

数理工学のための線形代数

— 線形代数の新しい地平 —

佐藤 一宏 著

コロナ社

ま え が き

数理工学とは、数学の理論を基盤にして工学や情報科学の諸問題を解析し、その解決に役立つ新しい数的手法を生み出すことを目的とする学問領域である。応用数学の一分野にとどまらず、工学的課題から新しい数学的概念や道具を引き出す点に大きな特徴がある。例えば、システム制御理論や最適化、信号処理やネットワーク解析、機械学習や暗号理論など、数理工学は現代の社会や技術に直結する幅広い分野で中心的な役割を担っている。

線形代数学は数理工学のあらゆる分野で基盤となる学問であり、行列演算や固有値問題、標準形などの理論が中心的な役割を果たしている。しかし、従来の教科書で展開される「体上のベクトル空間」を前提とした理論だけでは、整数環や多項式環を背景にした問題、データ解析や暗号といった現代的課題を十分に扱うことはできない。本書は、そうした背景のもとで、数理工学の多様な課題に通用する「広義の線形代数」を体系的に学べるように執筆したものである。読者が抽象的な線形代数学的視点と数理工学的視点を往復しながら学び進められるように、一冊の中で両者を結び付けることを目指している。

本書の大きな特徴は、ジョルダン標準形の位置付けを見直した点にある。従来の線形代数の教科書では、行列のジョルダン標準形の導出が学習の一つの到達点とされることが多い。しかし本書では、それを「広義の線形代数」の方法論を応用する題材と捉え直し、ユークリッド整域上のスミス標準形の理論を経由して体系的に導出する。こうすることで、複素数体上におけるジョルダン標準形が、より一般的な「ユークリッド整域を基盤にした加群や行列の分解理論」の特殊な姿として自然に現れることを明らかにし、標準形の理論を統一的に理解できるよう構成している。さらに、ジョルダン標準形の応用として、非負行列の理論とその応用を詳しく解説する。特に筆者自身の研究とも関わる、有向

グラフに対応するグラフラプリアンのクロン縮約については、その数理的性質と意義を詳細に論じる。

また、本書の「広義の線形代数」に含まれる代数学の考え方が多様な数理工学の問題において実際に役立つことを実感してもらうために、高速フーリエ変換 (FFT) の理論も取り上げる。多項式の積を直接計算すると大きな手間がかかるが、「多項式を特定の点で評価し、その値を使って積をとり、最後にもとの形に戻す」という方法を利用すれば効率化できる。FFTはこの方法を再帰的に分解したアルゴリズムである。本書ではこの観点を通して、線形代数の考え方がどのように具体的なアルゴリズムと結び付き、数理工学に応用されていくのかを解説する。さらに、ジョルダン標準形導出の際に用いるスミス標準形が、トポロジカルデータ解析やシステム制御理論などの数理工学においてどのように応用されているかを簡潔に紹介した。

本書の構成はつぎのとおりであり、**図 1** がその全体像である：第 1 章は集合・写像の基礎事項を整理し、さらに線形代数の教科書ではあまり扱われない商集合を導入する。商集合は抽象的な概念ではあるが、本書全体の理解において重要な役割を果たすため、特に丁寧に解説する。第 2 章では本書全体を通して中核となるユークリッド整域を中心に、代数学の基礎概念を詳述する。第 3 章では加群と準同型写像を取り上げ、ベクトル空間との違いを明確にしつつ、加群論の基本的枠組みを与える。第 4 章では整域上の行列式を定義から性質に至るまで体系的に構築し、後続の議論に備える。第 5 章ではエルミート標準形、ス

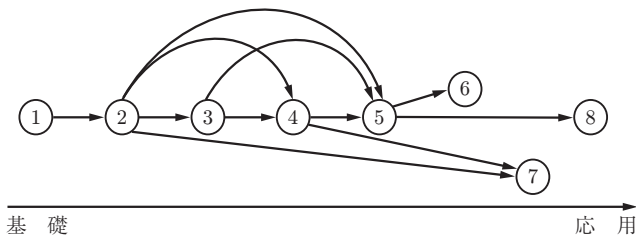


図 1 本書の全体像。左から右へ基礎から応用へ展開し、矢印は章間の内容の利用を示す

ミス標準形, ジョルダン標準形という三つの標準形を取り上げ, 特にジョルダン標準形と複素ベクトル空間の直和分解の関係を詳しく論じる。第6章では非負行列の一般論を展開し, その応用としてマルコフ連鎖を導入し, さらにグラフラプラシアンのカロン縮約について詳細に解説する。第7章では多項式の積とFFTの関係を線形代数的観点から明らかにし, さらにFFTの深層学習モデルへの応用に触れる。最後に第8章では, 本書で整えた「広義の線形代数」が具体的に数理工学のどのような分野に活用されるかを三つの視点から示す。すなわち, トポロジカルデータ解析, 代数解析学に基づくシステム制御, そして耐量子暗号の有力候補である格子暗号である。

「数理工学のための線形代数」という題が示すとおり, 本書は工学的課題に取り組むための線形代数の拡張を目指している。新しい問題に出会ったときに, 適切な道具を選び, 必要ならば道具そのものを創造できる — そのための足腰を, 本書で養っていただければ幸いである。

謝辞: 本書は井上大輔氏 (株式会社豊田中央研究所数理工学研究領域), 岩出大毅氏 (東京大学大学院情報理工学系研究科), 梅津光汰氏 (東京大学大学院情報理工学系研究科), 坂元佑弥氏 (株式会社フィックスターズ), 先名健一氏 (合同会社QRテクノロジー) のコメントによってさまざまな点で改善されました。ここに深く感謝申し上げます。また, 本書の執筆が長期にわたり, 締切延長にご理解を賜りながら, 終始温かくご支援くださったコロナ社の皆様に心より御礼申し上げます。そのご寛容とご理解があつてこそ, 本書を世に出すことができました。最後に, 執筆を支えてくれた妻と娘には, 日々の励ましに心から感謝します。

2026年1月

佐藤一宏

目 次

1. 準 備

1.1 集 合	1
1.2 写 像	3
1.3 商 集 合	8
章 末 問 題	14

2. 代数学の基本事項

2.1 本章の全体像	16
2.2 群	16
2.2.1 群の作用と軌道	19
2.2.2 部分群と剰余類	20
2.2.3 正規部分群と剰余群	28
2.2.4 群の準同型定理	31
2.3 環 と 体	36
2.3.1 環の重要な例：行列環	39
2.3.2 可換環の重要な例：多項式環	41
2.3.3 部 分 環	42
2.3.4 イ デ ア ル	43
2.3.5 剰 余 環	48
2.3.6 環 の 準 同 型	49
2.3.7 多項式への代入	51
2.3.8 環の直積と中国剰余定理	56

2.4 整域	60
2.4.1 商体	62
2.4.2 最大公約元	65
2.4.3 ユークリッド整域	68
2.4.4 単項イデアル整域	76
2.4.5 素元と既約元	80
章末問題	83

3. 加群

3.1 加群の定義	85
3.2 加群の間の準同型写像	89
3.3 加群の直和と準同型写像の直和	91
3.3.1 外部直和：複数の加群から新たな加群を構成	92
3.3.2 内部直和：加群から複数の部分加群に分解	93
3.3.3 外部直和と内部直和の関係	96
3.3.4 加群の直和の同型写像	97
3.3.5 準同型写像の直和	98
3.4 自由加群	99
3.5 ベクトル空間	102
3.6 整域上の行列のランク	108
3.7 自由加群の性質	113
3.8 自由加群の間の準同型写像の表現行列	117
3.9 ユニモジュラ行列	120
3.10 基本変形と基本行列	121
3.11 基底の変換	122
3.12 不変部分加群と表現行列	126
章末問題	129

4. 整域上の行列の行列式

4.1	行列式の基本的な性質	131
4.2	逆行列の公式	141
4.3	コーシー・ビネの公式	145
4.4	行列式を用いた行列のランクの特徴付け	147
4.5	行列式因子	151
4.6	ケーリー・ハミルトンの定理	152
4.7	シュア補行列と商公式	156
	章末問題	160

5. ユークリッド整域上の行列の標準形

5.1	本章の全体像	161
5.2	標準形導出のための準備	162
5.3	エルミート標準形	166
5.4	スミス標準形	169
5.5	ジョルダン標準形	172
5.6	固有値, 固有ベクトル, (一般化) 固有空間	180
5.6.1	線形写像の固有値と固有ベクトル	180
5.6.2	固有値の幾何学的重複度と代数的重複度	182
5.6.3	一般化固有空間	186
5.7	対角化可能な複素正方行列	189
5.8	ジョルダン標準形の応用例: 離散時間線形システムの安定性	191
5.9	本章でユークリッド整域上の行列を考えた理由	196
	章末問題	197

6. 非負行列とその応用

6.1 非負行列の理論	198
6.1.1 非負行列と有向グラフ	198
6.1.2 非負行列の既約性と可約性	201
6.2 マルコフ連鎖	212
6.3 グラフラプラシアンとそのクロン縮約	216
6.3.1 クロン縮約の存在性	220
6.3.2 クロン縮約によって得られた行列の性質	223
6.3.3 クロン縮約後のグラフの性質	227
6.3.4 本節の結果に関する注意	232
章末問題	232

7. 多項式の積と高速フーリエ変換

7.1 計算量について	233
7.2 多項式の評価と補間	234
7.3 多項式の積の計算法	235
7.4 離散フーリエ変換と高速フーリエ変換	235
7.4.1 離散フーリエ変換	235
7.4.2 高速フーリエ変換	239
7.4.3 線形代数の観点からの高速フーリエ変換	246
7.4.4 畳み込みと多項式の積の同値性	250
7.5 線形システムと畳み込み	255
7.5.1 単一入力単一出力の場合	256
7.5.2 複数入力複数出力の場合	259
7.6 高速フーリエ変換の深層状態空間モデルへの応用	260
章末問題	263

8. 数理工学への案内

8.1	トポロジカルデータ解析	265
8.2	代数解析学に基づくシステム制御理論	266
8.3	格子暗号	267
	付 録	268
A.1	対 称 群	268
A.2	ノ ル ム	275
	引用・参考文献	281
	章末問題解答	283
	索 引	298

⋮

$$\dots = [-1] = [m - 1] = [2m - 1] = \dots$$

が成り立つ。すなわち、 $k_1 \neq k_2$ かつ $k_1, k_2 \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$ とすると、 $[k_1]$ と $[k_2]$ は互いに素で、 $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup \dots \cup [m - 1]$ であり

$$\mathbb{Z}/\sim_m = \{[0], [1], \dots, [m - 1]\}$$

が成り立つ。

特に、 $m = 7$ の場合、 $\mathbb{Z}/\sim_7 = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5], [6]\}$ の元は図 1.2 のようにカレンダーの曜日と対応付けられる。すなわち、図 1.2 は 2021 年のカレンダーの一部を抜き取って表示しているが、2021 年 4 月 4 日を 0 とすると図のようにそれぞれの日に整数を割り当てることができる[†]。このとき、割り当てた整数を 7 で割った余りが 0 のとき日曜日、1 のとき月曜日、2 のとき火曜日、3 のとき水曜日、4 のとき木曜日、5 のとき金曜日、6 のとき土曜日とすると図 1.2 のようにまとめることができる。したがって

$$\text{カレンダー} = \text{日} \cup \text{月} \cup \text{火} \cup \text{水} \cup \text{木} \cup \text{金} \cup \text{土}$$

であり、日は [0]、月は [1]、火は [2]、水は [3]、木は [4]、金は [5]、土は [6] に対応していることがわかる。

カレンダー(\mathbb{Z}/\sim_7)						
日([0])	月([1])	火([2])	水([3])	木([4])	金([5])	土([6])
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
3/28(= -7)	3/29(= -6)	3/30(= -5)	3/31(= -4)	4/1(= -3)	4/2(= -2)	4/3(= -1)
4/4(= 0)	4/5(= 1)	4/6(= 2)	4/7(= 3)	4/8(= 4)	4/9(= 5)	4/10(= 6)
4/11(= 7)	4/12(= 8)	4/13(= 9)	4/14(= 10)	4/15(= 11)	4/16(= 12)	4/17(= 13)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

図 1.2 カレンダーの曜日と \mathbb{Z}/\sim_7 の元の関係

例 1.12 は有向グラフの強連結性に関するものであり、第 6 章で述べるように

[†] 2021 年にこの部分を書いていた。出版まで長い年月をかけてしまった。

と書ける。また、任意の $y \in N$ に対して $[y] = [0]$ である。この R -加群 M/N を M の N による剰余加群 (residue module) または商加群 (quotient module) という。剰余類 $[x] \in M/N$ は $x, y \in M$ が $x - y \in N$ を満たすとき $[x] = [y]$ が成り立つ。したがって、 $[x]$ の表現において N の元は区別されず代表元を変えても同じ剰余類を表す (図 3.1 参照)。

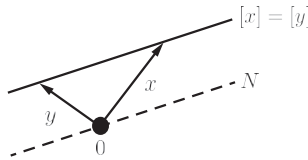


図 3.1 剰余類の特徴

例 3.2 R は可換環, $I \subset R$ はイデアルのとき, I は R の部分加群でもあるので, 剰余環 R/I は剰余加群でもある。ただし, 剰余環としては $a+I, b+I \in R/I$ に対し積 $(a+I) \cdot (b+I) \in R/I$ が定義されていたが, 剰余加群としては $r \in R, a+I \in R/I$ に対しスカラー倍 $r(a+I) = ra+I \in R/I$ が定義されるという違いがある。また, $R/I = \text{span}_R\{1+I\}$ と書けるので R/I は巡回加群でもある。

例 3.3 $f(x) := a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{C}[x]$ ($a_n \neq 0$) とすると $(f(x)) := \{f(x)q(x) \mid q(x) \in \mathbb{C}[x]\}$ は $\mathbb{C}[x]$ の部分加群である。よって, 剰余群 $\mathbb{C}[x]/(f(x))$ が定義できる。任意の $[g(x)] \in \mathbb{C}[x]/(f(x))$ に対して, $r(x) \in \mathbb{C}[x]$ によるスカラー倍を $r(x)[g(x)] := [r(x)g(x)]$ と定めると剰余群 $\mathbb{C}[x]/(f(x))$ は $\mathbb{C}[x]$ -剰余加群になる。また, $\mathbb{C}[x]/(f(x)) = \text{span}_{\mathbb{C}[x]}\{1 + (f(x))\}$ なので $\mathbb{C}[x]/(f(x))$ は巡回加群でもある。

例 3.2 と例 3.3 の剰余加群は巡回加群だが, 剰余加群 M/N はいつも巡回加群とは限らない。例えば, $M = R^2, N = \{0\}$ とすると, $M/N = R^2$ だが, $M/N = \text{span}_R\{x\}$ となる $x \in R^2$ は存在しない。

の基底から構成すると線形写像 $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ の表現行列はブロック対角行列であり、対角成分は $A|_{V_{ij}}$ の表現行列からなる。

この $A|_{V_{ij}}$ の表現行列はどこまで簡単になるだろうか？ 対角行列が最も簡単な行列である[†]ので、対角行列にどこまで近づけられるかを調べたい。

線形写像 $A|_{V_{ij}}: V_{ij} \rightarrow V_{ij}$ の表現行列を単純化することは、3.11 節で述べたように、部分空間 V_{ij} ($i = s, s+1, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k_i$) の基底を適切に選ぶことに相当する。式 (5.19) のように部分空間 V_{ij} と $\mathbb{C}[x]/((x - \lambda_{ij})^{m_{ij}})$ は $\mathbb{C}[x]$ -加群として同型なので、系 3.17 より $\mathbb{C}[x]/((x - \lambda_{ij})^{m_{ij}})$ の基底を F_{ij}^{-1} で写すと V_{ij} の基底になる。そこで、 $\mathbb{C}[x]/((x - \lambda_{ij})^{m_{ij}})$ の基底を例 3.39 のように選んでみよう。すなわち

$$[(x - \lambda_{ij})^k] \quad (k = 0, 1, \dots, m_{ij} - 1)$$

を $\mathbb{C}[x]/((x - \lambda_{ij})^{m_{ij}})$ の基底として選んだとしよう。そうすると

$$v_{ij,k} := F_{ij}^{-1}([(x - \lambda_{ij})^k]) \quad (k = 0, 1, \dots, m_{ij} - 1) \quad (5.20)$$

が V_{ij} の基底になる。この $v_{ij,k}$ ($k = 0, 1, \dots, m_{ij} - 1$) を V_{ij} の基底として採用すると、例 3.39 と同様の議論より、 $A|_{V_{ij}}$ の表現行列として

$$J_{ij} := \begin{pmatrix} \lambda_{ij} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{ij} & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{ij} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{ij} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m_{ij} \times m_{ij}} \quad (5.21)$$

が得られる。

したがって、 \mathbb{C}^n の部分空間 V_{ij} ($i = s, s+1, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k_i$) の基底を式 (5.20) のように定めて、 \mathbb{C}^n の基底をこれらから構成すると、定理 3.46 より、行列 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ の表現行列として

[†] ベクトルに対角行列を掛けることは、対角行列の各対角要素でベクトルの対応する成分をそれぞれ乗算する操作になり、一般の正方行列とベクトルの乗算に比べて簡単である。

のことである。なお、シューア補行列は 4.7 節で定義している。 α の点を境界点 (boundary node), α^c の点を内部点 (interior node) ということがあり、この言葉を用いると、グラフラプラシアン L のクロン縮約は内部点をなくし境界点だけを残す縮約法だといえる。

グラフラプラシアン L のクロン縮約である式 (6.40) が意味のあるものになるためには以下を考察する必要があるだろう：

- (i) そもそも式 (6.40) が定義されるだろうか？ すなわち、 $L[\alpha^c, \alpha^c]$ は可逆だろうか？
- (ii) 式 (6.40) が定義されたとして、 L_{red} もなんらかのグラフのグラフラプラシアンになっているのだろうか？
- (iii) 式 (6.40) が定義され L_{red} がなんらかのグラフのグラフラプラシアンになることがわかったとして、 L_{red} はもとのグラフラプラシアン L とどのような関係があるだろうか？ すなわち、 L_{red} に対応するグラフはもとのグラフ G とどのような関係があるだろうか？

以降で詳しく見るように (i) と (ii) は肯定され、(iii) はグラフの強連結性が保存されることなどがいえる。例えばもとのグラフ G として **図 6.7** を考えたときに、クロン縮約をすると **図 6.8** のようになる。このようになる理由は 6.3.3 項で明らかになる。

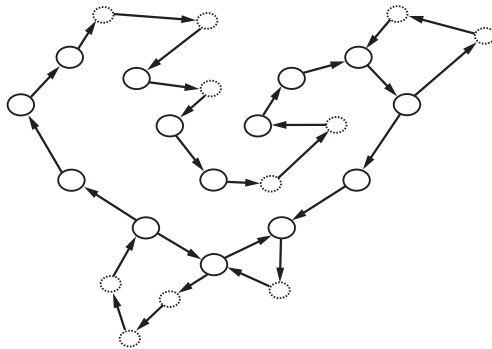


図 6.7 もとのグラフ G の例。実線の丸が α の点 (境界点) を表し、点線の丸が α^c の点 (内部点) を表す

である。式 (7.32) は単一入力単一出力の場合の畳み込みと同じ形をしているので、FFT を利用して計算することができる。すなわち、この場合には y_0, y_1, \dots, y_{L-1} は FFT を利用して $O(mpL \log_2 L)$ の計算量で求めることができる。

7.6 高速フーリエ変換の深層状態空間モデルへの応用

離散時間線形システム (7.26) の行列 A を対角行列としたモデルは図 7.1 のような深層状態空間モデル (deep state space model) といわれる深層モデルの中で利用されている。実際に、図 7.1 の複数の対角状態空間層の中に A を対角行列とした式 (7.26) が組み込まれている (離散時間線形システム (7.26) に加えて非線形変換や線形変換を行う部分も含まれる)^{†1}。この深層状態空間モデルは大雑把には以下の手順で構築される：

- (i) 深層状態空間モデルの初期パラメータを定める^{†2}。
- (ii) L 個の入力データを一括で与えて、畳み込み (7.27) の部分で FFT と iFFT を利用して、 L 個の出力データを一括で得る^{†3}。



図 7.1 深層状態空間モデル

^{†1} 離散時間線形システム (7.26) の行列 A, B, C は時間 k に依存しない定数行列である。しかし、文献 24) の第 7 章で紹介されているように、Mamba などの深層モデルではこれらのパラメータ行列を時間 k に依存させる手法が提案されている。このような時間依存モデルを導入することで、入出力特性の変化をより精緻に捉え、多様なタスクにおいて従来以上に高精度な予測や制御が可能となる場合がある。しかしながら、深層モデルを時間依存の非線形システムとして扱うことになり、安定性などのシステム理論的解析は、時間不変システムに比べて著しく難解になる。特に、ダイナミクスが未知の実システムの代理モデルとして用いる場合、モデル誤差が蓄積して予測が発散するリスクや、理論的保証が得られず実運用での信頼性を損なうリスクがある。したがって、パラメータが時間依存する際には、モデルの表現力向上とシステム理論的解析の容易性とのトレードオフを慎重に評価する必要があるだろう。

^{†2} 初期パラメータの定め方は多数提案されている。

^{†3} 深層状態空間モデルのパラメータが定まっていなくて深層状態空間モデルの出力は計算できないので (i) でパラメータを定める必要がある。

索 引

【あ】	【き】	
アダマール積 254	幾何学的重複度 183	グラフラプリアン 217
アーベル群 18	奇置換 272	クラメル <small>の</small> 公式 144
余り 69	基底 100	クロン縮約 218
アルゴリズム 233	—— <small>の</small> 変換行列 124	群 16
安定 194	基点 15	【け】
	軌道 19	結合則 17
【い】	基本行列 121	元 1
位数 23	既約 201	原始 n 乗根 24
一意分解整域 84	逆行行列 40, 120	【こ】
一般化固有空間 186	既約元 80	交換法則 18
一般線形群 121	逆元 17	格子暗号 267
イデアル 43	逆高速フーリエ変換 246	合成写像 7
因数定理 72	逆写像 7	高速フーリエ変換 246
インパルス応答 256	逆像 4	交代性 135
	既約多項式 80	(法 m で) 合同 8
【う、え】	逆離散フーリエ変換 236	恒等写像 7
埋め込み 50	境界点 130	恒等置換 268
枝 12	行確率行列 218	公約元 65
エルミート標準形 167	共通集合 3	互換 271
円周群 24	行の基本変形 121	コーシー・ビネ <small>の</small> 公式 145
	行ランク 108	固有空間 182
【か】	行列 39	固有値 181
階数 113	行列環 40	固有ベクトル 181
階段型 167	行列式 131	【さ】
外部直和 92	行列式因子 151	最小多項式 73
ガウス整数環 62	強連結 12	最大公約元 65
可換環 38	強連結成分 13	差集合 3
可逆 37	強連結成分分解 13	差積 272
核 32	極限 280	左右等価 149
加群 85	極限分布 214	作用 19
合併集合 3	極大イデアル 84	作用素ノルム 277
可到達部分集合 232	【く】	【し】
可約 201	空集合 1	次元 103, 113
環 36	偶置換 272	次元定理 111
環準同型 49		

次 数	42, 69
次数付き加群	266
自然な射影	10
自明なイデアル	43
写 像	3
斜 体	38
シューア補行列	156
自由加群	100
自由元	130
集 合	1
収 束	279
主小行列	158
出次数	217
主列ベクトル	169
巡回加群	87
巡回群	22
巡回畳み込み	251
巡回置換	268
準同型写像	31, 89
準同型定理	34
商	69
商加群	88
小行列	141
小行列式	141
商空間	106
商公式	158
商集合	9
上昇列	83
商 体	64
商ベクトル空間	106
剰余加群	88
剰余環	49
剰余群	30
剰余類	30
ジョルダン細胞	179
ジョルダン標準形	172, 179
ジョルダンブロック	179
深層状態空間モデル	260
【す】	
推移的	20
スペクトル半径	195
スミス標準形	169

【せ】

整 域	60
正規部分群	28
正行列	198
制限写像	4
斉時的マルコフ連鎖	212
生成系	100
生成元	22
積	44
積集合	3
漸近安定	194
漸近計算量	233
線形結合	100
線形写像	89
線形従属	99
線形独立	99
全 射	6
全単射	6

【そ】

素イデアル	83
像	4, 32
相似変換	125
素 元	80
素元分解	84
素 数	80

【た】

体	38
対角化可能	190
対角行列	40
台集合	269
対称群	268
代数的重複度	184
代 入	52
代表元	9
互いに素	
(coprime)	47, 66
(disjoint)	3
多項式	41
多項式環	41
多項式補間	234

多重線形性	134
畳み込み	250, 257
畳み込み定理	253
単位行列	40
単位元	17, 37
単因子	171
単 元	37
単元群	37
単項イデアル	43
単項イデアル整域	76
単 射	6
単模行列	121

【ち】

置 換	268
置換行列	199
中国剰余定理	57
直 積	3
直 和	3

【て】

定常分布	214
デルタ・スター変換	232

【と】

同型写像	31, 89
同 値	9
同値関係	8
同値変換	125
同値類	9
同 伴	65
特異値分解	125
特殊線形群	36
特性行列	172
特性多項式	172

【な】

内部直和	93
内部点	219

【に】

二項演算	7, 36
二項関係	3

【ね】		【へ】		有向非巡回グラフ	14
ねじれ加群	130	ベクトル	86	有向道	12
ねじれ元	130	ベクトル空間	86	誘導ノルム	277
【の】		ページランク	216	ユークリッド関数	69
ノイマン級数	195	ベズーの等式	76	ユークリッド整域	69
ノルム	275	ペロン・フロベニウス根	208	ユークリッドの互除法	73
ノルム空間	275	ペロン・フロベニウスの定理	204	ユニモジュラ行列	121
【は】		【ほ】		【よ】	
パーシステントホモロジー		補集合	3	余因子	141
	265	ホーナー法	234	余因子行列	142
倍元	65	ホモトピー	15	【ら】	
バタフライ行列	249	ホモトピー類	15	ランク	108
半群	17, 37	ホモトピック	15	【り】	
反復クロン縮約	227	ホモロジー群	130	離散時間線形システム	192
【ひ】		【ま】		離散フーリエ変換	236
左イデアル	43	交わり	3	両側イデアル	43
左剰余類	21	マルコフ連鎖	212	隣接行列	217
左等価	148	【み】		輪体	130
ビッグオー	233	右イデアル	43	【る】	
非負行列	198	右剰余類	21	類別	10
ビヘイビアアプローチ	266	右等価	148	ループ	15
表現行列	117	道	15	【れ, わ】	
標準射影	10	【む】		零因子	38
【ふ】		無記憶性	212	零環	38
ファンデルモンド行列	150	【も】		零元	37
複体	129	モデル圧縮	263	列確率行列	213
符号	272	モニック多項式	42	劣乗法性	277
符号関数	272	【や】		列の基本変形	121
部分加群	87	約元	65	列ランク	108
部分環	42	ヤコビアン	132	和集合	3
部分行列	141	【ゆ】		【その他】	
部分空間	87	有限生成	100	LU分解	293
部分群	20	有効抵抗	232	1次結合	100
部分集合	1			1次従属	99
不変部分加群	126			1次独立	99
不変部分空間	126				
フロベニウスノルム	276				

— 著者略歴 —

2009年 京都大学工学部情報学科卒業
2011年 京都大学大学院情報学研究科修士課程修了（数理工学専攻）
2014年 京都大学大学院情報学研究科博士後期課程修了（数理工学専攻），博士（情報学）
京都大学大学院特定研究員
2017年 北見工業大学特任助教
2018年 北見工業大学助教
2019年 東京大学大学院講師
2023年 東京大学大学院准教授
現在に至る

数理工学のための線形代数

— 線形代数の新しい地平 —

Linear Algebra for Mathematical Engineering
— A New Horizon of Linear Algebra —

© Kazuhiro Sato 2026

2026年3月25日 初版第1刷発行



検印省略

著者 さとう かずひろ
佐藤 一宏
発行者 株式会社 コロナ社
代表者 牛来真也
印刷所 三美印刷株式会社
製本所 株式会社 グリーン

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844 ・ 電話 (03) 3941-3131(代)

ホームページ <https://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-06136-9 C3041 Printed in Japan

(田中)



JCOPY <出版者著作権管理機構 委託出版物>

本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつと事前に、出版者著作権管理機構（電話 03-5244-5088, FAX 03-5244-5089, e-mail: info@jcopy.or.jp）の許諾を得てください。

本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めていません。落丁・乱丁はお取替えいたします。