)a_2 + (ib_1)(ib_2) \end{aligned}$$

$$= a_1a_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1) + i^2b_1b_2$$
$$= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

複素数とその共役の積は，必ず実数になります。複素数 $z = a + ib$ に対して

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - iab + iba - i^2b^2 = a^2 + b^2$$

となります。特に，$\sqrt{z\bar{z}}$ を z の**絶対値**（absolute value または modulus）または**振幅**（amplitude）と呼び $|z|$ と表記します。すなわち

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{1.1}$$

です。本書では，特に断りのない限り，$|z|$ を z の振幅と呼ぶことにします。信号処理分野では振幅が一般的だからです。

1.2.4　複素数の有理化と除算

有理化とは，虚数単位をすべて分子に集める操作で，分母分子に，分母の共役を乗じる操作です。すなわち，$z = a + ib$ に対して

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{1}{a^2 + b^2}(a - ib)$$

となります。

除算 $\dfrac{z_1}{z_2}$ は，z_1 に z_2 の逆数 $\dfrac{1}{z_2}$ を乗じたものと考えればよく

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} = z_1\frac{1}{z_2} &= (a_1 + ib_1)\frac{a_2 - ib_2}{a_2^2 + b_2^2}\\ &= \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{a_2^2 + b_2^2}\\ &= \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + i(b_1a_2 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}\end{aligned}$$

となります。

1.3　複素数平面と極座標表示

1.3.1　複 素 数 平 面

実数を図示するときは，数直線を使いました。同様にして，実数には横軸の数直線，虚数に対しては縦軸の数直線を導入することで，複素数を平面上の一点として考えることができます（**図 1.1**）。この横軸を特に**実軸**（real axis），縦軸を特に**虚軸**（imaginary axis）と呼びます。

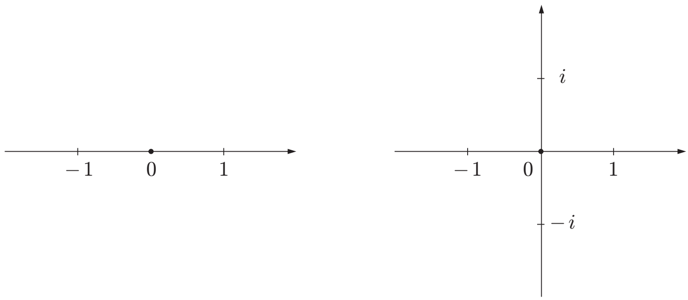

図 1.1　実数の数直線を複素数に拡張すると平面になる

図 1.2 は，二つの複素数 $2+i$ と $-1-i3$ を図示した例です。表示の方法には 2 種類あります。左図は，複素数を点で表す方法，右図は，矢印で表す方法

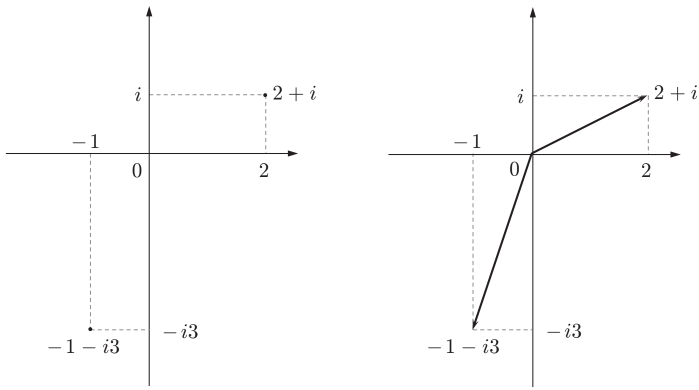

図 1.2　複素数平面上における $2+i$ と $-1-i3$

索　　引

—— 著 者 略 歴 ——

1997年　東京工業大学工学部電気・電子工学科卒業
2000年　東京工業大学大学院理工学研究科修士課程修了
2002年　東京工業大学大学院理工学研究科博士後期課程修了
　　　　博士（工学）
2002年　理化学研究所脳科学総合研究センター研究員
2004年　東京農工大学講師
2006年　東京農工大学助教授
2007年　東京農工大学准教授
2018年　東京農工大学教授
　　　　現在に至る

信号・データ処理のための行列とベクトル
—複素数，線形代数，統計学の基礎—
Matrices and Vectors for Signal and Data Processing
—Fundamentals of Complex Numbers, Linear Algebra and Statistics—

2019 年 8 月 5 日　初版第 1 刷発行

検印省略	著　　者	田　中　聡　久
	発 行 者	株式会社　コ ロ ナ 社
		代 表 者　牛 来 真 也
	印 刷 所	三 美 印 刷 株 式 会 社
	製 本 所	有限会社　愛 千 製 本 所

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発 行 所　株式会社　コ ロ ナ 社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ　http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–01401–3　C3355　Printed in Japan　　（齋藤）