

実用モード解析入門

博士（工学） 長松 昌男
工学博士 長松 昭男 共著

コロナ社

まえがき

著者の一人が本「モード解析入門」を執筆した1900年初頭には、欧米発のモード解析理論を我が国の自動車会社がいち早く導入し巧みに活用して、振動・音響性能が世界一優れた車を製造していた。それから四半世紀後の現在、モード解析は各種機械の製造業界全体に広がり、ものづくりに携わるすべての技術者に必須の基盤実用技術として、広く定着している。著者らは、この間の変遷を考慮して機械の製品開発におけるモード解析技術の立ち位置を見直した結果、本「モード解析入門」の続編として、実用性をさらに重視した本書を発行するに至った。

本書は、下記の点に留意して執筆されている。

① 分かりやすい。

振動や数学を知らない初心者が気軽に読んでいだけで、内容を容易に理解・習得できる。

② すぐに役立つ。

現場での実用を常に意識しながら学術の基本を論じる。また、振動試験の技術・技能や実験中に生じる様々な誤差の原因と対処方法など、他の専門書からは得られない実験知識・ノウハウ・留意点を詳細に説明する。

③ なぜ?から始める。

現象の物理学的理解の基本に戻り、How to? からではなく Why? から始める。これによってモード解析を、記憶の学問から納得の学問に変える。

④ 数学に頼らない。

“初めに数式あり”では、正常な初心者はアレルギーを発症し力学や振動が嫌いになる。そこで、物理現象の理解を数式展開に常に優先させる。またすべての数学表現には、それを導く理論的根拠を示し、頭ごなしに数式を突き付けることを避ける。高度な数学を極力廃し、最小限必要な数学は、高校卒業者が容易に理解できる程度に、初歩から徹底的に分かりやすく記述する(補章A)。やむを得ず用いる複雑な数式記述は、本章から分離して詳細に説明する(補章B)。

⑤ 多様なニーズに対応できる。

本書は、基本的には“0から学ぶ入門書”であるが、初心者・専門外技術者から先進者まで、また学生・設計担当者・CAE技術者・実験担当者・現場技能者・先端研究者等、多種多様な方々のニーズに対応できるように執筆されている。

力学の素養を得たい方・振動学を基礎から学びたい初心者・専門外技術者は第2章を読みたい。モード解析の基本を知りたい方は第3章を読みたい。振動・音響関連の実験技術者・技能者は第4章と第5章を読みたい。工学に必要な基礎数学を初歩から習得したい方は補章Aを読みたい。モード解析の理論を精確に理解したい方は補章Bを読みたい。自励振動の初歩を知りたい方は補章Cを読みたい。力学・振動学の研究者・先端技術者は、補章DとEを読みたい。

以下に、本書の概要を述べる。

第2章“1自由度系”では、なぜ振動するか・自由振動がなぜ固有振動数で生じるか・共振とは・共振点で位相が変る理由・周波数応答関数とは・などの物理現象を平易に説明する。また、力・運動ではなくそれらの根幹を支えるエネルギーを基軸にした力学への入口を紹介し、それを用いれば振動を従来よりも明解に説明できることを示す。

第3章“多自由度系”では、固有モードとは何か、固有モードの直交性の物理学的意味は、モード質量・モード剛性・モード減衰とは・モード座標の理論的根拠と実用上の利点など、モード解析の理解に必要な基礎知識を詳しく説明する。

第4章“信号処理”では、フーリエ変換の理論と技術、振動実験で発生する誤差の原因と防止・対策方法、コヒーレンスの意味と使い方などを説明する。

第5章“振動試験”では、実験モード解析のための振動試験に必要な様々な実用知識・現場技術・方法・留意点・注意事項・ノウハウを記述する。

補章 A “数学基礎”では、三角関数・複素指数関数・ベクトル・行列・固有値・直交性・相関・最小自乗法など、機械力学に最小限必要な数学基礎を、初歩から徹底的に分かりやすく説明する。本補章は、工学数学の素養を得たい方・昔勉強した数学を忘れた方・モード解析を数学的に理解したい方のための補章である。

補章 B “さらなる学習へ”では、数学的に高度・複雑な部分を本章から分離して説明する。振動学の理論を精確に学習したい方のための補章である。

補章 C “自励振動”では、自励振動の正体・発生原因・解析方法の初歩を解説する。

補章 D “力学の再構成”では、固体・熱・流体・電気・化学などの複合物理領域間を縦横・自在に変身・横断するエネルギー変換を統合する昨今の CAE ものづくりのニーズに応えるために、機械工学にしか通用しない力と運動からなる在来力学を再構成し、物理学の全領域を統合する唯一の物理量であるエネルギーを直接表に出した新しい力学理論を提唱する⁸⁾⁻¹¹⁾。

補章 E “粘性の正体”では、機械力学において重要な役割を担うにもかかわらず従来不明であった粘性の正体を、物理学の立場から新しく解き明かす⁹⁾。まず、弾性と粘性が共に、力学ポテンシャル場が発現するエネルギー現象であることを説明する。次に、粘性の発生メカニズム・力学エネルギーの熱への変換・散逸のからくり・粘性が速度に比例する抵抗力を出す理由を、原子論の立場から説明する。また、同じ物質が温度により固体・液体・気体に変身する理由、および融解・凍結・蒸発の物性変化のからくりを、新しく明らかにする。

本書執筆にあたり、著者が長年師事し様々なご指導いただいた、鈴木浩平首都大学東京名誉教授と吉村卓也同大学教授に対し、心から感謝申し上げます。また本書は、モード解析を実用し、振動・音響関連のコンサルティング・技術指導・受託実験・実験モード解析用 FFT 装置と CAE の製作・販売を長年行ってきたキャテック株式会社の全面的な技術支援の下に著されている。数多くのご教示・ご助力をいただいた当社の天津成美氏・角田鎮男工学博士・西留千晶博士（工学）・岩原光男工学博士に対し、心から感謝申し上げます。

目 次

第1章 初 め に

1.1 振 動 と は.....	1
1.2 振動が大切な理由.....	2
1.2.1 振 動 と 私 達 2	
1.2.2 金 属 疲 労 2	
1.2.3 今なぜ振動か 3	
1.3 振 動 の 種 類.....	4
1.3.1 自 由 振 動 4	
1.3.2 強 制 振 動 5	
1.3.3 振動中のエネルギー流れ 6	
1.3.4 複 雑 な 振 動 8	
1.4 加 振 の 種 類.....	8
1.4.1 力 加 振 8	
1.4.2 速 度 加 振 9	
1.5 動力学におけるモデル化.....	9
1.6 今なぜモード解析か.....	11
1.7 単 位.....	14
1.8 力学と数学.....	14
1.8.1 力学から観る振動 14	
1.8.2 数学から観る振動 15	

第2章 1 自由 度 系

2.1 なぜ振動するか.....	17
2.1.1 力と運動からの考察 17	
2.1.2 エネルギーからの考察 22	
2.2 不減衰系の自由振動.....	29
2.2.1 振動の数式表現 29	
2.2.2 固 有 振 動 数 32	
2.2.3 振動の解と図示 33	
2.2.4 力学エネルギー 35	
2.3 粘性減衰系の自由運動.....	37
2.3.1 運 動 の 形 態 37	
2.3.2 無 周 期 運 動 39	
2.3.3 粘性減衰自由振動 39	
2.3.4 減 衰 の 働 き 40	
2.4 不減衰系の強制振動.....	42
2.4.1 応 答 解 析 42	
2.4.2 共振のからくり 44	

2.5 粘性減衰系の強制振動	47
2.5.1 応答解析	47
2.5.2 共振のからくり	49
2.5.3 仕事とエネルギー	52
2.5.4 系と基礎間の振動伝達	55
2.6 周波数応答関数	57
2.6.1 周波数応答関数とは	57
2.6.2 数式表現	59
2.6.3 図示	60
2.6.4 特別な現象を生じる振動数	67
第3章 多自由度系	
3.1 不減衰系の自由振動	68
3.1.1 運動方程式	68
3.1.2 力とエネルギーの数式表現	70
3.2 固有振動数と固有モード	71
3.2.1 2自由度系	71
3.2.2 多自由度系	74
3.2.3 定義と意味	76
3.2.4 構造体と振動	77
3.2.5 発現機構	78
3.3 固有モードの直交性	78
3.3.1 直交性とは	78
3.3.2 定義	79
3.3.3 力学から観た正体	79
3.3.4 振動現象	81
3.4 モード質量とモード剛性	81
3.4.1 定義	81
3.4.2 等価1自由度系	82
3.4.3 質量正規固有モード	84
3.5 モード座標	84
3.5.1 座標変換式	85
3.5.2 2自由度系の例	86
3.5.3 運動方程式の座標変換	87
3.5.4 固有モードの省略	89
3.6 粘性減衰系の振動	90
3.6.1 自由振動の運動方程式	90
3.6.2 比例粘性減衰	91
3.6.3 一般粘性減衰系	95
3.6.4 強制振動	96
3.7 周波数応答関数	97
3.7.1 言葉の定義	97
3.7.2 定式化	97
3.7.3 共振と反共振	99
3.7.4 片持はりの例	100
3.7.5 対象外固有モードの省略	103
3.8 数値例	105
3.8.1 2自由度系	105
3.8.2 3自由度系	111

第4章 信号処理

4.1	初めに	117		
4.2	フーリエ変換	120		
4.2.1	フーリエ級数	120	4.2.3	離散フーリエ変換 130
4.2.2	連続フーリエ変換	128	4.2.4	フーリエ変換の例 142
4.3	相関とスペクトル密度	146		
4.3.1	相関	146	4.3.3	周波数応答関数とコヒーレンス 150
4.3.2	スペクトル密度	149		
4.4	誤差	153		
4.4.1	入力誤差	153	4.4.4	分解能誤差 159
4.4.2	折返し誤差	155	4.4.5	漏れ誤差 160
4.4.3	量子化誤差	159	4.4.6	フーリエ変換と誤差の関係 168

第5章 振動試験

5.1	初めに	171		
5.2	供試体の支持	172		
5.2.1	自由支持	172	5.2.3	弾性支持 175
5.2.2	固定支持	173		
5.3	加振方法	175		
5.3.1	種類と特徴	175	5.3.3	油圧式加振器 176
5.3.2	機械式加振器	176	5.3.4	圧電式加振 177
5.4	動電式加振器	177		
5.4.1	構造と特徴	177	5.4.4	加振器の取付け 181
5.4.2	共振点での加振力の急減	178	5.4.5	駆動棒 183
5.4.3	その他の短所	181		
5.5	加振波形	187		
5.5.1	定常波	188	5.5.4	非定常波 210
5.5.2	周期波	195	5.5.5	自然加振 210
5.5.3	不規則波	199	5.5.6	比較 211

5.6 打撃試験	212		
5.6.1 初めに	212	5.6.6 誤差と窓関数	223
5.6.2 長所と短所	212	5.6.7 非線形	227
5.6.3 打撃ハンマー	214	5.6.8 減衰	228
5.6.4 加振力	217	5.6.9 信号処理	228
5.6.5 現場校正	222	5.6.10 検証	229
5.7 変換器	230		
5.7.1 必要事項	230	5.7.3 加速度計の取付け	235
5.7.2 校正	233		
5.8 非線形	237		
5.8.1 様々な非線形	237	5.8.3 観察とモデル化	242
5.8.2 非線形系の周波数応答関数	240		
5.9 周波数応答関数の信頼性	244		
5.9.1 コヒーレンス	244	5.9.3 曲線適合	246
5.9.2 相反性	246	5.9.4 その他	247
補章A 数学基礎			
補章A1 三角関数	248		
A1.1 基本	248	A1.3 微分と積分	251
A1.2 加法定理	250		
補章A2 複素指数関数	252		
A2.1 複素数	252	A2.3 テーラー展開	256
A2.2 指数関数と対数関数	255	A2.4 複素指数関数	258
補章A3 ベクトルと行列	260		
A3.1 定義	260	A3.5 行列式	268
A3.2 ベクトルの演算	262	A3.6 固有値と固有ベクトル	270
A3.3 ベクトルの相関と直交	264	A3.7 固有ベクトルの直交性	275
A3.4 行列の演算	266	A3.8 正規直交座標系	282
補章A4 関数	288		
A4.1 実関数の大きさ	288	A4.3 複素関数	291
A4.2 実関数の相関と直交	290	A4.4 正規直交関数系	293

補章 A5	最小自乗法	296
補章 A6	積の微分と積分	300

補章B さらに学習へ

補章 B1	1自由度系の自由振動	301
B1.1	不減衰系	301
B1.2	粘性減衰系	303
補章 B2	1自由度系の強制振動	306
B2.1	不減衰系の共振解析	306
B2.2	粘性減衰系	307
B2.3	周波数応答関数	317
B2.4	周波数領域における自由振動	319
補章 B3	多自由度系の自由振動	321
B3.1	$g^2 - 4dh > 0$ の証明	321
B3.2	固有モードの直交性	321

補章C 自励振動

補章 C1	自励振動とは	325
補章 C2	理論解析	326
補章 C3	発生機構	327
C3.1	固体摩擦	327
C3.2	バイオリン	328
C3.3	カルマン渦	330
C3.4	フラッタ	331
補章 C4	成長限界	332
補章 C5	強制振動と自励振動の違い	332
補章 C6	防止方法	333

補章D 力学の再構成

補章 D1	今なぜ再構成か	334
D1.1	対称性と因果律	334
D1.2	在来力学の特徴	334
D1.3	ものづくりと力学	336
D1.4	何を再構成するか	336
補章 D2	状態量	337
補章 D3	力学特性	338
D3.1	在来力学の考え方	338
D3.2	弾性体の力学特性	338
D3.3	エネルギーと力学特性	339
D3.4	エネルギーに基づく機能定義	341
D3.5	質量と弾性の対比	343

補章 D4 力学法則			344
D4.1 力と運動の法則	344	D4.3 運動量の法則	347
D4.2 フックの法則	346		
補章 D5 力学エネルギー			348
D5.1 エネルギーとは	348	D5.2 対称性の導入	350
補章 D6 概念の明確化			352
D6.1 力の釣合	352	D6.3 慣性力	355
D6.2 速度の連続	354	D6.4 作用	356
補章 D7 補章Dのまとめ			357
補章 E 粘性の正体			
補章 E1 粘性とは			359
E1.1 歴史的背景	359	E1.2 機能	360
補章 E2 ポテンシャルエネルギー場における粘性			362
補章 E3 粘性の発生機構			366
E3.1 原子間ポテンシャルと粘性	366	E3.3 速度比例抵抗力の発生理由	375
E3.2 力学エネルギーの散逸	371		
補章 E4 固体・液体・気体の物性			377
参考文献			381
索引			383

第1章 初めに

1.1 振動とは

振動の定義としてまず考えられるのは「繰り返す現象」であろう。しかし、心臓の鼓動、潮の干満、交流電気、昼と夜等々、毎日の出来事の多くは周期性を有しており、どれが振動でどれが振動でないかを定めるのは難しい。ただ、力学的なものに話を限れば、かなりはっきりしてくる。

振動は、JIS では「ある座標系に関する量の大きさが平均値より交互に大きくなったり小さくなったりするような変動。通常は時間変動である。」と定義されている。また機械工学事典²⁸⁾では「物理量が、基準値に比べ、より大とより小の場合を交互に反復するのを振動的といい、その系は質量（慣）性と復元（弾）性を兼備して、両要素の間をエネルギーが往復する作用が（自由）振動現象の基本形態である。」と定義されている。

振動は物質の基本的属性であり、量子・原子から天体・宇宙までの森羅万象は常に（自由）振動（1.3.1 項）している。物質が存在することとエネルギーが存在することと振動していることは、同義であると考えてよい。

機械は、エネルギーの移動・変換によって使命を遂行する道具であり、エネルギーが運動エネルギーの形態をとり運動を伴う部分を必ず持っている。機械は有限の大きさであり、その部分は運転・稼働中ずっと連続的に運動するので、その部分の運動は必然的に周期運動となり振動を発生させる。このように、振動は機械の永遠の伴侶であり、振動を生じない機械は存在しないと言える。

振動と言えば、誰でも直ちに正弦振動（サイン波）を連想する。しかし実際の振動は、単一周波数からなる正弦振動のようなきれいな繰返しとはかけ離れた複雑な時刻歴波形が多い。それどころか、1 発で終る衝撃や 2 度と同じ波形を繰り返さない不規則現象も振動に入れている。

すべての動的現象は調和振動（単一周波数の振動）の重畳で表現できることが分かっている（4.2.1 項）。**図 1.1** はその例であり、同図 a

の方形波を正弦波成分に分解して最も低い周波数から順に 3 個までの正弦波成分を同図 b に示し、それら 3 個を合成したものを同図 c に示す（詳細は図 4.4）。同図 c のように、低次 3 個の正弦波を合成するだけで元の方角波にかなり近い波形になっている。このことから、調和振動の勉強が、すべての振動現象を理解するための第一歩であることが分かる。

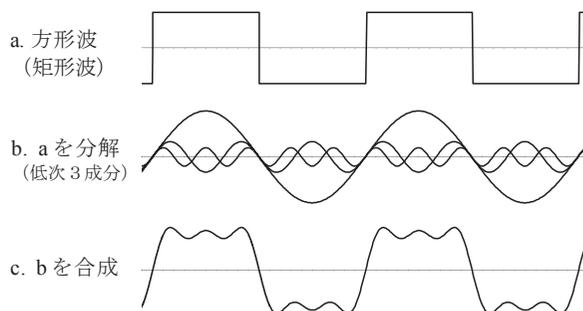


図 1.1 方形波を正弦波成分に分解・合成

1.2 振動が大切な理由

1.2.1 振動と私達

振動は私達と深いかかわりを持っている。肺から吐く空気で声帯を自励振動させて声を出し、周辺の空気を振動させて波動を生じ、相手の鼓膜と内耳を振動させ、それを通して相手の脳を刺激し、会話で意志を通じ合う。バイオリンの弦やピアノの鋼線を振動させて名曲を演奏する。また、セシウム原子の振動を計測して世界標準時間を決め、振動を重ねて人工音声を創り、超音波で体内を診察するなど、振動の利用分野は限りなく広い。このように人間は、振動無しでは生きられない。

反対に、振動から守らなければならない最も重要な対象は、私達自身である。長周期振動による

乗物酔い、継続する大音響による

難聴のように、振動や音は人

に様々な悪影響を与える。図 1.2

には、どの周波数 (0.1Hz~10⁶Hz

のうち黒い部分) の振動・騒音が私達にどのような悪影響を与

えるかを示している。

人間が身近に使う機械では、

振動・騒音が小さいことや心地

よく振動することが商品価値になっ

ている。例えば自動車は、

エンジンや路面から様々な加振

を受け、低周波振動から高周波

騒音までの様々な振動・音響が

発生する。しかし、1 トン以上の車を時速 100km 以上で走らせることができる強大なエネルギーを生み出すために、運転者のわずか 1m 前方で内燃エンジンが耳を劈く強烈な連続爆発を続けているにもかかわらず、車室内では音楽を聞きながら居眠り運転ができるほど静かで快適である。この魔法の箱を作るために、自動車会社では常時多数の技術者と多大な費用を振動・騒音の対策と問題解決に使っている。

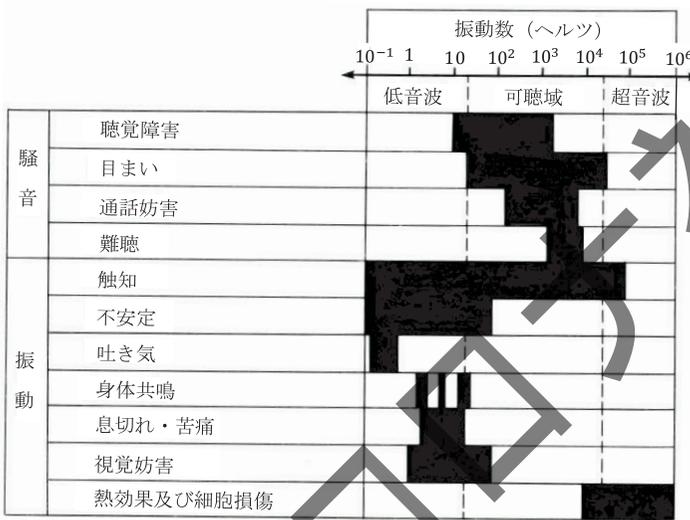


図1.2 振動と騒音の人への影響

発生する。しかし、1 トン以上の車を時速 100km 以上で走らせることができる強大なエネルギーを生み出すために、運転者のわずか 1m 前方で内燃エンジンが耳を劈く強烈な連続爆発を続けているにもかかわらず、車室内では音楽を聞きながら居眠り運転ができるほど静かで快適である。この魔法の箱を作るために、自動車会社では常時多数の技術者と多大な費用を振動・騒音の対策と問題解決に使っている。

1.2.2 金属疲労

すべての物体は振動を繰り返し受けると必ず疲労する。機械や構造物の主材料である鋼も例外ではない。通常、金属が 1 回の衝撃で破壊することはまずない。しかし、金属が長時間振動し続けていると、小さい振幅でも原子・分子間の結合が崩れ、それが拡大してサブミクロンのかすかな割れが無数に発生する。発生した割れの周辺部分の応力は緩むので、割れの成長は一旦止まり、その間

に他の部分で割れが新しく発生する．こうして割れは全体に広がり，そのまましばらく定常状態を続ける．やがて進行状態に入り，無数の割れのうち少数個が大きく成長して破壊に至る．これを**金属疲労**という．

疲労破壊を生じさせる応力は，**図 1.3** のように，破壊までの繰返し回数が多いほど小さくなる．通常，繰返し回数が $10^7 \sim 10^8$ 回のときの破壊応力を**疲労限度**といい，振動や繰返し応力を受ける構造の設計時の許容応力と決められている．

繰返し応力に一定の静応力が重なると，疲労限度は低下する．海水に接した金属が振動すると疲労と腐蝕が重なる．高温中の金属が振動すると疲労と変質劣化が重なる．このような場合には疲労限度が低下するので，船・航空機・内燃エンジン・ガスタービン・ボイラー・化学プラント等では疲労が重大な問題になることがある．

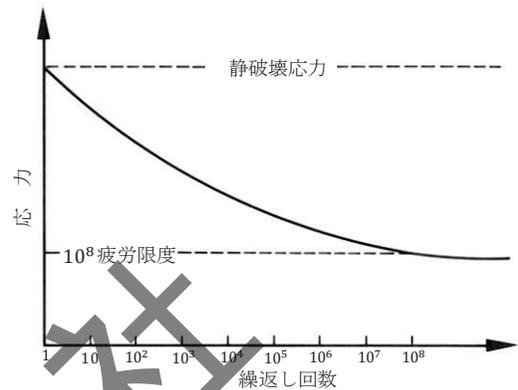


図1.3 疲労破壊応力と繰返し回数

疲労破壊を防ぐには，応力が疲労限度以下になるように設計すればよいが，実動時に生じる全製品の負荷・振動を設計段階で正確に予測することは困難である．都合が悪いことに振動は，疲労限度設定の基準となる $10^7 \sim 10^8$ 回にすぐに到達する．例えば 40Hz の振動は，わずか 3 日で 10^7 回以上も繰り返すのである．航空機のように疲労破壊が重大事故を引き起こす機械では，疲労破壊の可能性のある部品を定期的に検査し，必要に応じて新品に交換している．

1.2.3 今なぜ振動か

近年の機械で振動が特に重要であるのは，以下の理由による．

- ① 機械の形態が変化してきた．柔軟マニピュレータのように柔らかな機械，LSI 基板製造装置のように超精密な機械，巨大長橋や超高層建物のような大型構造物，新幹線や航空機のような高速乗物．これらには，一般の常識が通用しない振動問題が生じている．
- ② ものづくりは，激しい生存競争の中で高出力，軽量，低コスト，エネルギー高効率利用の限界打破への厳しい要求に常時直面している．これらは，互いに矛盾した背反関係にあるが，都合が悪いことに，振動・騒音を増大させるという一点に関しては，共通している．多くの機械は，従来の上までは振動・音響性能の面ですでに限界にきており，さらなる進展への常識を超える形態変化を迫られている．その際，現有の知識・技術・経験・ノウハウが通用しない新しい振動・騒音問題が発生する可能性が大きい．
- ③ 安全性の至上命題の下で，静かさ・やさしさ・快適さが重要になっている．振動・騒音に関

する法規制が厳しくなり、例え実害は生じていなくても、法律に触れば、機械製品は則販売禁止となる。これらは大変結構なことであるが、ものづくり技術者には厳しい課題になる場合がある。

1.3 振動の種類

1.3.1 自由振動

振動は、自由振動と強制振動と複雑な振動に大別できる。

自由振動は、外作用が変化すると必ず発生する。叩く、変形させて放す、などのように、物体に外部から動的な作用を加えるときにはもちろん、今まで加えていた加振力を除去するとき、加振中に加振力の位置・大きさ・方向・周波数を変化させるときにも、自由振動が新しく発生する。

同じ物体に同じ外作用変化が加われば、同じ自由振動が発生するが、同じ物体でも外作用変化の様相が異なると、異なる自由振動が発生する。

自由振動は、単一振動数で生じることはまれであり、大抵の場合数多くの振動数成分が重なり合って複雑な様相を示すから、計測して得られた時刻歴波形を観ても、そのままでは振動の形も振動数も分からない。そこで、モード解析²⁾⁴⁾を用いて、これを構成する複数の単一振動数成分に分解することにより、正体を探る。

一旦生じた自由振動は、外から何もしないでも自分自身だけで自由勝手に振動し続ける。物体に粘性などの減衰が存在しない場合には、自由振動は永遠に持続する。物質を構成する原子には減衰が存在しないから、すべての原子は常にそして永遠に自由振動し続けている。物質が存在すること・エネルギーが存在すること・自由振動し続けること、の3項は、同義である。

減衰が存在する系の自由振動は、力学エネルギーが熱などの他のエネルギーに変化して漏れ出すため、次第に小さくなりやがて消えて行く。

通常の物体に生じた自由振動は、大抵速かに消え、強制振動ほど大きい問題を生じないことが多い。しかし自由振動は、天体から原子・量子に至るまでのあらゆる物質に生じている力学現象の根幹であり、また次の2つの理由で振動試験に多用されるので、しっかり学んでおかなければならない。

- ① 強制振動・自励振動・非線形振動など他のすべての振動を生じる原因になる物体の動特性が、自由振動の中にすべて含まれている。したがって自由振動を計測し分析すれば、対象物体の動特性を知ることができ、他の振動に対してもその発生機構が分かり、振動により生じる問題の原因究明や不具合対策が可能になる。
- ② 自由振動は、外環境とは無関係に物体内部のエネルギー循環のみによって継続する現象であり、物体固有の力学特性（質量と剛性）だけに支配され、発生の瞬間を除いては外部の影響を受けない。そこで、自由振動を計測するだけで、物体固有の力学特性を容易に知ることができ

自由振動は、打撃などの外作用を与えた直後に外部から隔絶された自由な状態のみで生じる現象であると思われるが、必ずしもそればかりではない。外作用が与えられ続けていても、周辺から拘束され続けていても、外作用が変化しさえすればその瞬間に必ず発生する。そして一旦発生すれば、外作用の種類・大きさ・拘束の有無などの外部状況には無関係に持続する。連続する加振状態で外作用が与えられ続けている場合には、それに対する応答である強制振動（次項）はもちろん継続しているが、外作用に非定常成分が混入すれば、その瞬間に必ず自由振動が、継続中の強制振動とは別の現象として、新しく発生する。

自由振動は、1自由度系では最初の振幅の大きさ・振動の速さ・消え易さ、という3つの現象量で表現される。多自由度系では、これらがそれぞれ固有モード・固有振動数・モード減衰比の3つのモード特性に対応する。一方、これらのモード特性の代りに、多自由度である実対象系と等価な1自由度系の力学特性として固有モード毎に定義されるモード質量・モード剛性・モード減衰の3つで、代替表現することもできる。振動を支配する基になる力学特性は質量、剛性、減衰の3種類であり、3という数が振動を支配する動特性の基本数となっている。

実機の自由振動の様相は千差万別であるから、自由振動はどのような形態でもとり得るように思われるが、実はあらかじめ決まった形（固有モード）と速さ（固有振動数）と消え易さ（モード減衰比）でしか振動できないのである。また、特定の形がどのような速さと消え易さでも振動できるのではなく、特定の形は特定の速さと特定の消え易さでしか振動できず、これら特定同士の組（トリオ）が複数（自由度と同数）存在する。自由振動ではこれら複数の組が重なり合って発生し、その重なり方は千変万化であることが、自由振動の様相を千変万化にしている。この重なりを分離し1自由度系に分解するのが、モード解析²⁾⁴⁾⁶⁾である。

1.3.2 強制振動

強制振動は、外部からの加振に対する応答であり、加振開始と同時に必ず発生し、加振が存在する間は継続し、加振終了と同時に消滅する。強制振動は、必ず加振と同一の振動数で振動し、加振に含まれない振動数で振動することはない。

一方、自由振動は、外作用が変化すると必ず発生する。加振開始は外作用変化の一形態であるから、加振開始時には、自由振動が強制振動と同時に必ず発生する。自由振動は、一旦発生した後は、加振の有無・振動数・形態には無関係に、物体自身が有する固有の力学特性（質量・剛性）のみによって決まる固有の形（固有モード）と固有の速さ（固有振動数）で継続し、減衰が存在する場合には固有の消え易さ（減衰比）で減衰する（前項）。

強制振動と自由振動は力学的に異なる現象であるから、加振振動数が固有振動数に等しい共振時以外では、両者は別現象として個別に推移する。しかし現象としては、両者が重なって現れ、複雑な振動波形を示す。減衰を有する物体では、自由振動は減衰してやがて消え、強制振動だけが残存し続ける。

索引

【 あ ~ お 】

アクセラランス 58
 圧電式加振 177
 アナログ信号 117
 位相 33, 117
 位置 23
 ——の定義 348
 ——保存の定義 348
 一般固有値問題 274
 一般直交性 79, 277
 一般粘性減衰系 95
 因果関係 334
 因果律 23, 334
 ウイナー・ヒンチンの定理
 150
 運動の法則 17, 26, 344
 運動方程式 20, 70
 運動量 23, 347
 ——の定義 347
 ——の法則 347
 ——保存の法則 348
 液体 377, 379
 SN比 120, 190
 AD変換 118
 エネルギー 348
 ——弾性 239
 ——保存の法則 349
 位置—— 339
 運動—— 23, 339
 化学—— 350
 弾性—— 24, 339, 351
 電気—— 350
 熱—— 350
 ポテンシャル—— 365

FFT 135
 エリアシング 155
 円関数 248
 エントロピー弾性 239
 オイラーの公式 259
 応答 171
 応答変換器 172
 大きさ 263, 288
 折返し誤差 135, 155, 158

【 か ~ こ 】

階乗 257
 ガウス分布 201
 角周波数 30, 117
 角振動数 117
 確定信号 117
 過減衰 42
 重ね合せの原理 237
 加振 171
 ——系 181
 速度—— 9, 56
 力—— 8
 加振器 172, 175
 加振力 42
 仮想仕事 323
 ——の原理 322
 仮想変位 373
 加速度 15, 17
 ——計 172
 ——ベクトル 70
 偏り誤差 154
 可動機構 69
 過負荷 220
 可変質量 214
 加法定理(三角関数の) 250

ガラス状態 379
 ガラス転移温度 239
 ガラス領域 240
 ガリレイの相対性原理 346
 カルマン渦 330
 環境加振 211
 慣性 17
 ——系 18
 ——拘束 104
 ——の法則 17, 26, 344
 慣性力 17, 355
 機械インピーダンス 58
 機械式加振器 176
 奇関数 293
 擬似逆行列 299
 擬似不規則波加振 198
 基準関数 295
 基準座標ベクトル
 285, 295
 気体 377, 380
 ギブス現象 127
 基本角周波数 121
 基本角振動数 121
 基本校正 233
 基本周期 117, 121
 基本周波数 121
 基本振動数 75, 121
 基本調波 121
 基本波 121
 基本モード 75
 逆フーリエ変換 128
 Q値 192, 309
 共振 44, 77, 97
 ——振動数 97
 ——点 45, 97

- 峰 97
 加速度—— 310
 速度—— 309
 変位—— 308
 強制振動 5
 共役複素数 254
 行列 261
 逆—— 267
 正方—— 262
 対角—— 262
 対称—— 261
 単位—— 261
 長方—— 262
 転置—— 261
 行列式 268
 曲線適合 246
 虚軸 253
 虚数 30, 252
 距離 290
 金属疲労 3
 空間座標 85
 偶関数 293
 空間モデル 10
 偶然誤差 154
 矩形波 118
 駆動コイル 177
 駆動点 97
 駆動点周波数応答関数 97
 駆動棒 172, 183
 クロススペクトル密度 150
 結晶構造 378
 原子間ポテンシャル 366
 減衰 228
 ——行列 91
 ——固有角振動数 40, 94
 ——固有周期 40
 ——固有振動数 40
 ——比 42
 ——率 40
 原点からの引力の場 363
 原点からの斥力の場 366
 現場校正 222, 234
 硬化非線形弾性の場 364
 交換斥力 366
 格子振動 377
 校正 233
 剛性 18, 338
 ——行列 70
 構造 68
 構造非線形 237
 高速掃引正弦波加振 196
 高速フーリエ変換 135
 剛体 10
 剛体モデル 10
 高調波 121
 高分子材料 238
 コクアド線図 61
 誤差 153
 誤差関数 297
 固定支持 173
 コヒーレンス 152, 229, 244
 コム領域 240
 固有角振動数 32, 72
 固有周期 32, 72
 固有振動数 32, 72, 77
 固有値 270, 273
 ——解法 75
 ——問題 75, 272
 一般—— 273
 固有ベクトル 270, 273
 固有モード 74, 77
 ——の直交性 78
 コレスキー分解 274
 コンプライアンス 58
 【 さ ~ そ 】
 最小自乗法 296
 作用 356
 速度の—— 356
 力の—— 356
 作用反作用の法則 344
 速度の——
 26, 344, 346
 力の—— 26, 344
 散逸関数 315, 361
 散逸パワー 342, 361
 三角関数 30, 248
 サンプリング 118
 時間窓 164
 自己周波数応答関数 97
 自己相関関数 146
 仕事 313, 349
 自乗 252
 自乗平均 290
 指数 255
 ——関数 255
 ——窓 225
 自然加振 210
 自然対数 256
 実関数 288
 実験モード解析 13, 99, 171
 実効値 289
 実軸 253
 実数 252
 質点 10
 質点系モデル 10
 質点モデル 10
 実動加振 211
 質量 17, 23
 ——行列 70
 ——除去 186
 ——正規固有モード 84
 ——の静的機能 24, 341
 ——の動的機能 25, 341
 シミットの直交化法 282
 周期 117
 ——関数 30, 259
 ——信号 117
 ——波 195
 ——波加振 195

——不規則波加振 206
 自由支持 172
 自由振動 4, 29, 37, 68, 90
 自由度 10, 68
 周波数 117
 ——応答関数 58, 97, 171
 ——同調正弦波加振
 189, 194
 主軸(楕円・楕円体の) 285
 状態量 23, 337
 蒸発 379
 剰余剛性 105
 剰余コンプライアンス 105
 剰余質量 104
 初期位相 33
 初期条件 30
 純不規則波加振 201
 純不規則連続打撃加振 288
 自励振動 8, 325
 信号 117
 ——処理 117
 ——発生器 171
 振動試験 171
 振動数 117
 振動数方程式 75
 振動伝達率 56
 振幅 33, 117
 推定 151, 153
 数学モデル 11
 スカラー積 262
 スカラー量 262
 ステップ加振 210
 スペクトル密度 149
 ズーミング 167
 ズーム処理 167
 正規化 263
 正規直交関数系 293
 正規直交座標系 282
 正規モード法 189
 正弦波加振 189, 192

脆性破壊 380
 制振合金 238
 制振鋼板 238
 積の公式(三角関数の) 251
 積の積分 300
 積の微分 300
 斥力の場合 366
 節 97
 絶対値 263
 零交点 143, 217
 線形弾性の場合 364
 相関 266
 ——関数 146
 ——係数 146, 266
 相互周波数応答関数 97
 相互相関関数 147
 相反定理 57, 99
 増幅器 172
 速度 15, 18
 速度加振 9, 56, 171, 315
 速度共振 309
 速度計 172
 速度の作用 356
 速度の作用反作用の法則
 26, 344
 速度の連続 354
 速度ベクトル 91
 塑性変形 376, 378

【 た ~ と 】

対称性 23, 334, 337
 対数 256
 ——関数 256
 ダイナミックレンジ
 120, 177, 190
 打撃加振 210
 打撃試験 212
 打撃ハンマー 172, 214
 多重正弦波加振 199
 ダランベールの原理 20, 352

単位 14
 単位虚数 253
 単位実数 253
 単位衝撃 144
 単位数 253
 短時間不規則波制御加振
 204
 短時間不規則連続打撃加振
 208
 弾性 23, 338
 ——支持 175
 ——体 10, 338
 ——体の力学 337
 ——変形 378
 ——の静的機能 25, 341
 ——の動的機能 25, 341
 ——の場合 364
 ——の法則 26, 344
 硬化非線形—— 364
 線形—— 364
 軟化非線形—— 364
 力加振 8, 171
 力の作用 356
 力の作用反作用の法則
 26, 344
 力の釣合 20, 352
 力の法則 26, 344
 力変換器 172, 214
 力窓 223
 調和関数 30, 259
 調和振動 31
 直交性 79, 93, 275
 一般—— 79, 277
 釣合の法則 20, 352
 DA変換 120
 低速掃引正弦波加振 189, 192
 デジタル信号 117
 テーラー展開 258
 デルタ関数 144
 電気双極子モーメント 367

- 伝達関数 57
 伝達周波数応答関数 97
 転置 (行列の) 261
 電力増幅器 171
 度 248
 等価 1 自由度系 82
 等価剛性 98
 同期平均 154
 凍結 379
 動剛性 58
 動質量 58
 同定 11, 171
 動電式加振器 172, 177
 動特性 171
 等ポテンシャルエネルギー
 の場 365
 特性方程式 75
 閉じた因果関係 23
 取付け共振 235
- 【 な ~ の 】
- ナイキスト周波数 119
 ナイキスト線図 61
 ナイキストの標本化定理 119
 内積 262
 軟化非線形弾性の場 364
 2 進法 120
 2 度たたき 215
 入力誤差 153
 ネーターの定理 340
 熱エネルギー 340, 350
 熱膨張 379
 熱励起 373, 377
 粘性 18, 359
 ——減衰行列 91
 ——減衰係数 19
 ——減衰比 42
 ——減衰力 19
 ——体 365
 ——抵抗力 18
- の機能 25, 342
 ——の場 364
 のこぎり波 125
 ノルム (ベクトルの) 263
- 【 は ~ ほ 】
- 倍角の公式 (三角関数の) 250
 パイロ効果 233
 パウリの排他律 366
 波高率 189
 ハニング窓 165
 パワースペクトル密度 149
 半角の公式 (三角関数) 251
 反共振 97
 ——溝 97
 ——振動数 97
 ——点 97
 半値幅 193
 ピエゾ圧電効果 177
 ピエゾ素子 172
 非慣性系 18
 ひずみゲージ 172
 非線形 227, 237
 構造—— 237
 高分子材料の—— 238
 材料—— 238
 非線形剛性 238
 非線形振動 8
 ビット 120
 非定常波 210
 標準偏差 289
 標本化 118
 ——間隔 118
 ——関数 143
 ——時間 118
 ——周期 118
 ——周波数 118
 ——点数 118
 比例粘性減衰 92
 比例粘性減衰系 92
- 疲労限度 3
 ファンデルヴァールス引力
 366
 不規則信号 117
 不規則波 199
 不規則波加振 199
 疑似—— 198
 周期—— 206
 純—— 201
 短時間—— 202
 不規則連続打撃加振 207
 純—— 208
 短時間—— 208
 復元性 18
 復元力 18
 複素関数 291
 複素剛性 238
 複素固有モード 96
 複素指数関数 30, 258
 複素振幅 307
 複素数 30, 252
 複素平面 253
 不減衰系 20
 節 (振動の) 97
 不足減衰 42
 フックの法則
 18, 339, 346
 物性 377
 液体の—— 377
 気体の—— 377
 固体の—— 377
 フラッタ 331
 フーリエ解析 121
 フーリエ級数 121
 フーリエ係数 122
 フーリエ展開 121
 フーリエ変換 128
 広義の—— 285
 高速—— 135
 離散—— 130, 133

離散逆—— 133
 連続—— 128
 連続逆—— 128
 不連続掃引正弦波加振
 189, 193
 分解能誤差 160
 分解能周波数 119
 分散 289
 ベクトル 260
 行—— 262
 単位—— 262, 263
 変位—— 70
 列—— 262

変位 15
 変位共振 308
 変位計 172
 偏角 253
 変換器 230
 変曲点 (原子間ポテンシャル
 の) 368
 方形波 1, 124
 補助校正 234
 保存力 339, 349
 ——の場 349
 ボード線図 60

【 ま ~ も 】

-3dB 帯域幅 165, 193
 マクローリン展開 257
 摩擦 327
 静—— 327
 動—— 328
 窓関数 165
 マトリクス 261
 無周期運動 39
 モデル 9
 ——化 9
 モード解析 11
 モード行列 85
 モード減衰 93

モード減衰比 94
 モード減衰率 94
 モード剛性 82
 モード座標 85
 モード試験 171
 モード質量 82
 モード定数 98
 モード特性 99
 モードモデル 10
 モビリティ 58
 漏れ誤差 161

【 や ~ よ 】

油圧式加振器 176
 溶解 379
 ——熱 379
 横感度 232

【 ら ~ ろ 】

ラジアン 248
 力学エネルギー 23, 339, 348
 ——の閉回路 6
 ——保存の法則 36, 339
 力学特性 10, 19, 338
 力学法則 26, 344
 力学モデル 9, 19
 リークージ 161
 離散化 118
 留数 98
 量子化 118, 120
 量子化誤差 159
 臨界粘性減衰 41
 臨界粘性減衰係数 41
 励振 171
 列ベクトル 261
 レナードジョーンズポテン
 シヤル 366

— 著者略歴 —

長松 昌男 (ながまつ まさお)

1997年 東京都立大学大学院工学研究科
博士後期課程修了
博士 (工学)
1997年 北海道工業大学工学部講師
2008年 北海道工業大学創生工学部准教授
2014年 北海道科学大学工学部准教授
現在に至る

長松 昭男 (ながまつ あきお)

1970年 東京工業大学大学院理工学研究科
博士課程修了
工学博士
1970年 東京工業大学工学部助手
1984年 東京工業大学工学部教授
2000年 東京工業大学名誉教授
法政大学工学部教授
2010年 キャテック株式会社勤務
現在に至る

実用モード解析入門

Introduction to Practical Modal Analysis

© Masao Nagamatsu 2018

2018年1月10日 初版第1刷発行

検印省略

著者 長松昌男
長松昭男
発行者 長松昌男
印刷所 萩原印刷株式会社
製本所 株式会社グリーン

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発売元 株式会社コロナ社

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844・電話 (03)3941-3131(代)

ホームページ <http://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-08227-2 C3053 Printed in Japan

本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上の例外を除き禁じられています。
購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めていません。
落丁・乱丁はお取替えいたします。