改訂 微積分学入門

下田　保博
伊藤　真吾　共著

コロナ社

改訂版にあたって

2009 年の初版から 8 年を経て，現行学習指導要領で学んできた学生が増え，学生の基礎知識の多様化が顕著になってきた．さらに，授業カリキュラムも初版時の週 1 コマ（通年で 25 コマ程度）が通年で 30 コマに増加したことを受け，記述の手直しや現行学習指導要領に即した内容の改変の必要性を感じ，ここに改訂版の作成を行うことに至った．

改訂にあたって，新たに北里大学一般教育部の伊藤真吾教授に共同での著作をお願いした．伊藤教授には，新たに設けた第 1 章，第 7 章の執筆と，初版時での字句の誤植や定義や定理などにおける文章表現の不適切な箇所をご指導いただき，あわせて学生のニーズにあった適切な図や表を作成していただいた．また，打合せを重ねて，改訂版の完成を目指した．

今回の改訂版では，高等学校で学んだ関数の定義や基本的な性質，および初等関数（三角関数，指数関数，対数関数）の性質などを最初の章にまとめて，第 2 章以降で必要とされる基礎知識の修得を徹底することにした．さらに，初版時での逆三角関数の項を積分の章から第 1 章へと移し，学生が逆三角関数の扱いに早急に慣れることを目指した．

さらに，付録の箇所から二重積分と累次積分の項を第 7 章として独立の章にし，二重積分の基本概念を修得させることにした．

以前の『微積分学入門』を実際に教科書として利用していただいた，北里大学の先生方からのご意見やご指摘を参考にして，今回の改訂版を作成することとなった．ご意見をいただいた先生方に深く感謝する次第である．より良い本にするために，今後も多くの方からご意見をお寄せいただければ幸いである．

2018 年 1 月

著者しるす

初版のまえがき

本書は，水産系や医療系など，数学を専門に学ばない学部での授業カリキュラムに即した微分積分学を扱っている．いままでの教科書に見られるような 1 年では終わらない内容ではなく，スリム化を図った．週に 1 コマ (通年で 25 コマ) 程度の授業カリキュラムを想定した分量となっている．

そのため，基礎的な内容については本書で必要になる最小限の説明のみにとどめている．例えば，初等関数（三角関数，指数関数，対数関数）の性質などについては詳しい説明を省き，簡潔な説明にとどめた．したがって，読者は必要ならば，高校の教科書等を参照しながら問題等に取り組んでほしい．

さて，高校までの教育の変化に伴い，学生の履修内容も二極化している．本書は，高校で数学 II までは履修したが数学 III は初めて学ぶ読者に対して，自分で学習できるやさしい自習書であるように工夫したつもりである．数学 III をすでに学習済みの学生に対しては，授業の内容に関連して発展的に学習できる数学の話題を付録に掲載した．ここでは本文で扱えなかった重積分にも言及している．

第 1 章では，多項式の微分を基本として微分の公式を考えることにし，その知識の積み重ねとして初等関数の微分を考えることとした．微分公式を繰返し用いることで，公式の理解の徹底を図った．

第 2 章では，微分の応用としてロピタルの定理と関数のべき級数展開を入門程度に述べることとした．

第 3，4 章では，積分の基本知識とその応用としての面積，体積の求め方に言及した．

第 5 章では，2 変数関数の微分である偏微分に関する定義や基本的性質について述べている．

最後に，万全を期したつもりだが，不完全な箇所が多々あると思われる．読者の皆様のご意見などをいただければと思っている．また，本書の刊行に当り，原稿のチェックなどを懇切丁寧にご指導いただいた北里大学の大橋常道氏，谷口哲也氏，コロナ社の皆様には心から感謝の意を表したい．

2009 年 2 月

下田　保博

目　　次

1.　いろいろな関数

1.1　関数とそのグラフ …… 1
1.2　べ　き　関　数 …… 3
1.3　分　数　関　数 …… 5
1.4　無　理　関　数 …… 6
1.5　逆　　関　　数 …… 7
1.6　三　角　関　数 …… 10
　1.6.1　一　　般　　角 …… 10
　1.6.2　弧　　度　　法 …… 10
　1.6.3　一般角の三角関数 …… 11
　1.6.4　三角関数の性質 …… 11
　1.6.5　三角関数のグラフ …… 12
　1.6.6　加法定理とその派生公式 …… 14
1.7　指　数　関　数 …… 17
　1.7.1　指数の拡張と指数法則 …… 17
　1.7.2　指数関数とそのグラフ …… 18
1.8　対　数　関　数 …… 19
　1.8.1　対数の定義と性質 …… 19
　1.8.2　対数関数とそのグラフ …… 20
1.9　逆 三 角 関 数 …… 21

2. 微 分

2.1 関数の極限 …… 24
2.2 連続関数 …… 30
2.3 微分係数と導関数 …… 32
2.4 曲線の接線と法線 …… 36
2.5 積の微分公式 …… 37
2.6 商の微分公式 …… 39
2.7 合成関数の微分公式 …… 42
2.8 その他の微分公式 …… 44
2.9 三角関数の微分 …… 47
2.10 指数関数の微分 …… 52
2.11 対数関数の微分 …… 56

3. 微分の応用

3.1 対数微分法 …… 59
3.2 高次導関数 …… 62
3.3 ライプニッツの公式 …… 67
3.4 ロールの定理 …… 68
3.5 平均値の定理 …… 70
3.6 ロピタルの定理 …… 73
3.7 関数の増減と極値・凹凸 …… 78
3.8 曲線のグラフ …… 83
3.9 テイラーの定理 …… 84
3.10 べき級数展開 …… 88

4. 不 定 積 分

4.1 原始関数と基本的な公式 …… 92
4.2 初等関数の不定積分 …… 94
4.3 置 換 積 分 …… 96
4.4 部 分 積 分 …… 98
4.5 有理式の積分 …… 102
4.6 三角関数の分数式の積分 …… 106
4.7 逆三角関数の不定積分 …… 108

5. 定積分とその応用

5.1 定積分の定義とその基本的性質 …… 110
5.2 定積分における置換積分 …… 114
5.3 定積分における部分積分 …… 117
5.4 漸化式による定積分 …… 119
5.5 図形の面積 …… 122
5.6 回転体の体積 …… 127
5.7 広義の積分 …… 129

6. 偏 微 分

6.1 2変数関数 …… 133
6.2 偏導関数 …… 136
6.3 全 微 分 …… 140
6.4 2階の偏導関数 …… 141

6.5 合成関数の偏微分 …… 143
6.6 陰 関 数 定 理 …… 146
6.7 2 変数関数の極値 …… 149

7. 二 重 積 分

7.1 二重積分の定義と性質 …… 156
7.2 累 次 積 分 …… 159

付 録 …… 163
A.1 双 曲 線 関 数 …… 163
A.2 2 変数関数のテイラー展開 …… 167
A.3 条 件 つ き 極 値 …… 169
A.4 関数行列式と変数変換 …… 170
引用・参考文献 …… 175
問 題 の 答 …… 176
索 引 …… 194

1 いろいろな関数

1.1 関数とそのグラフ

2 つの変数 x と y について，x の値に応じて y の値がただ 1 つ決まるとき，y は x の**関数**であるといい，$y = f(x)$，$y = g(x)$ などと表す．関数 $y = f(x)$ において，$x = a$ に対応する y の値を $f(a)$ と表し，$x = a$ における関数 $f(x)$ の**値**という．また，x がとり得る値の範囲を $f(x)$ の**定義域**，y のとり得る値の範囲を $f(x)$ の**値域**という．定義域がかかれていない場合は，$f(x)$ の値が存在するような x の値全体を定義域と考える．

定義域や値域を表す際は，つぎの**区間**の記号を用いることもある．$a < b$ を満たす実数 a, b に対して，区間 $a \leqq x \leqq b$ を $[a, b]$ と書いて，**有限閉区間**と呼び，区間 $a < x < b$ を (a, b) と書いて**有限開区間**と呼ぶ（**図 1.1**）．また，区間 $a \leqq x < b$，$a < x \leqq b$ をそれぞれ $[a, b)$，$(a, b]$ と表す．さらに，区間 $a < x$，$a \leqq x$，$x < b$，$x \leqq b$ をそれぞれ (a, ∞)，$[a, \infty)$，$(-\infty, b)$，$(-\infty, b]$ と表し，実数全体は $(-\infty, \infty)$ と表す．

xy 平面内の点 P は**図 1.2** のように，実数 a, b の組 (a, b) で表すことができ

(i)　有限閉区間 $[a, b]$　　(ii)　有限開区間 (a, b)

図 1.1　区　間

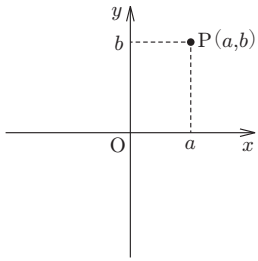

図 1.2　点 P の座標

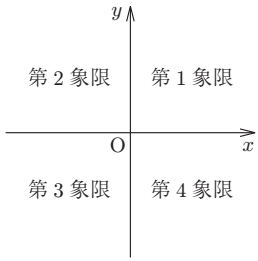

図 1.3　象　限

る．この組 (a, b) を点 P の**座標**という．座標平面は，座標軸によって 4 つの部分に分けられる．その各部分を**図 1.3** のように**第 1 象限**，**第 2 象限**，**第 3 象限**，**第 4 象限**と定める．また，関数 $y = f(x)$ において，定義域内の x に対し $(x, f(x))$ を座標とする点全体からなる図形を関数 $y = f(x)$ の**グラフ**という．

注意：有限開区間と座標は同じ記号だが，文脈を考えれば誤解のおそれはないであろう．

定数 c に対して，関数 $y = c$ のグラフは点 $(0, c)$ を通り，x 軸に平行な直線である．このような関数を**定数関数**という．また，定数 a, b に対して，関数 $y = ax + b$ のグラフは傾きが a，y 切片が b の直線である．このような関数を 1 次関数という．

問　題　1.1

問 1.　つぎの関数の（　）内の定義域に対する値域を求めよ．

(1)　$y = 3x + 5$　$(-1 \leqq x \leqq 5)$　　(2)　$y = x^2 + 1$　$(-3 \leqq x \leqq 1)$

問 2.　つぎの関数のグラフをかけ．

(1)　$y = \begin{cases} 0 & (x \leqq 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$　　(2)　$y = |x|$　　(3)　$y = |x - 1|$

注意：実数 a に対して，$a \geqq 0$ ならば a そのものを，$a < 0$ ならば $-a$ を a の**絶対値**といい，$|a|$ で表す．

1.2 べ き 関 数

自然数 n に対して $y = x^n$ の形で表される関数を**べき関数**という．特に，$y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$ のグラフは，それぞれ**図 1.4**，**図 1.5**，**図 1.6** のようになる．いずれも基本的な関数なので，その概形を覚えておこう．

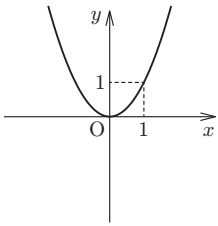

図 1.4 $y = x^2$

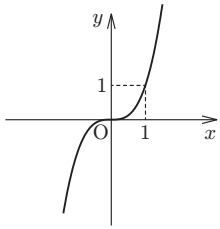

図 1.5 $y = x^3$

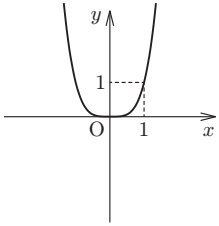

図 1.6 $y = x^4$

関数のグラフをある方向へ一定の長さだけずらすことをグラフの**平行移動**という．関数 $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したグラフを表す関数は $y - q = f(x - p)$ である．

例 1.1

(1) $y = (x-2)^2$ のグラフは，$y = x^2$ のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動したグラフである（**図 1.7**）．

(2) $y - 2 = (x-1)^3$ のグラフは，$y = x^3$ のグラフを x 軸方向に 1，y 軸方向に 2 だけ平行移動したグラフである（**図 1.8**）．

(3) $y + 4 = (x-3)^4$ のグラフは，$y = x^4$ のグラフを x 軸方向に 3，y 軸方向に -4 だけ平行移動したグラフである（**図 1.9**）．

一般に，関数 $y = f(x)$ において，定義域内のすべての x に対して $f(-x) = f(x)$ が成り立つとき，$f(x)$ を**偶関数**という．また，定義域内のすべての x に対して $f(-x) = -f(x)$ が成り立つとき，$f(x)$ を**奇関数**という．$y = x^2$，$y = x^4$ は偶関数，$y = x^3$ は奇関数である．偶関数のグラフは y 軸に関して対称であり，

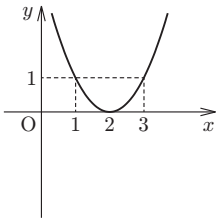

図 **1.7**　$y=(x-2)^2$

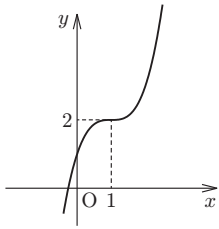

図 **1.8**　$y-2=(x-1)^3$

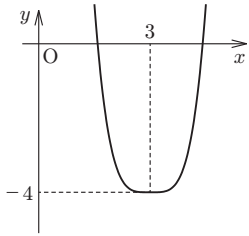

図 **1.9**　$y+4=(x-3)^4$

奇関数のグラフは原点に関して対称である．

例題 1.1　つぎの関数について，奇関数または偶関数かどうかを調べよ．

(1)　$f(x)=x^4-5x^2$　　(2)　$g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

(3)　$h(x)=x^3-x^2$

【解答】　(1)　$f(-x)=(-x)^4-5(-x)^2=x^4-5x^2=f(x)$ より，$f(x)$ は偶関数である．

(2)　$g(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2+1}=-\dfrac{x}{x^2+1}=-g(x)$ より，$g(x)$ は奇関数である．

(3)　$h(-x)=(-x)^3-(-x)^2=-x^3-x^2$ であり，これは $h(x)$ でも $-h(x)$ でもないので，$h(x)$ は偶関数，奇関数のどちらでもない．　◇

関数 $y=f(x)$ が，区間 I 内の任意の実数 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ に対して，つねに $f(x_1)<f(x_2)$ を満たすとき，$f(x)$ は区間 I で**単調増加**の関数といい，つねに $f(x_1)>f(x_2)$ を満たすとき，$f(x)$ は区間 I で**単調減少**の関数という．例えば，$y=x^2$ は区間 $(-\infty,0]$ で単調減少，区間 $[0,\infty)$ で単調増加である．また，$y=x^3$ は実数全体 $(-\infty,\infty)$ で単調増加である．

問　題　1.2

問 1.　つぎの関数のグラフをかけ．

(1)　$y=x^2-2x+4$　　(2)　$y=x^3+3x^2+3x+1$

(3)　$y=(x-1)(x+1)(x^2+1)$

問 2.　$y=3x^2-4$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したグラフの方程式

が $y = 3x^2 - 12x + 7$ であるとき，p，q の値を求めよ．

問 3. 2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ について，つぎが成り立つことを示せ．

(1) $f(x)$，$g(x)$ が共に偶関数または共に奇関数ならば，積 $f(x)g(x)$ は偶関数である．

(2) $f(x)$，$g(x)$ のいずれか 1 つが奇関数，他方が偶関数ならば積 $f(x)g(x)$ は奇関数である．

1.3 分　数　関　数

$y = \dfrac{1}{x}$，$y = \dfrac{3x+2}{x-4}$ のように，x について分数式で表された関数を x の**分数関数**という．特に断りがない場合，分数関数の定義域は分母を 0 にしないすべての実数である．

k を 0 でない定数とするとき，反比例を表す分数関数 $y = \dfrac{k}{x}$ は奇関数なので，グラフは原点について対称であり，**図 1.10**，**図 1.11** のようになる．

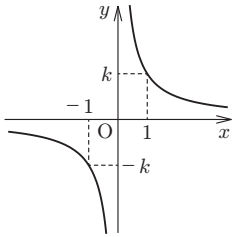

図 1.10　$y = \dfrac{k}{x}$ のグラフ $(k > 0)$

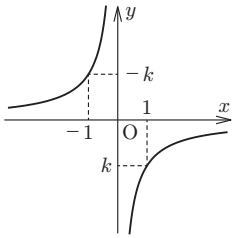

図 1.11　$y = \dfrac{k}{x}$ のグラフ $(k < 0)$

関数 $y = f(x)$ 上の点 P が原点から限りなく遠ざかるほどに，P とある直線 l との距離が限りなく 0 に近づくとき，この直線 l を $y = f(x)$ の**漸近線**という．関数 $y = \dfrac{k}{x}$ の漸近線は直線 $x = 0$ と $y = 0$ である．

一般に，分数関数 $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0)$ は $y = \dfrac{k}{x-p} + q$ の形に変形することができる．これは，$y = \dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものなので，つぎのようにして $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ のグラフを書くことができる．

索　　引

【あ】

アークコサインエックス　21
アークサインエックス　21
アークタンジェントエックス　22
値　1

【い】

1 次の近似式　72
1 ラジアン　10
一般角　10
陰関数　146
　——の接線の方程式　147
陰関数定理　147

【う】

上に凸　80

【お】

オイラーの公式　91

【か】

下　端　110
加法定理　14
関　数　1
関数行列式　171

【き】

奇関数　3
逆関数　8
　——の微分　44
逆三角関数　22
逆双曲線関数　165
極限値　24, 26, 135
極小値　78, 149
極大値　78, 149
極　値　79, 149
　——の判定　153
近似式　72

【く】

偶関数　3
区　間　1
グラフ　2

【け】

原始関数　92

【こ】

広義の積分　130
高次導関数　62
合成関数　42
　——の微分　42
合成公式　16
恒等式　84
コーシーの平均値の定理　72
コセカント　11
コタンジェント　11
弧度法　10

【さ】

最大値・最小値の定理　31
座　標　2
三角関数　11
3　次
　——の近似式　87
　——の導関数　62
3 倍角の公式　15

【し】

指　数　17
指数関数　18
指数法則　18
始　線　10
自然対数　55
下に凸　80
周　期　13
周期関数　12
収　束　24
条件つき極値問題　169
上　端　110
商の微分　39
初等関数の不定積分　94
真　数　19

【せ】

正の無限大に発散する　25
セカント　11
積
　——の微分　38
　——を和に直す公式　15
積分区間　110
積分する　93
積分定数　93
積分の平均値の定理　126
接　線　33
　——の方程式　36
絶対値　2
接平面　138
漸近線　5
全微分　140
全微分可能　140

【そ】

双曲線関数　163
増減表　80

【た】

第 1 象限　2
第 3 象限　2
対　数　19
対数関数　20
対数微分の公式　57

対数微分法 59
対数法則 20
第 2 象限 2
第 4 象限 2
単位円 11
単調減少 4
単調増加 4

【ち】

値　域 1
置換積分 96
中間値の定理 31
調和関数 142

【て】

底 18, 20
　——の変換公式 20
定義域 1, 133
定数関数 2
定積分 110
　——における置換積分 114
テイラー展開 88
テイラーの定理 85
停留点 151

【と】

導関数 33
動　径 10

【に】

2 階の偏導関数 141
2　次
　——の近似式 87
　——の導関数 62
　——の偏導関数 141
二重積分 157
2 倍角の公式 14
2 変数関数 133
　——のテイラー展開 168
　——のマクローリン展開 168

【ね】

ネピアの数 53

【は】

パラメーター表示 46
半角の公式 15

【ひ】

被積分関数 93
左側極限 28
微分可能 32
微分記号 43
微分係数 32
微分する 34

【ふ】

不定形 27, 74, 76
不定積分 93
負の無限大に発散する 25
部分積分 98
部分分数分解 103
分数関数 5
分数式 102

【へ】

平均値の定理 70
平均変化率 32
平行移動 3
べき関数 3
べき級数 88
変曲点 81
偏導関数 136
偏微分可能 137
偏微分係数 136
偏微分する 137

【ほ】

法　線 36
　——の方程式 36

【ま】

マクローリン展開 89
マクローリンの定理 86

【み】

右側極限 28

【む】

無理関数 6

【や】

ヤコビアン 171

【ゆ】

有限開区間 1
有限閉区間 1

【ら】

ライプニッツの公式 67
ラグランジュの乗数 169
ラジアン 10
ラプラス方程式 142

【る】

累次積分 160
累　乗 17
累乗根 17

【れ】

連　続 30, 135
連続関数 30, 135

【ろ】

ロールの定理 68
ロピタルの定理 74

【わ】

和を積に直す公式 16

【K】

k 次の近似式 87

【N】

n 次の導関数 62
n 乗根 17

—— 著 者 略 歴 ——

下田　保博（しもだ　やすひろ）
1975年　東京都立大学理学部数学科卒業
1977年　東京都立大学大学院修士課程修了（数学専攻）
1981年　東京都立大学大学院博士課程修了（数学専攻）
　　理学博士
1990年　北里大学専任講師
1996年　北里大学助教授
2008年　北里大学教授
2016年　北里大学退職
　　明治大学非常勤講師
　　現在に至る

伊藤　真吾（いとう　しんご）
2001年　東京理科大学理学部第一部数学科卒業
2004年　東京理科大学大学院修士課程修了（数学専攻）
2009年　東京理科大学大学院博士課程修了（数学専攻）
　　博士（理学）
2009年　東京理科大学助教
2013年　北里大学准教授
2016年　北里大学教授
　　現在に至る

改訂　**微積分学入門**
An Introduction to Calculus (Second Edition)

2009 年 4 月 13 日　初　版第 1 刷発行　★
2017 年 2 月 10 日　初　版第 6 刷発行
2018 年 2 月 28 日　改訂版第 1 刷発行

検印省略

著　　者　下　田　保　博
　　伊　藤　真　吾
発 行 者　株式会社　コ ロ ナ 社
　　代 表 者　牛 来 真 也
印 刷 所　三 美 印 刷 株 式 会 社
製 本 所　有限会社　愛 千 製 本 所

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発 行 所　株式会社　**コ ロ ナ 社**
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ　http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–06115–4　C3041　Printed in Japan　（横尾）