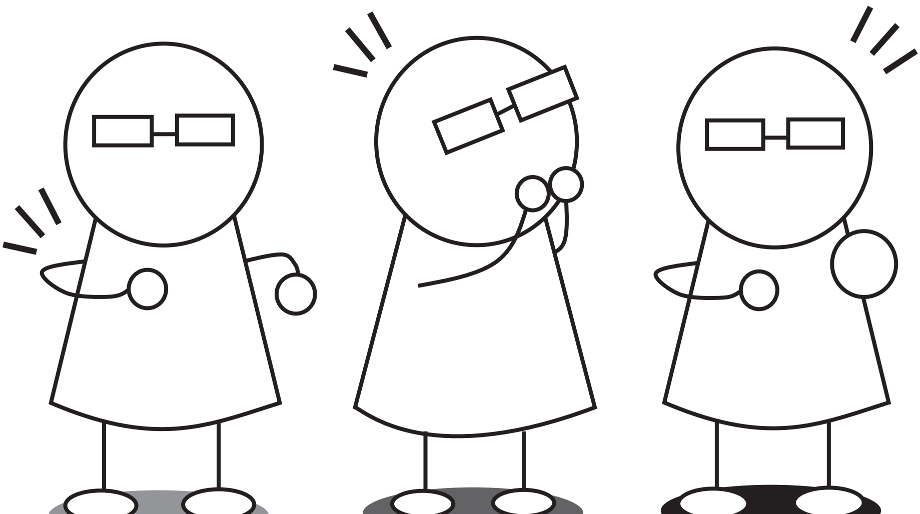
これならわかる
微積分学

博士（工学）島 弘幸【著】



コロナ社

まえがき

ある理科の実験にまつわる，こんなエピソードがあります。

『…… その実験では，まずアルミ箔のしわを伸ばせといわれた。
理由もわからぬまま，とにかくいわれたとおりに作業していると，今度はそのアルミ箔で，竹串を巻け，といわれた。
何度もやり直しをさせられたあげく，さらに今度は，その竹串を火であぶれ，といわれた。 ……(中略)……
でも，もし最初に「エジソンの白熱電球をつくるぞ！」といってくれてたら，もっと楽しく実験できたのに ……』

目的や目標がわからないまま，ただ作業をさせられるのは，誰にとってもシンドイものです。だからこそ，教える側には，「その作業がなぜ必要か」を相手に伝える気遣いが肝心なのでしょう。

さて，この話，じつは数学のテキストにも，まったく同じことが当てはまるのではないでしょうか？

微積分学というのは，歴史の古い学問です。それゆえ，教えるべき内容とその順番には決まったセオリーがあります。そうした伝統ある流れに沿って，各トピックを教えていけば，確かに大きな穴はないでしょう。

しかし，微分と積分を学ぶ人すべてが，十分な予備知識をもっているはずはありません。そういった五里霧中で不安を感じる読者に対して，やれ「実数の連続性」だの，「級数の収束性」だの，石橋をたたきつづけるような厳密性にこだわった内容構成が本当に適しているのでしょうか？ それを学ぶべき理由も教えずに，ただ「アルミ箔のしわを伸ばせ」というステレオタイプな教え方に，なってはいないでしょうか？

この本は，こうした著者なりの経験と反省から，従来型のテキスト構成に

とらわれずに内容を編纂（へんさん）したものです。執筆においては，できるだけ初学者の興味がつづくように，多彩な話題を平易な言葉で扱うように心掛けました。また，各章や各セクションの重要ポイントは，逐一太字でわかりやすく明示しました。この工夫によって，「なんのためにこれを読まされているの!?」といった印象はずいぶん薄れるものと思います。さらに必要な場面では，同じ内容を繰り返し，本書の違う箇所で説明してあります。通常の数学のテキストでは，定義や用語の説明を一回だけに留めることが多いので，この点も従来型とは異なる本書の特長といえるでしょう。

一方で，初学者の興味にかなう内容を目指したため，数学的な厳密性を欠いた箇所は少なくありません。より厳密な内容を好まれる読者には，伝統あるほかの良書をお勧めします。ただしそうした読者にも，本書でふんだんに盛り込んだ脚注やコーヒーブレイク，そして付録の中に，きっと目を惹（ひ）く話題があろうかと思います。

なお，章末問題の解答例は，コロナ社の書籍詳細ページ†で閲覧できます。問題の解き方がわからなかったときは，どんどん解答例を覗（のぞ）いてください。ただし，丸写しはしないこと。解答例をちょっと覗いて，解き方がわかったら，すぐに解答を閉じてその問題に再挑戦する。そうやって問題と解答を何度も往復して，手もとのペンを動かすことが，理解を深める一番の近道になるはずです。

本書のいたるところに挿入されたイラストは，すべて研究室スタッフである豊浦牧子さんによるものです。また，山梨大学 生命環境学部 学部生の池谷汐織さんには，学生の目線で原稿全体を丁寧に精読して頂き，誤植を丹念に洗い出して頂きました。お二人の多大なお力添えに，謹んで感謝を申し上げます。

2022 年 6 月

島 弘幸

† https://www.coronasha.co.jp/np/isbn/9784339061260/

目　　　　　次

1.　無限とはなにか

1.1　微積分学は「無限」の数学である …… *1*
1.2　無限大 ∞ とはなにか …… *4*
1.3　$x = 0$ と $x \to 0$ の違いとは …… *6*
1.4　極限とはなにか …… *8*
章　末　問　題 …… *10*

2.　対数とはなにか

2.1　対数のもつ意味 …… *13*
2.2　対数はなぜ必要か …… *18*
2.3　底の条件，真数条件 …… *21*
2.4　自然対数の底 e …… *27*
2.5　自然対数と常用対数 …… *30*
章　末　問　題 …… *31*

3.　いろいろな関数

3.1　関数とはなにか …… *33*
3.2　逆　関　数　と　は …… *36*
3.3　逆関数があるための条件とは …… *38*

3.4　f の値域は f^{-1} の定義域 ………… *42*
3.5　指　数　関　数 ………… *44*
3.6　対　数　関　数 ………… *48*
3.7　三角関数を定義する 3 種類の方法 ………… *50*
3.8　三角関数のグラフの大事な性質 ………… *52*
3.9　双 曲 線 関 数 ………… *55*
3.10　双曲線関数の名前の由来 ………… *57*
3.11　逆 三 角 関 数 ………… *59*
3.12　逆三角関数と単位円の意外な関係 ………… *61*
3.13　逆三角関数の定義域と値域 ………… *62*
3.14　増加関数の速さ比べ ………… *66*
章　末　問　題 ………… *68*

4.　関数のグラフ表示

4.1　グラフの全体像を把握せよ ………… *70*
4.2　定義域を調べよ ………… *70*
4.3　軸との交点を探せ ………… *72*
4.4　対称性はあるか ………… *73*
4.5　漸近線はあるか ………… *74*
4.6　グラフの描き方: 実践編 ………… *77*
4.7　グラフの平行移動 ………… *83*
4.8　グラフの拡大と縮小 ………… *85*
4.9　極座標のグラフ ………… *88*
章　末　問　題 ………… *95*

5. 関数の微分 簡単編

5.1 微分の定義 …… 97
5.2 x^n の微分 …… 99
5.3 $\sqrt[n]{x}$ の微分 …… 103
5.4 e^x の微分 …… 106
5.5 $\log x$ の微分 …… 107
5.6 微分の記号の使い分け …… 109
章末問題 …… 111

6. 関数の微分 ちょいムズ編

6.1 積の微分 …… 112
6.2 商の微分 …… 114
6.3 $\cos x$ の微分 …… 115
6.4 $\sin x$ の微分，$\tan x$ の微分 …… 116
6.5 合成関数の微分 …… 118
6.6 合成関数の微分公式の「大雑把な」証明 …… 120
6.7 逆関数の微分 …… 123
6.8 逆三角関数の微分 …… 124
章末問題 …… 127

7. 微分計算の応用

7.1 対数微分法 …… 129
7.2 陰関数 …… 131

7.3 陰関数の微分 …… 134
7.4 関数の最大最小 …… 139
7.5 たがいに相関する変化率 …… 147
章末問題 …… 151

8. 関数の展開

8.1 関数を展開するとはどういうことか …… 157
8.2 関数を 1 次式で近似する …… 160
8.3 関数を 2 次式で近似する …… 163
8.4 関数を多項式で近似する …… 165
8.5 マクローリン展開とテイラー展開 …… 168
8.6 展開の次数を無限にとると …… 172
8.7 収束半径とは …… 174
8.8 関数の展開の応用 (1): 極限の計算 …… 178
8.9 関数の展開の応用 (2): 積分の計算 …… 180
章末問題 …… 181

9. 積分とはなにか

9.1 積分は二つの顔をもつ …… 184
9.2 区分求積法 …… 186
9.3 逆微分と面積の関係 …… 191
9.4 原始関数とは …… 195
9.5 積分定数がどんな値でもよいわけ …… 198
9.6 不定積分と定積分 …… 199
9.7 積分に関するいくつかの注意 …… 200

9.8　手で解ける積分の例 …… *201*
9.9　$1/x$ の積分に絶対値がつくわけ …… *203*
9.10　手で解けない積分の例 …… *207*
章　末　問　題 …… *210*

10.　初等関数の積分

10.1　置　換　積　分 …… *212*
10.2　形式的な約分 $(du/dx)dx = du$ …… *216*
10.3　置換積分の具体例 …… *217*
10.4　部　分　積　分 …… *220*
10.5　部分積分の連続技 …… *222*
章　末　問　題 …… *224*

11.　面積・体積・曲線の長さ

11.1　立 体 の 体 積 …… *226*
11.2　回 転 体 の 体 積 …… *229*
11.3　曲 線 の 長 さ …… *232*
11.4　曲線の長さ（陰関数表示の場合） …… *235*
11.5　回 転 面 の 面 積 …… *238*
11.6　円筒か，円錐台か …… *243*
章　末　問　題 …… *248*

付　　　録 …… *250*

A.1　常用対数表の使い方 …… *250*
A.2　複素数と三角関数のつながり …… *253*

A.2.1　虚数 i を用いた三角関数の表現 ……… 253
A.2.2　複素平面を用いた三角関数の表現 ……… 255
A.2.3　オイラーの公式の応用例 ……… 257
A.3　$(\sin x)/x \to 1 \quad (x \to 0)$ の証明 ……… 260
A.4　合成関数の微分，厳密な証明 ……… 264
A.4.1　前 準 備 そ の 1 ……… 264
A.4.2　前 準 備 そ の 2 ……… 266
A.4.3　合成関数の式の証明 ……… 267
A.5　円錐と円錐台の幾何 ……… 268
A.5.1　円錐台の側面積 ……… 268
A.5.2　円 錐 台 の 体 積 ……… 270
A.5.3　円錐の体積にはなぜ 1/3 が付くのか ……… 271
索　　　　引 ……… 275

■　本書の章末問題の解答例について　■

本書の章末問題の解答例は，下記の二次元コード，もしくは URL よりアクセスすることができます。

https://www.coronasha.co.jp/np/data/docs1/978-4-339-06126-0_1.pdf

第1章　無限とはなにか

微分とはなにか？ 積分とはなにか？—これらの問いに答えるには，まず「無限とはなにか」を知る必要がある。本章では，無限という考え方と，微分・積分との関わりを，簡単な例とともに紹介する。

1.1　微積分学は「無限」の数学である

微分と積分は，ともに「無限」という概念を駆使する学問分野であるといえよう。ここで無限とは文字どおり，限度・限界がない，という意味の言葉である。実際，微分と積分を学ぶ際には，「限りなく近づく」とか「限りなく多い」などの言い回しが頻繁に登場する。

例えば，ある関数 $y = f(x)$ を微分する計算は，グラフ上の 2 点を限りなく近づけることに相当する。

図 1.1 に示すように，$y = f(x)$ のグラフ上にある 2 点 P,Q を考え，これらを通る直線 ℓ を考えよう。点 P の位置を動かさないまま，点 Q をグラフに沿って点 P に近づけていくと，直線 ℓ の傾きが徐々に変化する。ここで，点 Q を点 P に接近させればさせるほど，ℓ の傾きがある特定の値にどんどん近づいたとしよう[†]。この特定の傾きこそが，まさに関数 $y = f(x)$ の (点 P における) 微分にほかならないのである。

[†] 関数 $y = f(x)$ の種類によっては，ℓ の傾きが特定の値に近づかない場合もある。そのときは，$f(x)$ が点 P において微分不可能である，という。

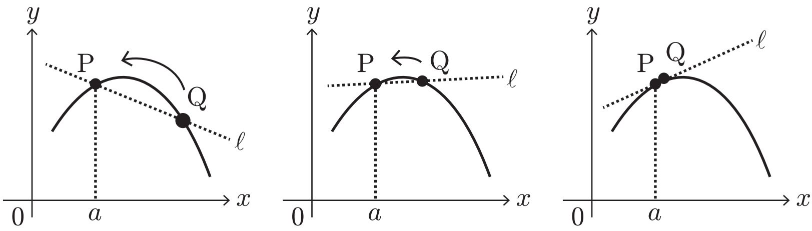


図 1.1

より正しくいうと，上で述べた操作は，関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ を求めていることに相当する。この操作を数式で表すと

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1.1}$$

となる。右辺にある小さい記号 $h \to 0$ は，点 Q と点 P の間隔が限りなく 0 に近づくことを意味している。そしてこのとき，式 (1.1) の右辺にある分母と分子は，どちらも限りなく 0 に近づくことに注意しよう。いわば微分とは，無限に 0 に近づく数どうしの割り算なのである。

微分とは，無限に小さい数どうしの割り算である。

今度は別の例として，ある関数 $y = f(x)$ を積分するという計算を考えよう。この計算は，限りなく細い短冊を，限りなくたくさん寄せ集めることに相当する。

図 1.2 に示した図は，曲線 $y = f(x)$ と x 軸の間に挟まれた領域 D (灰色で塗った部分) の面積を求める様子を表している。一般に，領域を取り囲む境界線が (一部でも) グニャグニャと曲がっている場合，その領域の面積をスパッと求めることはできない。そこでどうするかというと，その領域を埋め尽くすようにたくさんの細長い短冊を並べて，短冊の面積の和を求めるということをする。

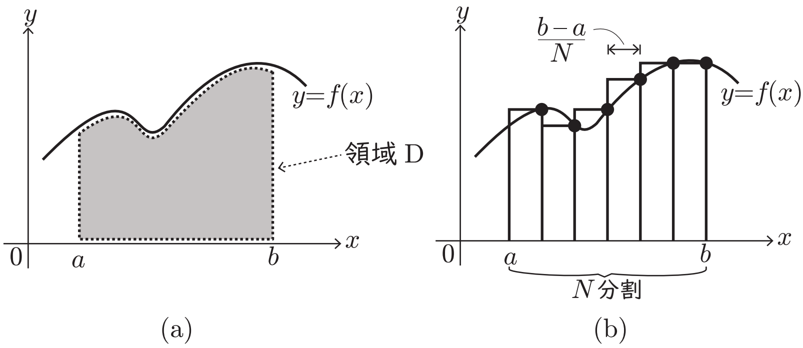


図 **1.2**

例えば図 1.2(b) では，$x = a$ から $x = b$ までの範囲を N 分割して，N 本の細長い短冊で領域 D を埋め尽くしている。もちろんこのままでは，短冊の上端が領域 D の境界線からはみ出している (または引っ込んでいる) ので，短冊の面積の和は領域 D の面積と完全に等しくはならない。しかし，N の値を限りなく増やせば，一本一本の短冊の横幅 $(b-a)/N$ は限りなく 0 に近づくので，はみ出した部分 (または引っ込んだ部分) の面積は限りなく小さくなるであろう。このように，無限に細長い短冊を無限にたくさん並べれば，それら短冊の面積の和として，領域 D の面積を求めることができる。この面積の値が，関数 $f(x)$ の ($a \leqq x \leqq b$ における) 積分なのである。

以上の操作を数式で表すとどうなるか。図 1.2 と**図 1.3** からわかるとおり，

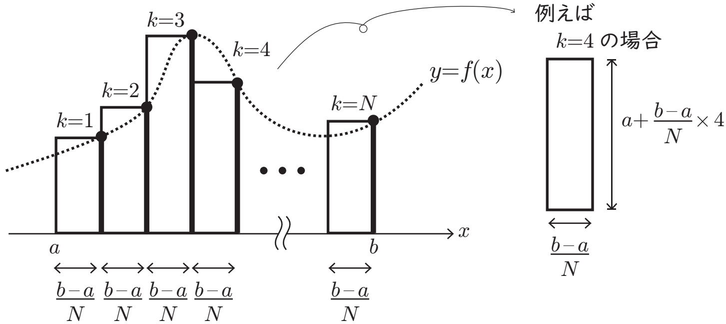


図 **1.3**

左から k 番目に位置する短冊の縦の長さは，関数 $y = f(x)$ を用いて

$$f\left(a + \frac{b-a}{N}k\right)$$

と表せる。また，短冊の横幅は，その位置によらず一定で

$$\frac{b-a}{N}$$

である。したがって，k 番目の短冊 1 本の面積は

$$f\left(a + \frac{b-a}{N}k\right) \times \frac{b-a}{N}$$

と書ける。求める面積は，N 本すべての短冊の面積の総和をとり，なおかつ N を限りなく増やした場合の値である。この値を，式 (1.2) のような積分記号を用いて表す，というのが積分法の流儀なのである。

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N \to \infty} \left[\sum_{k=1}^{N} f\left(a + \frac{b-a}{N}k\right) \times \frac{b-a}{N} \right] \tag{1.2}$$

微分の場合と同様，式 (1.2) の右辺にある小さな記号 $N \to \infty$ は，短冊の横幅を限りなく細くするとともに，短冊の数を限りなく増やすことを表している。

積分とは，無限に細長い短冊を，
無限にたくさん集めることである。

ここまでの説明からわかるとおり，微分や積分の考え方を論じる際には，「限りなく」とか「無限に」というフレーズが何度も登場する。しかし，この「無限」という言葉，じつはこの言葉のもつ意味は，私たちが考えるほど単純なものではない。それを実感できるいくつかの例を，次節で紹介しよう。

1.2　無限大 ∞ とはなにか

無限とはなにか。じつはこの問いは数学における最も深遠なテーマの一つであり，いままで多くの天才たちがその実体をとらえようと苦心を重ねて

きた。

よくある誤解の一つは，無限大 ∞ を，とてつもなく大きな数だとみなすものである。しかし，∞ はけっして数ではない。もし ∞ という数があるならば，それに 1 を加えることで，さらに大きな数をつくることができる。つまり

$$\infty < \infty + 1 \tag{1.3}$$

という大小関係が成り立つことになるので，左辺の ∞ の大きさには限界がある (つまり $\infty + 1$ よりは大きくなれない) ことになってしまう。大きさに限界があるなら，それはもはや無限大とは呼べない。

さらに，もし ∞ が数であるならば，∞ どうしの積をとることで，式 (1.4) のようにいくらでも大きな数をつくることができる。

$$\infty \ < \ \infty \times \infty \ < \ \infty \times \infty \times \infty \ < \ \cdots \ < \ \infty^{\infty} \tag{1.4}$$

しかし式 (1.4) の各項は，それぞれが「限りなく大きくなれる数」のはずである。したがって，それらの大きさに序列が生じてしまうのは，つじつまが合わない †。この意味でも，∞ を巨大な数とみなす解釈は誤りであることがわかる。

無限大∞は，数ではない。

では ∞ とは，いったいなんなのか？ じつはこれは，いくらでも大きくなれるという「状況」を表す記号なのである。

例えば，**図 1.4** に示した曲線 $y = 1/x$ 上の点 P が，曲線に沿って左上に移動する場合を考えよう。図からわかるとおり，点 P の x 座標を小さくすればするほど，点 P の y 座標はどんどん大きくなる。このとき，y 座標の大き

† 例えば，∞ が限りなく大きくなれる数ならば，$\infty \times \infty$ よりも大きくなれるはずである。しかしこの主張は，式 (1.4) と矛盾してしまう。

索　　引

【記号】

$\equiv$ *27*
$\propto$ *46*
$\simeq$ *157*
$\Delta y/\Delta x$ *110*
$\dfrac{dy}{dx}$ *109*
$\exp$ *44*
y' *109*

【あ】

アステロイド曲線 *152*
アポロニウスの円 *57*
アルキメデスの渦巻線 *94*

【い】

一価性 *24*
1 対 1 *41*
陰関数 *131*

【え】

エンゲルの公式 *20*
円周率 *54*
円錐台 *239, 268*

【お】

オイラーの公式 *254*

【か】

階　乗 *28*
回転体 *229*
ガウス関数 *208*
ガウス記号 *74*
ガウス平面 *255*
角座標 *89*
カッシーニの卵形線 *57*
加法定理 *69, 259*
関　数 *33*
関数の展開 *157*

【き】

奇関数 *73*
逆関数 *37, 123*
逆三角関数 *59*
極座標 *88*
曲線の長さ *232*
極方程式 *90*
近　似 *162*

【く】

偶関数 *73*
区分求積法 *189*

【け】

形式的な約分 *216*
原始関数 *195*

【こ】

合成関数 *118*
誤差関数 *180*
弧度法 *89*

【さ】

サイクロイド *248*
最速降下曲線 *248*

【し】

四角錘 *228*
指数関数 *106*
自然対数 *30*
自然対数の底 *27*
周期関数 *73*
収束半径 *175*
商の微分 *114*
常用対数 *30*
常用対数表 *19, 250*
初等関数 *33*
真　数 *13*
シンプソンの公式 *209*

【せ】

積の微分 *112*
積分記号 *185*
積分定数 *198*
接　点 *72*
切　片 *72*
ゼロ数 *15*
0 で割ること *7*
漸近線 *70, 74*
全単射 *41*

【そ】

双曲線 *57, 76*
双曲線関数 *55*

【た】

台形公式 *209*
対　数 *13*
対数関数 *107*
対数微分法 *130*
楕　円 *57*
単位円 *57*

【ち】

置換積分 213
チルンハウゼンの
　三次曲線 152

【て】

底 13
定義域 7, 42, 70
定積分 200
テイラー展開 157

【と】

導関数 97
動径座標 89
度数法 89

【に】

二項係数 101
二項定理 101
二進対数 30

【ね】

ネピア数 27

【は】

バーゼル問題 178
媒介変数表示 235
パラメータ表示 235

【ひ】

微分不可能 1

【ふ】

フーリエ展開 157
複素平面 255
不定形 100
不定積分 196, 198, 199
部分積分 220
フレネル積分 183

【へ】

べき乗 13

【ほ】

補角の公式 259

【ま】

マクローリン展開 157

【む】

無　限 1
無限小数 27
無限大 5
無理数 27

【め】

メルカトル級数 178

【ゆ】

有限小数 27
有理数 27

【よ】

陽関数 131
余角の公式 260

【ら】

ライプニッツ・グレゴリー
　級数 178
ラジアン 61, 89, 261

【り】

リーマン関数 99

【る】

累　乗 13

【ろ】

ローラン展開 157

【わ】

ワイエルシュトラス関数 99

—— 著 者 略 歴 ——

1997年　北海道大学工学部卒業
1999年　北海道大学大学院工学研究科修士課程修了
1999年　北海道大学大学院工学研究科博士課程中退
1999年　北海道大学助手
2005年　博士（工学）（北海道大学）
2007年　北海道大学助教
2009年　カタルーニャ工科大学（スペイン）客員教授
2012年　山梨大学准教授
2019年　山梨大学教授
　　　　現在に至る

これならわかる微積分学

Calculus: A Guide for Non-Math Persons

2022 年 8 月 18 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略

著　者　島　弘　幸
発 行 者　株式会社　コ ロ ナ 社
　　　　代 表 者　牛 来 真 也
印 刷 所　三 美 印 刷 株 式 会 社
製 本 所　有限会社　愛 千 製 本 所

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発 行 所　株式会社　コ ロ ナ 社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ　https://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–06126–0　C3041　Printed in Japan　（新井）