あれっ，大学で数学がわからなくなった！

～大学数学を読み解く力を手に入れよう～

浅井　徹 著

コロナ社

ま　え　が　き

高校まで数学が得意だったにもかかわらず，大学 1 年生の数学でつまずく，あるいは戸惑う人はかなりの割合でいると思われる。その原因の一つは，高校数学の目的と大学数学の目的が異なっているためである。高校では個別の対象の理解を目指しているのに対し，大学ではより抽象的，より普遍的な事実の理解を目指している。例えば，高校数学は「指数関数について …… が成り立つ」「三角関数について …… が成り立つ」という内容であるのに対し，大学数学は「連続関数について …… が成り立つ」「微分可能な関数について …… が成り立つ」という内容になる。前者はイメージしやすい一方で，後者は抽象的でとっつきにくい。

しかしながら，後者の内容の威力は圧倒的である。例えば，連続関数についてある事実が成り立つことがわかったとする。このことは，高校数学で学ぶほとんどの関数，例えば多項式や指数関数，三角関数，あるいはそれらの積や和で作られる関数すべてに対して同じ事実が成り立つことを意味する。それだけでなく，連続であるが今はまだ知られていない関数に対しても，その事実が成り立つことがわかったことにもなる。このように，さまざまなものを一網打尽に扱おうとする点が大学数学の高校数学との大きな違いである。そのような姿勢が物事の本質を捉えることにも繋がっている。なお，大学数学といっているが，これは大学だけで通用する数学という意味ではなく，実際には大学以降の数学の意味である。

目的や扱う内容が違うことから，高校数学と大学数学では理解に必要な素養が異なる。高校数学では具体的な内容を扱うので，提示された事実を計算によって確かめることができる。そのため，（極論すると）計算を正確に行う素養があれば高校数学の内容を習得することができる。一方，大学数学では抽象的な内容

を扱うので，その内容を計算で確かめることはできない。大学数学では値の計算よりも，主に性質に基づいた議論によって論証が進む。その論証は例えば，「関数が連続なので …… が成り立つ。このとき，……」というようなものである。そこで必要になるのは論理を自在に扱える素養である。

数学を学ぶ意味として「論理力を鍛えることができる」という説明がなされることがある。このこと自体は間違いではないと思われるが，これを高校数学で実感することは難しいであろう。先にも述べたように，高校数学では値の計算に関する内容が主で，論理が用いられる場面は限られているためである。また，論理が必要な場面でも，図やグラフなどに基づく感覚的な説明で済まされ，本当の論理が援用されないこともある。「限りなく近づく」を極限の定義としていることなどは，その一例である。これは必ずしも悪いことではなく，それによって微分や積分などの概念を早期に理解できるのであれば，そのメリットは大きいと思われる。

一方，大学数学を理解できれば論理力は鍛えられるであろう。ただし，論理を扱える素養を有していないと，そもそも大学数学を理解することすらできない。例えば，書かれている定理が何を主張しているのか，あるいは，その定理を証明するためには何を示せばよいか，などが把握できなければ，教科書を読んでも意味を理解できないであろう。

残念ながら，現在の教育カリキュラムでは論理の素養を身につける機会は与えられていない。そのために，多くの人が大学数学の最初でつまずき，戸惑っている。そこで本書は，論理の素養を身につけるための基本的な事柄を説明する。具体的には数学の命題の文法と集合・写像に関する記号や語句，さらには大学数学における関数の取り扱いの前提となる背景を説明する。本書は大学数学の内容を説明するものではなく，あくまでも大学数学を理解するための素養，すなわち大学数学の教科書を読む力を身につけることが目的である。そのため，例として用いる題材は高校数学の知識で理解できるものに絞ってある。

高校数学と同じような題材を用いてはいるが，その示し方は高校数学と同じではない。高校数学では平易な言葉で説明されていて，厳密ではあるがとっつき

にくい言葉使いは避けられている。一方，本書で説明する内容のうち，基礎的な部分については高校数学で学んだ内容を大学数学に近い形で示したものになっている。このような説明が高校数学から大学数学への橋渡しとなるであろう。是非，手を動かしながら読み進めて頂きたい。

大学の授業でつまずく，あるいは戸惑うもう一つの理由は，高校と大学の授業のやり方が異なることである。この件については本書の最後で説明しよう。手を動かしながら，といっている理由もそこで説明する。

本書が大学数学に対する理解の一助になることを願って。

2023 年 7 月

浅井　徹

目　　　　次

第 1 章　大学数学では集合が大事

第 2 章　論理の組み立てを読み解こう

第 3 章　集合を使いこなせるようになろう

第4章　関数は想像以上に自由な存在，先入観を捨ててつきあおう

第5章　高校と大学の授業はこれだけ違う

演 習 の 解 答 例

第 1 章

大学数学では集合が大事

記号の型と集合

記号の型と集合

大学数学では実数や複素数などの数だけでなく，ベクトルや行列，関数など，多様な対象を扱う。また，ベクトルも実数を要素とするものだけでなく，複素数や多項式を要素とすることもある。同様に，関数も実数から実数への関数だけでなく，例えば複素数から行列への関数が扱われることもある。

一方，数学では記号を用いる。そのため，例えば記号を x としたとき，x が実数を表す場合もあれば，複素数や行列，さらには関数を表す場合もある。高校まではベクトルは $\vec{x}$ で表記するなど，記号の飾りを変えることで表す対象を区別していた。しかしながら，大学数学で扱う対象は多岐にわたるので，そのようなやり方では飾りが足りなくなるし，そもそも数多くの飾りを覚えておくのは大変である。

大学数学では，記号の意味を記号の飾りではなく，集合を用いて定めることが多い。集合の詳細については第 3 章で扱うが，ここでは当面の第 2 章で必要となる基本的なものを説明しておく。

集合とは「もの」の集まりである。集合に属している「もの」を**元**（げん）という。集合を定義する方法はいくつかあり，最も基本的なものは元を列挙することである。例えば，1, 2, 3 からなる集合は $\{1,2,3\}$ というように記述する。集合自体を記号で表記することもある。例えば上記の集合を X と定義したい場合には

$$X = \{1,2,3\} \tag{1.1}$$

と書く。ある「もの」x が集合 X に属しているときには $x \in X$ と書き，逆に属していないときには $x \notin X$ と書く。先の例では $1 \in \{1,2,3\}$，$4 \notin \{1,2,3\}$ である。元をもたない集合を**空集合**といい，$\emptyset$ で表す。空集合に対しては，どのような x に対しても $x \notin \emptyset$ である。

数学では集合は目的に応じて適宜定義されるが，よく用いられる標準的な集合には**表 1.1** の記号を用いることが慣例となっている。

表 1.1 標準的な集合

記号	意味
$\mathbf{N}$	自然数の集合
$\mathbf{Z}$	整数の集合
$\mathbf{Q}$	有理数の集合
$\mathbf{R}$	実数の集合
$\mathbf{C}$	複素数の集合

$\mathbf{N}$，$\mathbf{R}$，$\mathbf{C}$ はそれぞれ英語で自然数を意味する「Natural number」，実数を意味する「Real number」，複素数を意味する「Complex number」の頭文字に由来している。一方，有理数は英語で「rational number」であり，その頭文字は実数と同じ R である。そこで有理数の集合には商を意味する「Quotient」の頭文字 Q が用いられている。整数の $\mathbf{Z}$ はドイツ語で数を意味する「Zahlen」の頭文字 Z に由来している。

高校数学では集合はベン図とともに扱われていて，集合を考えることはベン図を書くことと理解している人も多いであろう。例えば集合 A と集合 B をベン図で書くと，元の属し方が 4 通りあることを視覚的に理解できる（**図 1.1**）。しかしながら，ベン図ではそれ以上のことは扱えない。一方，大学数学では集合と集合の関係も扱うが，それ以上に個々の集合の性質が重要である。例えば，自然数の集合と有理数の集合はすべての元に番号をつけることができる性質を共有している。一方，有理数の集合と実数の集合はどの元のどんな近くにも他の元があるという性質を共有している†。このような個々の集合の性質を

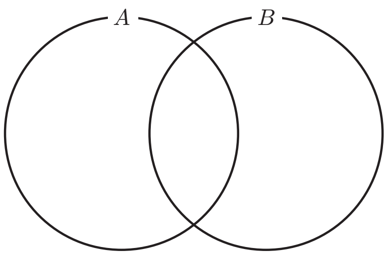


図 1.1 ベン図

† 本書では有理数や実数の集合の性質には触れない。詳細は文献 1) などを参照されたい。

議論する際にはベン図を用いることはほとんどない。逆にいえば，高校数学における集合の議論ではベン図で書けるような事柄のみが扱われていて，それ以外のほとんどの部分は高校数学の範囲には含まれていない。大学数学で集合を扱う際には「集合はベン図」という固定観念を捨てて，与えられた個々の集合では何が成り立ち，何が成り立たないか，という点に着目して頂きたい。

集合を用いて「ある $x \in \mathbf{R}$ が与えられたとする」と書くと，それは x は実数であると仮定あるいは宣言したことになる。同様に，「$x \in \mathbf{N}$ とする」「$x \in \mathbf{C}$ とする」と書けば，x はそれぞれ自然数，複素数である。このように，「$x \in X$ とする」は非常に短い記述であるが，x が何かを示す重要な記述である。

実数の集合に関しては**表 1.2** の記号も頻繁に用いられる。表は $a, b \in \mathbf{R}$ としたときである。

表 1.2　実数の集合によく用いられる記号

記号	意味
(a, b)	a より大きく b 未満の実数の集合
$[a, b]$	a 以上 b 以下の実数の集合
$[a, b)$	a 以上 b 未満の実数の集合
$(a, b]$	a より大きく b 以下の実数の集合

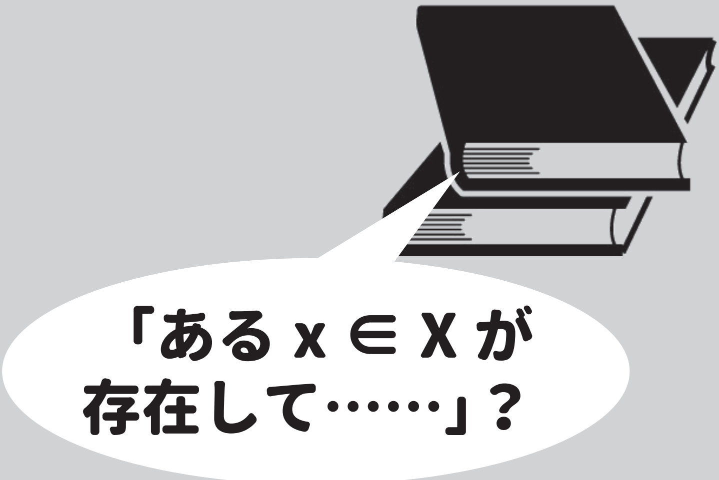
半区間に対しては**表 1.3** の記号がよく用いられる。∞，$-\infty$ に対応する括弧は常に丸括弧 (　) であることに注意されたい。

表 1.3　半区間でよく用いられる記号

記号	意味
(a, ∞)	a より大きい実数の集合
$[a, \infty)$	a 以上の実数の集合
$(-\infty, a)$	a 未満の実数の集合
$(-\infty, a]$	a 以下の実数の集合

第 2 章

論理の組み立てを読み解こう



索　　引

—— 著 者 略 歴 ——

1991年　東京工業大学工学部制御工学科卒業
1993年　東京工業大学大学院理工学研究科修士課程修了（制御工学専攻）
1996年　東京工業大学大学院理工学研究科博士課程修了（制御工学専攻），博士（工学）
1996年　日本学術振興会特別研究員（～1998 年）
1997年　カリフォルニア大学バークレー校客員研究員（～1998 年）
1999年　大阪大学助手
2002年　大阪大学講師
2005年　大阪大学助教授
2007年　大阪大学准教授
2015年　名古屋大学准教授
　　　　現在に至る

あれっ，大学で数学がわからなくなった！
— 大学数学を読み解く力を手に入れよう —
Oh My Gosh, University Math Is Totally Different from High School One !
— Develop Your Comprehension of University Math —

2023 年 9 月 21 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略

著　　者　浅（あさ）井（い）　徹（とおる）
発 行 者　株式会社　コ ロ ナ 社
　　　　　代 表 者　牛 来 真 也
印 刷 所　三 美 印 刷 株 式 会 社
製 本 所　有限会社　愛 千 製 本 所

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発 行 所　株式会社　コ ロ ナ 社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ https://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–06129–1　C3041　Printed in Japan　（田中）