問題を解くことで学ぶ ベクトル解析

—楽しみながら解くことを意識して—

博士（理学） 鈴木 岳人 著

コ ロ ナ 社

ま　え　が　き

物理数学はそれ自体が一つの学問分野というより，幅広い物理分野の学問の基礎となるものである。つまりこれを学べばあらゆる物理分野の入り口に立てるし，逆にわかっていないと何もできないという分水嶺的なものである。そして一口に物理数学といってもその内容は多岐にわたるのであるが，ここではベクトル解析を取り上げたい。これについては，積分の仕方など技術力を身につけなければならないことに加え，同時にどのような問題を考えているのか，空間的な想像力を養う必要性も意識しなければならない。ある程度は問題を解いて経験を積む必要があるだろう。

ここで，そもそもなぜベクトル解析を学ぶのか，という根本的な問いに立ち返ってみたい。一義的には上に述べたように「物理数学」の一環なのだから，まずは物理学を学びたいという希望があることは間違いない。そして物理学は大変裾野の広い学問分野であるから，それの発展として化学や生命科学，あるいは地球科学といった分野を学びたいという理由もあるだろう。加えて工学分野の勉学を考えている人にとっては，学んだことを現実世界へ応用したいというモチベーションがあるかもしれない。そしてこのような考えは，社会学などの分野の学生ももっているかもしれない。そういった（一見文系の）分野でも，近年では数理的取扱いと無縁ではないからである。すなわち多分野において，現実的に「役立つ」から物理数学をやるのだ，ということはもちろん正しい。

しかしそれだけでもないのではないかとも思う。それとは別に，ただ面白い問題を解いてみたいという，ある意味では無意味な欲求に従って学ぶというのもよいのではなかろうか。物理数学の練習問題だと，例えば適当に曲面と関数を与えて面積分せよというような，若干無機質なものもあるだろう。もちろんこれでも十分練習にはなるのだが，面白み・楽しさには欠ける。しかしある意

味遊び心をもった問題ならば，ただ楽しく解いてみるという動機づけが成立するだろう。つまり上述のように何かの役に立つという理念がなくとも構わない。見ようによっては「無駄」ともいえる考え方も重視し，力を抜いて楽しんでもらうような問題集があってもよいと思う。

ここに挙げた両者はある意味で真逆な考え方である。しかし，無意味でも楽しければ前者のように「何かの役に立つかもしれない」という発想が出てくるだろう。逆に応用を目指して学んでいても，進めているうちに物理数学そのものの楽しさに気づくかもしれない。両者は共存できる考え方なのである。パズルを解くような感覚が味わえる問題や，現実世界で見られるような設定の問題を通して，楽しみながらベクトル解析を学んでいただきたい。

本書はいろいろな分野に今後進んでいく学生のためということも考えて，例えばベクトル量の取扱いなど，基礎的な内容に重きを置いた面もある。また問題を解くことにも主眼を置いたため，定理の証明などを直観的な説明で終わらせて厳密性を若干犠牲にした部分もある。実際，それを使う上ではそれで十分という考えもある。ただ，やはりきちんとした説明を知りたいという人もあるだろう。そのような人はまた一歩踏み込んだ専門書を開いてもらいたい。

なお，本書の内容は著者が行った授業を基にしている。そしてその授業の構成には前任の先生方の資料を参考にさせていただいた。感謝の意を表したい。加えて末筆ながら，適切な助言により出版まで導いてくださったコロナ社にも深く感謝の意を表する。

2023 年 7 月

著　者

目　　　　次

1.　ベクトルの基礎

2.　直線と平面の方程式

3.　曲線と曲面の方程式

4. 線積分・面積分・体積積分

5. ガウスの発散定理とストークスの定理

6. 座 標 変 換 (1)

7. 座標変換（2）

1 ベクトルの基礎

ベクトル解析を学ぶにあたり，必要とされる数学的な準備から始める。基礎的なトピックの羅列になってしまうかもしれないが，ここからスタートだと思っていただきたい。一つひとつは簡単な内容ではあるが，しかしここが少しでもおろそかになると先にまったく進めなくなる。ある意味で最も重要な章かもしれないので，しっかり身につけてほしい。

1.1 一次独立・一次従属

n を自然数とし，n 個の非ゼロベクトル $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_n$ の**一次結合**，すなわち係数を掛けて足し合わせた $\lambda_1 \boldsymbol{A}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{A}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{A}_n$ が，$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ のときのみゼロとなるならば，$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_n$ は**一次独立**であり，そうでないとき**一次従属**であるという。

定義としてはこうなるが，具体例をイメージするとわかりやすい。例えば 2 次元平面に以下の三つのベクトルをとってみよう。

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

そして

$$\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \lambda_3 a_{31} = 0 \tag{1.2}$$

$$\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \lambda_3 a_{32} = 0 \tag{1.3}$$

の 2 式が同時に成り立つ場合があるか考えてみよう。ここでは未知数が $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ の三つなのに対して式が 2 本であり，すべての未知数を決定することはできな

い。しかしそこが重要で，逆に式 (1.2), (1.3) を満たす非ゼロの $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ が「必ず」存在してしまうのである（もちろんすべてゼロが解なのは自明であるが)。すなわち 2 次元空間では 3 個以上のベクトルを独立にとることはできない。同様に，n 次元空間では $n+1$ 個以上のベクトルを独立にとれない。

例題 1.1

三つのベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

は一次独立か，一次従属か調べよ。

【解答】　λ_1，λ_2，λ_3 を定数として $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ とすると

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

となる。式 (1.5) の（第 1 式 + 第 3 式 ×3）から $5\lambda_2 + 10\lambda_3 = 0$ を得るが，これは第 2 式 ×5 であって独立な方程式となっていない。すなわち三つの未知数を決めるための条件が足りず，複数の解が存在してしまう。具体的には，$\lambda_1 = t$，$\lambda_2 = -2t$，$\lambda_3 = t$（t はパラメータ）と書ける λ_1，λ_2，λ_3 はすべて式 (1.5) を満たす。すなわち $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ は一次従属である。

◇

1.2　内　　積

二つのベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ に対し，そのなす角を θ として，$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta$ を $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ の**内積**と呼び $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ と表す。定義より直交するベクトルの内積はゼロであり，同じベクトルの内積はその大きさの 2 乗（$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = |A|^2$）になる。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

として成分で書けば

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \tag{1.7}$$

である。

例題 1.2

1. 式 (1.7) を示せ。
2. 式 (1.7) の値が $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta$ に等しいことを示せ。余弦定理は既知のものとして使ってよい。

【解答】

1. $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|^2 = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}|^2 + 2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} + |\boldsymbol{B}|^2$ であり，ベクトルの大きさの 2 乗の定義も用いて

$$\begin{aligned}&(A_1+B_1)^2 + (A_2+B_2)^2 + (A_3+B_3)^2 \\ &\quad = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + 2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} + B_1^2 + B_2^2 + B_3^2\end{aligned} \tag{1.8}$$

が得られ，これから式 (1.7) を得る。

2. $|\boldsymbol{A}|^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$, $|\boldsymbol{B}|^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$, $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|^2 = (A_1-B_1)^2 + (A_2-B_2)^2 + (A_3-B_3)^2$ と余弦定理を用いて

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{|\boldsymbol{A}|^2 - |\boldsymbol{B}|^2 - 2|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|^2}{2|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|} \\ &= \frac{A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}\end{aligned} \tag{1.9}$$

により示される。

◇

1.3 単位ベクトル

単位ベクトルとは，$|\boldsymbol{A}|=1$，すなわち長さ1のベクトルである。任意のベクトル $\boldsymbol{F}$ に関して，$\dfrac{\boldsymbol{F}}{|\boldsymbol{F}|}$ が単位ベクトルになることは，当然だが重要なことである。すなわち，自分自身の大きさで割れば単位ベクトルになるのである（ゼロベクトルはもちろん例外である）。なお，今後は単位ベクトルには $\hat{\boldsymbol{n}}$ のようにハットを付けて表す。

単位ベクトルは「向きのみを指定したいとき」に大変便利である。単位系にもよらないというのもポイントである。

例題 1.3

ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ に平行なベクトル $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{b}$ に垂直なベクトル $\boldsymbol{a}_2$ の和に分解せよ。

【解答】　まず $\boldsymbol{a}_1$ から考える。その方向は $\boldsymbol{b}$ 方向の単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{e}}_1=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ で記述できる。あとはその大きさであるが，それは**図 1.1** からわかるように $\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_1$ で与えられるのである。すなわち $\boldsymbol{a}_1=(\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_1)\hat{\boldsymbol{e}}_1=3\hat{\boldsymbol{e}}_1=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ と書ける。

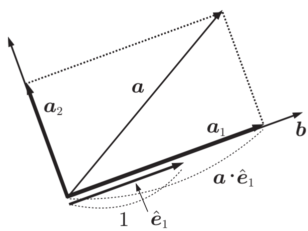

図 1.1　射　影

そしてそれがわかれば $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ も容易に得られる。なお，$\boldsymbol{a}_1$ は $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{b}$ の方向に**射影**したものである，と表現する。加えて，ここで用いた考え方は 1.4 節で正規直交基底を扱う際にも重要である。

◇

1.4　正規直交基底ベクトル

三つの単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{i}}$, $\hat{\boldsymbol{j}}$, $\hat{\boldsymbol{k}}$ が，たがいに直交するとする。例えば**デカルト座標**表示で $\hat{\boldsymbol{i}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\boldsymbol{j}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\boldsymbol{k}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$[†]といったものが考えられる。このとき，任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ はつぎのように一意に表すことができる。

$$\boldsymbol{A} = A_1\hat{\boldsymbol{i}} + A_2\hat{\boldsymbol{j}} + A_3\hat{\boldsymbol{k}} = (\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{i}})\,\hat{\boldsymbol{i}} + (\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{j}})\,\hat{\boldsymbol{j}} + (\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{k}})\,\hat{\boldsymbol{k}} \tag{1.10}$$

この書き方を，「$\boldsymbol{A}$ を展開した」と表現する。この性質をもつ $\hat{\boldsymbol{i}}$, $\hat{\boldsymbol{j}}$, $\hat{\boldsymbol{k}}$ を**正規直交基底ベクトル**という。ここでは基底が三つであるから 3 次元系である。上ですでに 3 次元という言葉を使ったが，本来はこのように独立な基底の数が重要である。実際には何次元系でもこの考え方は成り立つ。

特に N 次元系で正規直交基底系を $\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \cdots, \hat{\boldsymbol{e}}_N$ と書くと，$A_i\,(i = 1, 2, \cdots, N)$ の値は $A_i = \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{A}$ により求められることは大変重要である。実際

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{A} &= \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \sum_{j=1}^{N} A_j \hat{\boldsymbol{e}}_j \\ &= \sum_{j=1}^{N} \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot A_j \hat{\boldsymbol{e}}_j = \sum_{j=1}^{N} A_j \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j = \sum_{j=1}^{N} A_j \delta_{ij} = A_i \end{aligned} \tag{1.11}$$

† この三つを基底とするのは当たり前だと思われるかもしれないが，実はそうでもない。これらを特別視する必要はない。

索　引

—— 著 者 略 歴 ——

2002年　東京大学理学部地球惑星物理学科卒業
2004年　東京大学大学院理学系研究科地球惑星科学専攻修士課程修了
2007年　東京大学大学院理学系研究科地球惑星科学専攻博士課程修了，博士（理学）
2007年　東京大学地震研究所特任研究員
2010年　東京大学特任助教
2014年　青山学院大学助教
　　　　現在に至る

問題を解くことで学ぶベクトル解析

―楽しみながら解くことを意識して―

Vector Analysis with Exercises—Let's Solve them with Fun—

2023 年 9 月 25 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略

著　　者　鈴（すず）　木（き）　岳（たけ）　人（ひと）
発 行 者　株式会社　コ ロ ナ 社
　　　　　代 表 者　牛 来 真 也
印 刷 所　三 美 印 刷 株 式 会 社
製 本 所　有限会社　愛 千 製 本 所

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発 行 所　株式会社　**コ ロ ナ 社**
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ　https://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–06130–7　C3041　Printed in Japan　（齋藤）