

まえがき

本書の目的は、人間の持つ「あいまいさ」を扱うための数学的・理論的なツールについて説明することである。と簡単に述べたが、執筆する際に一番悩んだのが「人間の持つあいまいさとは何か」という、最も根源的な問題だった。

コロナ社と本書の執筆を打ち合わせたのはじつはかなり前である。そもそも筆者は学生の頃から、ファジィ理論をはじめとするソフトコンピューティングの基礎理論の研究に携わっており、その経緯から、本書の当初のタイトルは「ファジィ理論の数理」であった。しかし、ファジィ理論がもてはやされ流行になったのは1990年代で、その後一過性のブームも過ぎ去り、数学理論としての地位を確保したいまとなつては、ファジィ理論に関する書籍は選ぶのに困るくらい出版されている。

折しも筆者が所属している筑波大学大学院システム情報工学研究科リスク工学専攻で「リスク工学シリーズ」を刊行することとなり、それだったらファジィ理論も人間の持つあいまいさをターゲットにしているのだから、「ファジィ理論の数理」を改め、「あいまいさの数理」として、リスク認知に係る人間のあいまいさを数学的に扱うツールについて概説すればどうか、ということで、そのようなタイトルとして構成を考えることになった。

しかし、確かにファジィ理論があいまいさを扱う数学理論の一つであるとはいえ、ファジィ理論について書くのであれば、それが「あいまいさ」のどの部分と関連するのを示さなければ、単なる理論の羅列となり、本としてのまとまりがなくなる。少なくとも「あいまいさ」の骨子だけでも示さなければならない。

一方、「人間の持つあいまいさ」はさまざまな様相を持ち、「あいまいさ」を表す言葉は日本語で150前後、英語に至っては440近くもある。「あいまいさ」

の正体もわからないのに、それを扱う数学理論について述べられるわけがない。

「あいまいさ」の持つ意味のあまりの広さに呆然とし、ほとほと悩んでいたところ、菅野道夫 東京工業大学名誉教授 が2012年に国際会議で発表した、とある論文の抄録が目についた。この論文は、「あいまいさ」を表す日本語・英語・ドイツ語の言葉を調査し、それを3種類に分類することにより、「あいまいさ」の特徴を明らかにした、というものであった。この論文を目にしたことは幸運であった。そうでなければ、いまでも執筆の指針が定まらず、悩んでいたであろう。

執筆しながら、「あいまいさ」の持つ奥深さ、アリストテレスから続く「あいまいさ」の歴史の重さ、論理学と確率論のつながりを改めて認識することができた。その意味で、この本は読者諸兄のためだけでなく、筆者自身のためにも在る。そうはいっても、筆者は学半ばの未熟者である。誤記もあろう。その点は平にお許しの上、ぜひご指摘いただきたい。

最後になったが、本書を執筆するにあたり、適切なご助言を賜った筑波大学の宮本定明教授、芝浦工業大学の神澤雄智准教授、近畿大学の濱砂幸裕講師に深く感謝する。また、執筆の遅れに対して絶えず忍耐強く接して下さったコロナ社に心から感謝する。コロナ社の叱咤^{しった}激励とご助言がなければ本書は完成しなかった。

2015年2月

遠藤 靖典

目 次

1. あいまいさを扱うための序章

1.1 歴史的経緯から見た「あいまいさ」	1
1.1.1 形而上の概念の数学的表象による記述	1
1.1.2 アリストテレスによる偶性の否定	2
1.1.3 歴史的経緯から見た「あいまいさ」の科学理論	3
1.2 言語的側面から見た「あいまいさ」	4
1.2.1 英語の場合	4
1.2.2 日本語の場合	5
1.2.3 言語的側面から見た「あいまいさ」の科学理論	6
1.3 本書で扱う「あいまいさ」の科学理論	7

—— 第I部【導入】 ——

2. 古典論理の基礎

2.1 命題と古典論理	9
2.2 命題論理	11
2.2.1 論理記号	11
2.2.2 命題論理の論理式	13
2.2.3 命題論理の基本的性質	15

2.2.4	演 繹 推 論	16
2.2.5	推 論 規 則	19
2.3	述 語 論 理	22
2.3.1	項と述語・関数	24
2.3.2	量 化 記 号	25
2.3.3	述語論理の論理式	28
2.3.4	述語論理の基本的性質	28
2.3.5	推 論 規 則	29
	章 末 問 題	30

3. 集合論の基礎

3.1	集 合 と 空 間	31
3.1.1	素朴な意味での集合	31
3.1.2	ZFC 公理系による集合	33
3.1.3	空 間	36
3.2	集合の演算の定義	36
3.2.1	有限個の演算	37
3.2.2	無限個の演算	38
3.3	集合の基本的性質	40
3.3.1	有限個の場合	40
3.3.2	無限個(集合列)の場合	41
3.4	有限集合と無限集合・可算集合と非可算集合	42
	章 末 問 題	43

—— 第 II 部【表現のあいまいさ】 ——

4. 非古典論理への序章

4.1 論理学の歴史	44
4.2 確率論との関連	47
4.3 論理の構文論・意味論・語用論	49

5. 様相論理

5.1 実質含意のパラドックス	51
5.2 様相論理と厳密含意	53
5.2.1 様相論理の構文論	53
5.2.2 様相論理の意味論	55
5.3 クリプキ意味論	59
5.3.1 クリプキフレームとクリプキモデル	59
5.3.2 到達可能関係とクリプキモデルの性質	60
5.3.3 様相論理の体系	61
5.3.4 様相記号の意味付けとさまざまな様相論理	63
章末問題	65

6. ファジィ論理

6.1 ファジィ集合	66
6.1.1 ファジィ集合の定義	66
6.1.2 ファジィ集合の演算と直積	68

6.1.3	ファジィ集合の基本的性質	71
6.1.4	ファジィ関係	72
6.1.5	拡張原理	78
6.2	ファジィ論理	78
6.2.1	ファジィ命題	79
6.2.2	ファジィ真理値	83
6.2.3	ファジィ推論	85
	章末問題	91

—— 第III部【生起のあいまいさ】 ——

7. 確率論への序章

7.1	確率論における二つの側面	92
7.2	哲学的問いかけ	93
7.3	有限から無限へ	94
7.4	確率論を理解するためのキーワード	94

8. 確率論黎明期

8.1	パスカルとフェルマーの往復書簡まで	96
8.1.1	確率論の発展の阻害要因	96
8.1.2	パスカルとフェルマーの往復書簡までの歴史	98
8.2	パスカルとフェルマーによる確率の議論	99
8.2.1	パチョーリの考え方	102
8.2.2	タルタリアの考え方	102
8.2.3	フォレスターニの考え方	103

8.2.4	カルダーノとペヴェローネの考え方	103
8.2.5	パスカルとフェルマーの考え方	104
8.3	期待値の概念	106
8.4	ベルヌーイによる確率の議論	107
	章末問題	110

9. 数学的確率

9.1	標本空間と事象 (有限バージョン)	111
9.1.1	標本空間・標本点・事象	111
9.1.2	事象の演算	113
9.2	数学的確率の定義	114
9.3	理由不十分の原理	116
	章末問題	118

10. 頻度確率と傾向性解釈

10.1	頻度確率	119
10.1.1	コレクティブ	119
10.1.2	頻度確率の定義	121
10.2	傾向性解釈	122
10.2.1	傾向性	122
10.2.2	傾向性解釈に対する批判	124
	章末問題	124

11. 公理主義的確率

11.1 公理主義的確率の概要	125
11.2 有限加法族と有限加法的測度	127
11.3 完全加法族と有限加法的測度	129
11.4 公理主義的確率の定義	131
11.5 標本空間と事象（一般バージョン）	132
11.6 確率測度の性質	133
11.7 公理主義的確率から見た頻度確率の問題点	135
章末問題	137

12. 条件付き確率とベイズの定理

12.1 条件付き確率	138
12.2 事象の独立性	140
12.3 ベイズの定理	142
章末問題	146

13. 確率変数と確率密度・確率分布

13.1 確率変数と確率分布	147
13.1.1 確率変数	147
13.1.2 確率変数の独立性	152
13.1.3 確率分布	152
13.2 離散型と連続型の確率分布	153
13.2.1 離散確率分布	154

13.2.2	連続型の確率分布	154
13.3	確率変数の期待値と分散	155
13.3.1	期 待 値	155
13.3.2	分散と標準偏差	157
13.3.3	標 準 化	161
13.3.4	モ ー メ ン ト	162
13.4	離散確率分布の例	163
13.4.1	離散一様分布	163
13.4.2	二項分布	164
13.4.3	ポアソン分布	165
13.4.4	超幾何分布	166
13.5	連続確率分布の例	167
13.5.1	連続一様分布	167
13.5.2	指数分布	168
13.5.3	ガンマ分布	169
13.5.4	正規分布	171
13.5.5	コーシー分布	172
章 末 問 題		172

14. 大数の法則と中心極限定理

14.1	確率変数列の収束	173
14.2	大数の法則	175
14.2.1	大数の弱法則	176
14.2.2	大数の強法則	177
14.3	中心極限定理	180
章 末 問 題		182

15. 主 観 確 率

15.1	ベイズ確率	184
15.1.1	ベイズ推定の原理	184
15.1.2	ベイズ推定の長所	186
15.2	その他の主観確率	187
15.2.1	個人的主観主義	187
15.2.2	ハイゼンベルクによる主観確率	187
15.2.3	確率の論理的解釈	188
15.3	信念に基づく確信	189
15.4	非加法性について	190
15.4.1	ベルヌーイによる非加法性	190
15.4.2	エルスパークのパラドックス	192
15.4.3	マルチプルプレーヤ	194
15.4.4	リスクと不確実性回避	195
	章 末 問 題	196
	付 録	197
A.1	論理・集合論に関わる人々の年表	197
A.2	確率論に関わる人々の年表 I	198
A.3	確率論に関わる人々の年表 II	199
	引用・参考文献	200
	索 引	203

1

あいまいさを扱うための序章

本書では、「あいまいさ」を扱うための数学的な理論について述べる。そのため、ここではまず、本書で扱う「あいまいさ」とは何かについて簡単に説明しよう。とはいえ、あいまいさを含む形而上^{けいじじょう}の概念は、古代ギリシャの時代より人類が考え続けてきた大問題であり、「あいまいさ」だけで何冊もの本になる内容を含むので、ここで簡単に「あいまいさとは である」と言い切ることはできない。もし読者が哲学に精通していれば、ここでの記述に物足りなさを覚えるだろうが、その点のご寛恕^{かんじょ}を請う。

1.1 歴史的経緯から見た「あいまいさ」

1.1.1 形而上の概念の数学的表象による記述

形而上の概念は、人や時間、文化によってさまざまに異なる。本書の対象とする「あいまいさ」の場合も同様で、世界共通の「あいまいさ」を定義しようとする場合、人や文化によって違う「あいまいさ」の共通項を抽出することになるが、そのような共通項が存在するかどうかという議論はさておき、その共通項を形而下のものとして具象化しようとしても、もし説明するための言語が違えば、共通項を共通概念として表現したことにはならないであろう。言語は形而上の概念を形而下の文章に変換するほとんど唯一のツールだが、形而上と形而下の対応の困難さ、それぞれの言語による違いにより、世界共通の「あいまいさ」の概念について、日常言語による文章で説明したり定義することは非常に難しい。その問題を少しでも解決する一つとして、数学的表象による記述

がある。特に、近代科学はそのような考えを背景にして発展してきた。

やや話が脇道にそれるが、近代科学について言及することも意味があるだろう。小林は著書「科学哲学」(文献 1)[†])の中で、近代物理学に代表される近代科学の特徴は以下の2点であると記している。

- (1) 自然現象のうちで感覚性質のようなものは捨象し、数量化可能な側面にのみ着目する。
- (2) そのような側面を数学的表象によって記述する。

ここでいう感覚性質とは、「人間やわれわれ個々人の知覚様式と不可分であった、物体の普遍的構造を示すものではない」ので、客観性を担保するためには捨象しなければならない。また、『日常言語はわれわれがそこで生きる「いま」、「ここ」の文脈や「環境世界」に本質的に依存しており、物理的現象の普遍的性質を記述するものとしては不適切である』ために、数学的表象による記述が必要となる。ただし、ここでいう「数量化」とは、客観性の担保には必要だが、あくまでも測定器具を介した計量となるので、『厳密に言えば、物理量の数量化は測定装置の「精度」や「誤差」に依存しており、無条件で絶対的なものではない』ことに留意しなければならない。この小林による近代科学の特徴は、一般通念として認めてもよいであろう。

1.1.2 アリストテレスによる偶性の否定

さて、「あいまいさ」について深い洞察を行ったのはギリシャの哲学者だったアリストテレスである。アリストテレスは著書「形而上学」VI巻で、「本質的なものが存在することと同種の原因と原理は、偶的には存在しない」とし、「正真正銘の偶性と可能性は、事象の範囲から完全に除外すべき」と考えた。そして、「偶性の科学など存在しないことは明らかで」「われわれは偶的なものは科学的に取り扱えないとみなさなければならない」と記しており、完全に偶性

† 巻末の引用・参考文献番号を表す。

の科学を否定している。この「偶性」「偶的」が確率と同種の内容を含んでいることは間違いないであろう。ただしここでいう確率とは、読者諸兄が最初にイメージする「サイコロを振って出る目の数が1である頻度」だけでなく、信念の度合いも含むより広範な概念であることに注意してほしい。確率論の章で後述するが、そもそも確率とは、頻度と信念の両方の「あいまいさ」を含む概念である。

また、アリストテレスは論理学の祖でもあるが、様相論理について最初に言及したのも彼であった。様相論理は、論理の枠組みで信念の「あいまいさ」を扱う理論体系として、近年盛んに研究が行われている。

しばしば西洋最大の哲学者の1人に数えられ、「万学の祖」とも呼ばれるアリストテレスの思想的影響は現在の科学にも透徹しており、「あいまいさ」に対する考え方も含めて、科学に対する基本的姿勢は変わっていないといってい。 「あいまいさ」とは何かという問いかけは、「あいまいさ」でないものは何かをも併せ考えることによって見えてくる。

「あいまいさ」でないものに関する科学理論は、アリストテレスの思想的庇護の下、紀元前から着実に発展してきた。一方、「あいまいさ」に関する科学理論はその間発展せず、ギリシャ、ローマの古典古代文化を復興しようとする文化運動であるルネサンスを契機にして、ルネサンスが西洋世界全体に伝搬した15世紀末を過ぎて世に出たはずである。そう考えると、15世紀末までは顕在化せず、その後に関開した科学理論のうち、信念や頻度に関するものを、「あいまいさ」を扱う科学理論と考えてよい。その代表的理論ははっきりしている。

1.1.3 歴史的経緯から見た「あいまいさ」の科学理論

一つはライブニッツを祖とする数理論理学、その中でも非古典論理である。アリストテレスは「偶性の否定」の観点から、「曖昧性」を極力排除して古典論理を構築したが、非古典論理は古典論理に対するアンチテーゼとして、人間の信念を扱うために発展してきた。現在では、ルイスによって定式化された様相論理や、ウカシェヴィッツによって提案された多値論理、ザデーによって提唱

されたファジィ集合に基づくファジィ論理など、多様な理論展開がなされている。特に言語表現においては、ファジィ論理は非常に強力な体系を持っている。

もう一つはカルダーノやパスカル、フェルマーによって端緒が開かれ、ラプラス、ミーゼスらによって発展し、測度論を背景とする理論体系を構築したコルモゴロフによって一つの頂点を極めた確率論である。確率論で扱う「あいまいさ」は古来より哲学の対象ともなり、やはりアリストテレスによって、人間の認知と深く結び付いていることが指摘されてきた。その流れから、ベイズやラプラスによって示されたベイズの定理を始点とした主観確率がラムゼイやデ・フィネッティらによって 1930 年代に広く提唱されるようになり、コルモゴロフを頂点とする測度論を背景とした確率論とは一線を画している。

「あいまいさ」の正体をはっきり見ないまま、歴史的経緯に着目して「あいまいさ」を扱う科学理論を挙げたが、それでは落ち着きが悪いので、わずかではあるが、言語的側面から見た「あいまいさ」について見ていこう。

1.2 言語的側面から見た「あいまいさ」

言語の面から「あいまいさ」について見ていくとはいえ、いつも用いている数理・数学体系はインド・ヨーロッパを中心に展開されてきたものである。また一方で、多くの読者にとっての常用言語は日本語であろう。そのため、「あいまい」という言葉の解釈に関しても、英語と日本語を基本にして考えざるを得ない。そこで、英語と日本語における「あいまいさ」の意味について概観しよう。

1.2.1 英語の場合

「あいまい」に相当する英単語は 440 近くあるといわれており、代表的なものの一部として以下が挙げられる[†]。

[†] この中には、日本語の「あいまい」よりはむしろ「疑わしい」「不正確」の意味での単語も入っているが、異なる言語における単語が 1 対 1 に対応しないことを考えれば当然であろう。

ambivalet, ambiguous, dubious, equivocal, fuzzy, hazy, indefinite, indistinct, inexact, murky, noncommittal, obscure, questionable, suspicious, uncertain, vague

この中でも、特にアンダーラインを引いた五つの単語が重要である。

- (1) **Obscure, Vague:** 境界がはっきりしないという「漠然性」のあいまいさ。obscureの方が先に現れたが、現在は vagueの方が使われる。
- (2) **Equivocal, Ambiguous:** 二つ以上の意味を持つという「多義性」のあいまいさ。equivocalの方が先に現れたが、現在は「多義性」の意味では ambiguityの方が使われる。
- (3) **Fuzzy:** 現在は、equivocal, ambiguous, obscure, vagueの差はほとんどなくなり、現在の欧米哲学界においては vagueが「あいまい」を示す言葉として使われている。fuzzyは上述の二つの意味を包含する高次の概念として位置付けられ始めている。

すなわち、英語で「あいまい」という場合は vague、もしくは fuzzy を用いるが、その場合、「漠然性」と「多義性」の二つの意味を持つことが共通認識として存在し、必要であればそのつど区別して用いていることになる。

1.2.2 日本語の場合

一方、「あいまい」に相当する日本語は150前後あるといわれている。代表的な語彙の一部として以下を挙げよう。

あいまい, あやふや, うやむや, おぼろ, 多義的, 漠然, 不确实, 不確定, 不明瞭, 茫漠^{ぼうぼく}, ぼんやり, 紛らわしい

これらを意味によって分類すると、表 1.1 のようになる。

英語の場合、「あいまいさ」は上述のように漠然性と多義性の二つの意味を区別して使われるのに対して、表 1.1 からわかるように、日本語では「あいまい」

表 1.1 「あいまい」の類語の分類

意味	語句
二つまたはそれ以上の解釈の余地がある	あいまい, 多義的, 紛らわしい
明確に理解・表現されない	あいまい, あやふや, うやむや, 漠然, 不明瞭
固有・客観的な意味を持たない	あいまい, あやふや, 漠然, 不明瞭, 茫漠, 紛らわしい
明快さ・特異性の不足	あいまい, あやふや, おぼろ, 不確実, 茫漠
正確な制限・決定・区別がない	あいまい, あやふや, 不確定, 不明瞭

(参考: 独立行政法人情報通信研究機構)

という言葉はそれらの区別なく、すべてに共通して使われる言葉である。つまり、vague と ambiguous のどちらに対しても「あいまい」とされる。ただし、日本哲学界で「あいまいさ」という場合は陰に「多義性」のことを指し、「あいまい」に対応する英語として ambiguous が用いられており、vague が用いられることはあまりない。

個数の比較においても、英語は日本語の3倍前後あることを考えると、日本語ではさまざまな「あいまいさ」を1単語で表している一方で、英語ではさまざまな「あいまいさ」のそれぞれに単語を付けている、ということだろう。

1.2.3 言語的側面から見た「あいまいさ」の科学理論

ここまで、「あいまい」という言葉における英語と日本語の違いについて概観した。ではつぎに、言語的側面から、あいまいさを扱うための数理・数学理論にはどのようなものがあるかについて考えたい。

菅野は、国際会議での講演“On Structure of Uncertainty”(文献2))および関連著作の中で、不確かさを意味する日本語の形容詞・形容動詞(152語)、英語(436語)、ドイツ語(150語)などを収集し、KJ法によって分類することにより、不確かさのカテゴリーおよびその構造を同定している。その結果、不確かさは七つのカテゴリーに分類され、そこに人が認識している本質的不確かさとして次ページの(1)~(3)が存在するを見いだした。

- (1) 言葉の表現における曖昧性 (fuzziness of wording)
- (2) 現象の生起における蓋然性 (probability of phenomenon)
- (3) 人間の意識における漠然性 (vagueness of consciousness)

前2者について、「言葉の表現における曖昧性」を扱う科学理論は非古典論理であり、「現象の生起における蓋然性」を扱う科学理論は確率論である。これは1.1節で示した結論と一致する。

最後の「人間の意識における漠然性」だが、これこそが最も重要な問題として、ソクラテス以来数多の哲学者たちによって思惟の対象となってきたことであり、現在の科学において最も解き明かしたいことの一つである。しかし残念ながら、この漠然性を扱うことのできる数学理論に関してはいまだ存在していないし、これからも難しいだろう。

1.3 本書で扱う「あいまいさ」の科学理論

ここまで「あいまいさ」について早足で眺めてきて、「あいまいさ」を扱う科学理論は非古典論理と確率論であることがわかった。そこで、本書ではこの二つの理論に主軸を置き、それぞれの理論とそれらから派生したあいまいさを扱う理論について述べていくことにしよう。

ただし、どちらの理論についても、古典論理と集合論についての予備知識がないと理解が難しい。これらの理論のみならず、数学は古典論理と集合論をその礎としている。そもそも数学の表現はほとんどすべて古典論理の記法に基づいているし、本書の記述も、基本的に記号論理の書き方を踏襲している。また、非古典論理は古典論理で扱えないあいまいさを扱うために発展してきたものであり、確率論は集合論を基礎として作られた厳密な数学体系の中であいまいさを表現する理論である。

そこで、非古典論理と確率論について述べる前に、本書で必要な記号論理と

索引

	——の乗法定理	140	客観確率	92, 93, 97, 120,
	——の論理的解釈	188		123, 183, 187
【あ】	確率関数	154	吸収律 (通常の集合)	41
アウグスティヌス	確率空間	132	吸収律 (ファジィ集合)	72
アーラン分布	確率質量関数	154	吸収律 (命題論理)	15
アリストテレス 2~4, 44~49,	確率収束	173	共通集合 (通常の集合)	37
92, 97, 98	確率測度	132	共通集合 (ファジィ集合)	69
アンスコム	確率分布	152	共分散	159
187	確率分布関数	153	極 限	39
	確率変数	149, 150	議論領域	23
	確率密度関数	155		
【い】	可算加法族	129	【<】	
イェンゼンの不等式	可算集合	42	空事象	113
位相空間	可算無限集合	42	空集合	32, 34
一樣乱数	可測空間	130	——の公理	34
一階述語論理	可測集合	130	空 節	20
23	可能性演算子	54	区 間	127
	可能世界	56, 59	区間塊	128
【う】	加法族	126	クリスプ集合	67
ヴィレ	カルダーノ 4, 99, 100, 103,	105, 114	クリプキ	46, 59
ウカシェヴィッツ 3, 47, 83	カルナップ	46, 188	クリプキ意味論	59
	含意 (言語的真理値)	85	クリプキフレーム	59
	含意 (数値的真理値)	84	クリプキモデル	60
	含意 (命題論理)	12		
【え】	関数記号	24	【け】	
n 次元実数空間	完全加法性 (確率)	132	傾向性	123
n 次元ボレル集合体	完全加法性 (測度)	131	形式論理学	45
エルスパーグ 192, 194, 195	完全加法族	129	ケインズ 48, 116, 117, 188,	189
——のパラドックス	完全性 (融合)	22	激烈積	70
演繹推論	カント	45, 48	激烈和	70
16	ガンマ分布	169	結合 (通常の集合)	37
			結合 (ファジィ集合)	69
【お】	【き】		結合律 (通常の集合)	40
オーマン	記号論理	9	結合律 (ファジィ集合)	72
187	規 則	85	結合律 (命題論理)	15
	帰納的確率	188	結 論	85
【か】	義務論理	64	ゲーデル	82
外延性原理	逆確率	184	元	31
外延性公理			限界効用	108
解 釈				
概収束				
ガウス分布				
下極限				
拡張原理				
確 率				
——の加法定理				
——の傾向性解釈				
——の主観的解釈				

- 限界効用遞減の法則 107
 限界積 70
 限界和 70
 言語的真理値 83, 84
 原子式 10
 原子論理式 10
 健全 17
 健全性(融合) 21
 厳密含意 53, 57
- 【こ】**
- 頂 10, 24
 交換律(通常の集合) 40
 交換律(ファジィ集合) 71
 交換律(命題論理) 15
 恒偽式(命題論理) 14
 後件部 82
 恒真(様相論理) 56
 恒真式(命題論理) 14
 効用 108
 公理主義的確率 125
 誤差関数 171
 コーシー分布 172
 個人的主観主義 187
 古典論理 10
 コルモゴロフ 4, 93, 96, 107, 123~125, 135, 176
 コレクティブ 120
 根元事象 111
- 【さ】**
- サヴェッジ 187
 差事象 113
 差集合 37
 ザデー 3, 47, 66
 算術的確率 114
 三段論法(命題論理) 20
 三段論法(様相論理) 58
 三値論理 47
- 【し】**
- ジェフリーズ 188
 試行 111
 事後確率 143, 144
 指示関数 126
 事実 85
 事象 111, 133
 指数分布 168
 自然演繹 19
- 事前確率 143, 144
 時相論理 63
 実質含意 12
 ——のパラドックス 13, 46
 実数値確率変数 150
 集合 31
 集合体 127
 収束 39
 充足可能 14
 充足不能 14
 自由変項 27
 主観確率 92~94, 97, 106, 142, 183, 187, 188, 196
 述語記号 24
 述語論理 23, 28
 上極限 38
 状態 59
 証明 16
 証明可能性論理 64
 ジョルダン測度 126, 128
 信念に基づく確信 189
 信念論理 64
 信憑性 189
 真理値表 11
- 【す】**
- 推移的 61
 推移律(通常の集合) 41
 推移律(ファジィ集合) 72
 推移律(命題論理) 16
 推論 16
 数学的確率 114
 数値的真理値 83
 スホーテン 106
- 【せ】**
- 正規分布 171
 正則性公理 35
 正の内省 64
 聖ペテルブルクの
 パラドックス 107
 積事象 113
 積集合(通常の集合) 37
 積集合(ファジィ集合) 69
 積率 162
 節 20
 節形式 20
 節集合 20
 線形性(期待値) 156
- 選言(言語的真理値) 85
 選言(数値的真理値) 84
 選言(命題論理) 12
 前件部 82
 全事象 111
 全称記号 25
 全称命題 25
 全体集合 31
 選択関数 36
 選択公理 33, 35
- 【そ】**
- 相補律(通常の集合) 40
 相補律(ファジィ集合) 72
 相補律(命題論理) 15
 族 31
 測度 126, 131
 測度空間 131
 束縛変項 27
 ソクラテス 7
 存在記号 25
 存在命題 25
- 【た】**
- 対偶(命題論理) 16, 20
 対偶(様相論理) 58
 対象 31
 対称的 61
 大数
 ——の強法則 107, 176, 177
 ——の弱法則 107, 176
 代数積 70
 代数和 70
 互いに素 37
 多値論理 47
 妥当(推論) 17
 妥当(命題論理) 14
 タルタリア 102, 103
 単調 41
 単調性(確率) 133
 単調性(期待値) 156
 単調性(測度) 131
 単調性(有限加法的測度) 128
- 【ち】**
- チェビシェフの不等式 160
 置換公理 35
 逐次合理性 187

知識論理 64
 チャンスの価値 106
 中心極限定理 180
 超幾何分布 166
 重複対数の法則 122, 136
 直積(通常の場合) 38
 直積(ファジィ集合) 71
 直和 37
 直感主義論理 46

【つ】

対の公理 34
 ツエルメロ 33

【て】

定項 24
 デカルトべき 38
 点 31
 デ・フィネッティ 4, 93, 187, 188

【と】

導出 21
 導出可能 21
 導出可能性 21
 到達可能関係 59
 同値 13
 同値関係 61
 特性関数 67
 独立(確率変数) 152
 独立(事象) 140
 トートロジー(命題論理) 14
 トマス・アキナス 48, 99
 ド・メレ 98~100
 ド・モアブル 97
 ド・モルガン 46
 —の法則(集合列) 42
 —の法則(通常の場合) 40
 —の法則(ファジィ集合) 72
 —の法則(命題論理) 15

【な】

ナイト 195
 —の不確実性 195
 内包論理 63

【に】

二項係数 105

二項分布 164
 二重否定(通常の場合) 40
 二重否定(ファジィ集合) 72
 二重否定(命題論理) 15
 二値原理 52

【ね】

ネウマン 121

【は】

ハイゼンベルク 188, 196
 排中律 15
 排中律(通常の場合) 40
 排中律(ファジィ集合) 72
 ハイティング 46
 排反事象 113
 パスカル 4, 93, 98~101, 104~107, 114, 141
 パチョーリ 98~100, 102, 103, 105
 反射的 60
 反射律(通常の場合) 41
 反射律(ファジィ集合) 72
 反射律(様相論理) 58

【ひ】

非可算集合 42
 非加法性 192
 非加法性確率 193
 非加法性確率空間 193
 非加法性確率測度 193
 非減少 41
 非古典論理 11, 44
 非増加 41
 必然性演算子 54
 否定(言語的真理値) 84
 否定(数値的真理値) 83
 否定(命題論理) 11
 標準化 161
 標準偏差 159
 標本空間 111, 133
 標本点 111, 133
 ヒルベルト 20
 ヒンチン 136
 頻度確率 119

【ふ】

ファジィ関係 73
 ファジィ集合 66, 67

ファジィ真理値 83
 ファジィ推論 85
 ファジィ命題変数 80
 ファジィ理論 66
 ファジィ論理 47
 フィッシャー 121
 プール 46
 フェルマー 4, 93, 98~101, 104, 106, 107, 114, 141
 フォレストターニ 103
 フォン・ミーゼス 93, 119~122, 135
 不確実性回避 195
 複合事象 111
 複合命題 10
 付値関数 56
 負の内省 64
 部分集合 31
 ブラウワー 46, 47
 プラトン 44
 フレーゲ 46
 フレンケル 33
 分散 157, 158
 分出公理 35
 分配律(集合列) 42
 分配律(通常の場合) 40
 分配律(ファジィ集合) 72
 分配律(命題論理) 15
 分布収束 174

【へ】

ヘイズ 4, 92, 142, 184
 —の定理 142
 ヘイズ推定 146, 184
 ヘイズ・ラプラスの定理 142
 ベヴェローネ 103
 べき集合 34
 —の公理 34
 べき等律(通常の場合) 40
 べき等律(ファジィ集合) 71
 べき等律(命題論理) 15
 ベルヌーイ 92, 107~109, 176, 177, 183, 189~191
 ベルヌーイ試行 109
 ベルヌーイ分布 164
 変項 24

【ほ】

ポアソンの少数の法則 165

ポアソン分布	165	モーメント	162	リーマン積分	126
ホイヘンス	106, 156	モーメント母関数	163	理由不十分の原理	116
包含関係	34	モリス	49	量化	23
補集合 (通常の集合)	37	モンティ・ホール問題	146	量化記号	11, 25
補集合 (ファジィ集合)	70				
ポパー	93, 119, 122, 123				
ボレル	107, 122, 176, 189				
ボレル集合	130				
ボレル集合体	130				
【ま】		【ゆ】		【る】	
交わり (通常の集合)	37	有界加法的測度	126, 128	ルイス	3, 46, 53
交わり (ファジィ集合)	69	ユークリッド的	61	累積確率分布関数	153
マッキンゼー	46	有限加法性	129	ルベグ積分	126
マックスミン原理	194	有限加法族	127		
マムダニ	83	有限集合	42		
マルコフの不等式	160	有限劣加法性	129		
マルチプル期待値	194	融合	21		
マルチプルプレーヤ	194	融合原理	20		
		融合節	21		
		尤度	67		
		【よ】		【れ】	
【み】		要素	31	レヴィ	122
ミーゼス	4	様相	51	劣加法性	192
密度関数	155	様相記号	54	劣加法性 (確率)	133
		様相論理	51, 53	レッシュャー	82
		——の構造	56	連言 (言語的真理値)	85
		要素命題	10	連言 (数値的真理値)	84
		余事象	113	連言 (命題論理)	11
				連鎖的	60
				連続一様分布	167
				連続確率分布	154
				連続確率変数	154
				【ろ】	
【む】		【ら】		ロビンソン	20
無限公理	35	ライブニッツ	189	論理式	10
無限集合	42	ラッセル	33	論理式 (述語論理)	28
無差別の原理	116	ラプラス	4,	論理式 (命題論理)	13
矛盾律 (通常の集合)	40	54, 93, 95, 107, 114, 116,		論理積	68
矛盾律 (ファジィ集合)	72	117, 119, 142, 184		論理的解釈	188
矛盾律 (命題論理)	15	——の悪魔	54	論理的帰結 (命題論理)	18
		ラムゼイ	4, 93, 187, 188	論理的帰結 (様相論理)	57
				論理和	68
				【わ】	
【め】		【り】		和事象	113
命題	10	離散一様分布	164	和集合 (通常の集合)	37
命題変数	10	離散確率分布	154	和集合 (ファジィ集合)	69
命題論理	14	離散確率変数	154	和の公理	34
メンバーシップ関数	67	リスク	195		
メンバーシップのグレード	67	リテラル	10		
【も】					
モーダスポネンス	19, 21, 86				

【A】		additive family	126	atomic formula	10
accessibility relation	59	algebra	127	axiomatic probability	125
addition theorem of probability	134	algebraic product	70	axiom of choice	33, 35
		algebraic sum	70	axiom of empty set	34
		antecedent part	82	axiom of extensionality	34

axiom of infinity 35
 axiom of power set 34
 axiom of regularity 35
 axiom of replacement 35
 axiom of separation 35

【B】

Bayes estimation 146, 184
 Bayes-Laplace theorem 142
 Bayes' theorem 142
 Bernoulli distribution 164
 Bernoulli trials 109
 binomial distribution 164
 Borel algebra 130
 Borel set 130
 bounded product 70
 bounded sum 70
 bound variable 27

【C】

Cauchy distribution 172
 central limit theorem 180
 characteristic function 67
 Chebyshev's inequality 160
 choice function 36
 class 31
 classical logic 10
 clausal form 20
 clause 20
 collective 120
 complement 37, 70
 complementary event 113
 completely additive family 129
 completeness 22
 complete additivity 131, 132
 compound event 111
 compound proposition 10
 conjunction 11, 84, 85
 consequent part 82
 consistency 121
 constant 24

continuous probability distribution 154
 continuous random variable 154
 continuous uniform distribution 167
 contraposition 20
 convergence 39
 converges almost surely 174
 converges in distribution 174
 converges in probability 173
 coprime 37
 countable set 42
 countably additive family 129
 countably infinite set 42
 covariance 159
 credibility 189
 crisp set 67
 cumulative probability distribution function 153

【D】

deducible 21
 deductive inference 16
 density function 155
 deontic logic 64
 difference event 113
 difference set 37
 direct product 38, 71
 direct sum 37
 direct union 37
 discrete probability distribution 154
 discrete random variable 154
 discrete uniform distribution 164
 disjunction 12, 84, 85
 domain of discourse 23
 drastic product 70
 drastic sum 70

【E】

element 31
 elementary event 111
 elementary proposition 10
 Ellsberg's Paradox 192
 empty clause 20
 empty event 113
 empty set 32, 34
 equivalence 13
 equivalence relation 61
 Erlang distribution 170
 error function 171
 Euclidean 61
 event 111, 133
 exclusive event 113
 existential proposition 25
 existential quantifier 25
 expected value 155
 exponential distribution 168
 extension principle 78

【F】

fact 85
 family 31
 finitely additive family 127
 finitely additive measure 126, 128
 finite additivity 129
 finite nonadditivity 129
 finite set 42
 first-order predicate logic 23
 free variable 27
 frequency probability 119
 function symbol 24
 fuzzy inference 85
 fuzzy logic 47
 fuzzy propositional variable 80
 fuzzy relation 73
 fuzzy set 66, 67
 fuzzy theory 66
 fuzzy truth value 83

- 【G】**
gamma distribution 169
Gaussian distribution 171
- 【H】**
hypergeometric distribution 166
- 【I】**
implicaitonal paradoxes 13
implication 12, 84, 85
inclusion 34
independent 140, 152
indicator function 126
inductive probability 188
infinite set 42
inrefence 16
intensional logic 63
interpretation 14
intersection 37, 69
interval 128
intuitionistic logic 46
- 【J】**
Jensen's inequality 156
join 37, 69
Jordan measure 126, 128
- 【K】**
Knightian uncertainty 195
kollektiv 120
Kripke frame 59
Kripke model 60
Kripke semantics 59
- 【L】**
law of diminishing
 marginal utility 107
law of the iterated
 logarithm 122
Lebesgue integral 126
likelihood 67
- limit 39
limit inferior 39
limit superior 38
linearity of expected value 156
linguistic truth value 83
literal 10
logical consequence 18, 57
logical interpretant of
 probability 188
logical product 68
logical sum 68
logic of belief 64
logic of knowledge 64
- 【M】**
marginal utility 108
Markov's inequality 160
mass of interval 128
material implication 12
mathematical probability 114
measurable set 130
measurable space 130
measure 126, 131
measure space 131
membership function 67
membership grade 67
modality 51
modal logic 51, 53
modal operator 54
modus ponens 19, 21, 86
moment 162
moment-generating
 function 163
monotone 41
monotonicity 128, 131, 133
monotonicity of expected
 value 156
Monty Hall problem 146
moral certainty 189
multiple expected value 194
multiple player 194
- multiplication theorem of
 probability 140
multi-valued logic 47
- 【N】**
natural deduction 19
n-dimensional Borel
 algebra 130
n-dimensional real space 38
necessity operator 54
negation 11, 83, 84
negative introspection 64
nonadditive probability 193
nonadditive probability
 measure 193
nonadditive probability
 space 193
nonadditivity 192
non-classical logic 11, 44
non-decreasing 41
non-increasing 41
non-tautology 14
normal distribution 171
numerical truth value 83
- 【O】**
object 31
objective probability 92
- 【P】**
pairing axiom 34
personalism 187
point 31
Poisson distribution 165
Poisson's law of small
 numbers 165
positive introspection 64
possibility operator 54
possible world 56, 59
posterior probability 143,
 144
power 38
power set 34

- | | | | | | |
|---|----------|---|---------------|---------------------------|------------|
| predicate logic | 23, 28 | resolvent | 21 | term | 10, 24 |
| predicate symbol | 24 | result | 85 | three-valued logic | 47 |
| principle of bivalence | 52 | Riemann integral | 126 | topological space | 36 |
| principle of extension | 52 | risk | 195 | transitive | 61 |
| principle of indifference | 116 | rule | 85 | trial | 111 |
| principle of insufficient
reason | 116 | | | truth table | 11 |
| prior probability | 143, 144 | | | | |
| probability | 132 | 【S】 | | 【U】 | |
| probability density function | 155 | sample point | 111, 133 | uncountable set | 42 |
| probability distribution | 152 | sample space | 111, 133 | uniform random number | 168 |
| probability distribution
function | 153 | satisfiable | 15 | union | 37, 69 |
| probability function | 154 | sequential rationality | 187 | universal proposition | 25 |
| probability mass function | 154 | serial | 60 | universal quantifier | 25 |
| | | set | 31 | universal set | 31 |
| probability measure | 132 | set of clauses | 20 | unsatisfiable | 14 |
| probability space | 132 | sound | 17 | utility | 108 |
| product event | 113 | soundness | 21 | | |
| proof | 16 | standardization | 161 | 【V】 | |
| propensity | 123 | standard deviation | 159 | valid | 14, 17 |
| propensity interpretation of
probability | 122 | state | 59 | valuation function | 56 |
| proposition | 10 | St. Petersburg paradox | 107 | variable | 24 |
| propositional logic | 14 | strict implication | 53, 57 | variance | 157, 158 |
| propositional variable | 10 | strong law of large numbers | 107, 176, 177 | | |
| provability logic | 64 | structure of modal logic | 56 | 【W】 | |
| | | subadditivity | 192 | waarde van kans | 106 |
| 【Q】 | | subjective interpretation of
probability | 183 | weak law of large numbers | 107, 176 |
| quantification | 23 | subjective probability | 92, 183 | well-formed formula | 10, 13, 28 |
| quantifier | 11, 25 | subset | 31 | wff | 10, 13, 28 |
| | | sum | 37, 69 | whole event | 111 |
| 【R】 | | sum axiom | 34 | ~~~~~ | |
| random variable | 149, 150 | sum event | 113 | σ -加法族 | 129 |
| real-valued random variable | 150 | syllogism | 20 | σ -集合体 | 129 |
| | | symbolic logic | 9 | σ -additive family | 129 |
| reflexive | 60 | symmetric | 61 | σ -field | 129 |
| resolution | 21 | | | χ^2 分布 | 170 |
| resolution principle | 20 | 【T】 | | χ^2 distribution | 170 |
| | | tautology | 14 | | |
| | | temporal logic | 63 | | |

—— 著者略歴 ——

1990 年 早稲田大学理工学部電子通信学科卒業
1994 年 早稲田大学助手
1995 年 早稲田大学大学院理工学研究科博士
後期課程修了（電気工学専攻）
博士（工学）
1997 年 東海大学講師
2001 年 筑波大学講師
2004 年 筑波大学助教授～准教授
2013 年 筑波大学教授
現在に至る

あいまいさの数理

Mathematical Principles of Fuzziness and Probability

© Yasunori Endo 2015

2015 年 4 月 30 日 初版第 1 刷発行

検印省略

著 者 えん どう やす のり
遠 藤 靖 典
発 行 者 株式会社 コロナ社
代 表 者 牛来真也
印 刷 所 三美印刷株式会社

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844・電話 (03) 3941-3131(代)

ホームページ <http://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-07925-8

(横尾) (製本:SBC)

Printed in Japan



本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられております。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めておりません。

落丁・乱丁本はお取替えいたします