

経営科学のための 確率統計入門

博士（工学） 田村 信幸 著

コロナ社

まえがき

本書は理工系学部でオペレーションズリサーチ（OR）を中心とした経営科学分野を専門として学ぶ予定の、主に学部学生に必要な確率と統計の基礎理論をまとめたものである。確率統計に関する書籍は、理論を重視した数学的なものから微分積分を知らなくても理解できる文系学生を対象としたような基礎的なものまでさまざまである。最近ではデータサイエンスという言葉が流行っているようにデータ解析手法を中心とした統計的な内容に焦点を当てた書籍も増えているが、応用を意識しつつ理論も重視した書籍はそれほど多くない。

ORのような内容を勉強する場合は、具体的な現象に基づいて式を立てたり問題を解いたりする必要があるため、公式や定理を丸暗記して使用するような勉強だけでは不十分である。この意味ではあまり基礎的な内容だけを取り上げるわけにはいかない。その一方で数学的な理論を重視しすぎると初学者には難しく感じられてしまい、結果として応用に到達する前の段階で挫折し、確率統計に対する熱意や興味を失ってしまうことがある。

そこで、本書では、特に経営科学分野へ応用する上で必要と思われる確率統計に関する理論に焦点を当てて解説する。公式や定理などは、特に重要と思われるものは証明や導出過程を詳しく説明し、あまり数学的過ぎるものは理論の一部を紹介する形とした。また、どのような場面で確率や統計が利用されるかを少しでも理解してもらうため、なるべく経営や生産などの問題との関連を想像できる例を用いた解説を加えた。ただし、本書の内容で取り扱える応用範囲は限られているため、少々非現実的な設定になっていることがある点をご容赦いただきたい。なお、章末問題の中には、Excelなど数値計算のためのソフトウェアを使用しないと計算にたいへん手間がかかるものが含まれている。これらについては本書で詳しく取り上げていないが、さまざまな書籍が出版されて

いるのでそちらを参照してほしい。

最後に、本書を執筆するにあたっては多くの方にご協力いただいた。筆者が法政大学理工学部経営システム工学科の専門科目である「確率統計」を担当していた関係で、木村光宏先生（法政大学教授）に本書を執筆する機会を与えていただいた。作村建紀先生（法政大学専任講師）と太田修平先生（神奈川大学助教）には初稿に目を通していただき、誤りや不備などをご指摘いただいた。お二方の専門家としての貴重なご意見は本書を完成させる上でたいへん有益だったと考えている。そして、コロナ社の方々には、当初の出版予定が大幅に遅れたにもかかわらず辛抱強く完成を待っていただいた。この場を借りてこれらの方々には心からお礼を申し上げたい。

2022年4月

田村 信幸

目 次

1. 確率とはなにか

1.1 確率と統計の役割	1
1.2 確率はなんの役に立つ?	2
1.3 基本用語の定義	4
1.4 組合せ的確率と統計的確率	5

2. 確率の基礎概念

2.1 確率の定義	10
2.2 確率の性質	12
2.3 条件付き確率と独立性	18
2.3.1 条件付き確率	18
2.3.2 ベイズの定理	19
2.3.3 独立性	23
章末問題	25

3. 確率変数と確率分布

3.1 事象と確率変数	27
3.2 離散型分布と連続型分布	29
3.2.1 確率分布とはなにか	30

3.2.2	離散型確率分布	31
3.2.3	連続型確率分布	36
3.2.4	1次元分布における条件付き確率	38
3.3	期待値とその周辺	39
3.3.1	期待値と分散	40
3.3.2	条件付き期待値	48
3.3.3	積率母関数	51
3.3.4	積率を用いた確率の評価	56
3.4	確率変数の関数の分布	57
3.4.1	確率変数の四則演算	58
3.4.2	確率変数の最大値と最小値	62
3.4.3	確率変数の変数変換	64
章末問題		67

4. いろいろな確率分布

4.1	連続型確率分布	71
4.1.1	正規分布	71
4.1.2	対数正規分布	76
4.1.3	コーシー分布	78
4.1.4	一様分布とベータ分布	79
4.1.5	指数分布とガンマ分布	81
4.2	離散型確率分布	86
4.2.1	二項分布	86
4.2.2	超幾何分布	89
4.2.3	負の二項分布と幾何分布	91
4.2.4	ポアソン分布	93

章 末 問 題	94
---------	----

5. 2次元確率分布

5.1 2次元確率分布の基礎	98
5.1.1 同時分布	98
5.1.2 2次元離散型確率分布	102
5.1.3 2次元連続型確率分布	104
5.2 独立性と条件付き分布	106
5.3 2次元確率分布とさまざまな特性値	109
5.3.1 積率母関数	109
5.3.2 条件付き期待値	110
5.3.3 共分散と相関係数	113
5.4 確率変数の関数の分布	115
5.5 混合分布	117
章 末 問 題	118

6. 極限定理

6.1 大数の法則	122
6.2 中心極限定理	124
章 末 問 題	125

7. 統計とはなにか

7.1 統計の主な役割	127
7.2 記述統計学と推測統計学	128

7.3 統計学とその周辺	129
--------------	-----

8. 標 本 分 布

8.1 母集団と標本	131
8.2 統 計 量	134
8.3 正規母集団の下での統計量の分布	136
8.3.1 正規分布から導かれる分布	136
8.3.2 標本平均の分布	138
8.3.3 標本分散の分布	139
章 末 問 題	141

9. 推 定

9.1 点 推 定	143
9.1.1 推定量の性質	144
9.1.2 最 尤 法	151
9.2 区 間 推 定	156
9.2.1 信頼区間の作り方	157
9.2.2 正規母集団の下での区間推定	158
9.2.3 母比率の区間推定	161
章 末 問 題	162

10. 検 定

10.1 基本的な考え方	165
10.2 正規母集団の下での検定	169

10.3 p 値の考え方	173
章 末 問 題	175

11. 単回帰分析

11.1 回帰分析とは	178
11.2 回帰係数の推定	180
11.2.1 最小二乗法	180
11.2.2 最小二乗推定量の性質	182
11.3 回帰式の評価	184
11.4 最尤法と最小二乗法	188
章 末 問 題	189
引用・参考文献	192
索 引	193

1

確率とはなにか

本章では確率を本格的に学ぶ上でいくつかの準備を行う。まず確率がどのような場面で役に立つのかを簡単な例を通して説明し、高校までの考え方では数学的にきちんと議論する上では少々問題があることを述べる。

1.1 確率と統計の役割

大学の専門科目の中には「確率統計」というように確率と統計を併せて一つの科目として扱っていることが少なくない。このような事情から考えてどちらも同じ目的をもつ科目であるかのような印象を受けるかもしれないが、実際にはそうではない。

例えば、高校時代の授業でもお馴染みのサイコロ投げを考えた場合、出る目は1から6の6通りである。正しいサイコロを意図的に特定の目が出るような細工をせずに n 回投げるとき、目 i の出る回数を r_i とすると、 n が十分大きければ r_i/n は $1/6$ に近づくと考えられる。このような偶然性を伴う現象からなんらかの法則を見出すときに用いられるのが統計（学）という学問である。これに対し、このような法則がわかっているとき、偶然性を伴う、あるいは予測することが不可能な現象（ここでは確率的な現象と呼ぶ）を数学的に体系化した上で考察を行うのが確率（論）の役割である。考察といふとかなり漠然としている印象を受けるかもしれない。これは対象や目的によって変わるため、なにを想定しているのかわかりにくいかもしれないが、敢えてこのような表現を用いている。

1.2 確率はなんの役に立つ？

高校までに学んだ確率でよく目にするのは以下のような問題ではないだろうか。

例 1.1 (確率の例)

- (1) 1円, 10円, 100円の3枚のコインを同時に投げたとき、裏がちよ
うど2枚出る確率は？
- (2) ジョーカーを除いた52枚のトランプカードからランダムに5枚の
カードを引いたとき、ハートのエースが含まれる確率は？
- (3) 赤玉5個と白玉5個が入った壺からランダムに3個の玉を取り出し
たとき、赤玉2個と白玉1個である確率は？
- (4) 大小2個のサイコロを投げたとき、出た目の和が5以上となる確
率は？

例 1.1 のような問題を解く上で確率という学問が必要であることは容易に想像できるであろうが、いずれも日常生活ではほぼ役に立たないというのが本音だと思う。そこで、現時点で解くことは難しいが、もう少し踏み込んだ応用例をいくつか紹介する。

例 1.2 (設計の問題) 図 1.1 のように2個の電池, スイッチ, モータの四つの機器で構成される製品(直流モータ駆動回路)を考える。

この製品を使用するにあたり最も起こってほしくないのは「モータの不動作」という場合である。モータの不動作の原因となるのは2個の電池やスイッチ, そしてモータそのものの故障である。よって, このモータ不動作の確率をなるべく低下させるためには, これらの機器が故障する確率を低下させるとよい。しかし, 設計や開発に伴う費用には制限があるため, す

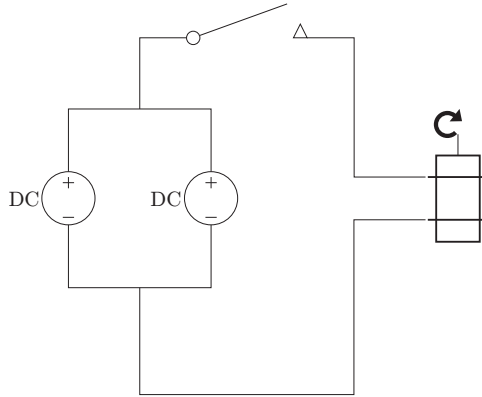


図 1.1 直流モータ駆動回路

すべての機器の故障確率を低下させることはできないことがある。また、いうまでもなく技術的に確率をゼロにすることも不可能である。このとき、どの機器の故障確率を優先的に低下させるように設計すべきだろうか？

この問題は確率を求めることができれば解決できそうだ、ということは容易に想像できるであろう。確率に関する問題はどうしても「確率を求める」ことが最終目的になってしまうが、現実的には確率を求めた後でなんらかの意思決定を行うことで初めて役に立つことが多い。求めた確率をどのように使うかは確率論の役割ではないため、なぜ確率を求めるのが確率の世界だけでは漠然として見えていないことが多い。

上の例は非常に単純なので、仮に各機器の故障確率が与えられれば難なく確率を求めることができるが、構造が複雑になるとこれは容易ではない。つぎの例は単に確率がわかっただけでは解決できない問題である。

例 1.3 (仕入れ量の決定 1) あるコンビニエンスストアでは弁当を販売している。1日に売れる弁当の数は事前にはわからず確率的に変動する。余った弁当は廃棄処分にする必要があるため、あまり沢山仕入れると店にとっては損失になる。一方、売り切れてしまった場合、その後で弁当を買

4 1. 確率とはなにか

いに来た客がいると本来得られたはずの収入が得られないことになるため、仕入れる量が少なすぎるのも問題である。弁当の原価と販売価格、および廃棄処分に伴う費用がすべてわかっているとき、いったいどれくらい仕入れるとよいだろうか？

この例で確率を考えるのは1日に売れる弁当の数である。仮にこれが一定 (n) ならば $m (> n)$ 個の弁当を仕入れたときの売上げ、 $m - n$ 個余ったときの損失を具体的に計算できるため、最終的な利益が得られ、最適な仕入れ量を決定できる。実際には n が確率的に変動するため、利益を得ることは簡単ではないが、弁当が N 個売れる確率 p_N が与えられれば利益（正確には期待利益）を求めることができる。よって、 n が一定の場合よりも式が複雑で少し難しくなるが、利益を求めこれを最大とする仕入れ量を決定できる。この例は新聞売り問題と呼ばれる有名な問題であり、オペレーションズリサーチや在庫管理（生産管理）などの分野で取り上げられている。

1.3 基本用語の定義

確率的な考え方を数学的に正しく記述するため、いくつかの重要な用語を定義する。注目している確率的な現象に対し、実験や観測などを行ってある一つの結果を得るための行動を**試行** (trial) という。そして、この試行によって得られる可能性のある一つ一つの結果を**根元事象** (sample point, または標本点) と呼ぶ。通常、根元事象は ω という記号（ギリシャ文字のオメガ）で表されるため、本書でもこの記号を用いる。すべての根元事象で構成された集合 Ω を**標本空間** (sample space)、標本空間の任意の部分集合を**事象** (event) という。 Ω は ω の大文字である。根元事象は集合（事象）の要素になるため、これを $\omega \in A$ で表す。また、任意の事象 A が標本空間の部分集合であるという事実を $A \subset \Omega$ で表す。当然のことながら標本空間自体も一つの事象となっているため、**全事象** (whole event) といういい方をすることもある。定義からわかる

ように標本空間（全事象）は試行によって起こり得るすべての結果を含んでいる。一方、根元事象を一つももたない事象を空事象（void events）と呼び、 \emptyset という記号で表す。

例えば、例 1.1 (4) における根元事象、標本空間、事象は以下のようになる。

$$\omega_{ij} = \text{大きなサイコロの目が } i, \text{ 小さなサイコロの目が } j$$

$$\Omega = \{\omega_{ij} : 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\}$$

$$A = \{\omega_{ij} : i + j \geq 5\}$$

このとき、標本空間に含まれる根元事象の数は全部で 36 となる。

以上の事実から、事象 A の生起する確率 $\Pr\{A\}$ を求めるための準備がある程度整ったことになる[†]。ここで重要なのは根元事象 ω_{ij} は先に定義したように結果を示したものであり、数値ではないことである。標本空間 Ω や事象 A は根元事象で構成されるため、同じく数値ではない。よって、これらを用いて一般的な四則演算を行うこともできない。なぜわざわざこのようなことを述べるかというと、初学者は事象と事象の生起する確率、そして後述する確率変数を混同してしまい、根元事象自体がなんらかの数値で表されると思い込んでしまうためである。比較的単純な内容であればこの辺を十分理解できていなくても特別困ることはないが、もっと高度な内容を勉強するときには問題となる。

1.4 組合せの確率と統計的確率

例 1.1 のような問題を解く場合、根元事象、標本空間、そして事象が定まると、以下のように確率を求めることができる。例えば例 1.1 (1) で x 円のコインが表 (head) となる事象を $\omega_{(x,H)}$ 、裏 (tail) となる事象を $\omega_{(x,T)}$ で定義すると、標本空間は

[†] 厳密には後述する組合せの確率で示すように別の前提条件（仮定）が必要である。

索引

	<p>【あ】</p> <p>アーラン分布 84</p> <p>【い】</p> <p>一様分布 79</p> <p>一致推定量 147</p> <p>一致性 147</p> <p>一般加法定理 17</p> <p>一般乗法定理 19</p> <p>【う】</p> <p>上側信頼限界 157</p> <p>【か】</p> <p>回帰係数 179</p> <p>回帰直線 180</p> <p>回帰による変動 185</p> <p>回帰分析 179</p> <p>回帰モデル 179</p> <p>カイ二乗分布 137</p> <p>ガウス分布 73</p> <p>ガウス・マルコフの定理 183</p> <p>確率 11</p> <p>——の3公理 11</p> <p>確率関数 32</p> <p>確率質量関数 32</p> <p>確率分布 31</p> <p>確率変数 28</p> <p>確率密度関数 36</p> <p>仮説検定 165</p> <p>片側検定 169</p> <p>偏り 145</p> <p>加法定理 17</p> <p>関数の期待値 45</p>	<p>観測 28</p> <p>観測値 28</p> <p>ガンマ分布 83</p> <p>【き】</p> <p>幾何分布 91</p> <p>棄却 167</p> <p>記述統計学 128</p> <p>規準化 76</p> <p>期待値 40, 52</p> <p>——の線形性 44</p> <p>帰無仮説 167</p> <p>逆関数法 64</p> <p>共分散 113</p> <p>寄与率 186</p> <p>【く】</p> <p>空事象 5</p> <p>区間推定 143, 157</p> <p>組合せの確率 6</p> <p>クラメル・ラオの不等式 149</p> <p>【け】</p> <p>結合確率分布 100</p> <p>結合法則 15</p> <p>決定係数 186</p> <p>検定 165</p> <p>検定統計量 167</p> <p>【こ】</p> <p>交換法則 15</p> <p>誤差項 179</p> <p>誤差分散 179</p> <p>コーシー分布 78</p>	<p>根元事象 4, 10</p> <p>混合分布 117</p> <p>【さ】</p> <p>最小二乗推定値 181</p> <p>最小二乗推定量 181</p> <p>最小二乗法 181</p> <p>採択 167</p> <p>最頻値 41</p> <p>最尤推定値 153</p> <p>最尤推定量 153</p> <p>最尤法 152</p> <p>最良線形不偏推定量 183</p> <p>差事象 13</p> <p>残差 180</p> <p>残差変動 185</p> <p>【し】</p> <p>シグマ集合体 11</p> <p>試行 4</p> <p>事後確率 21</p> <p>事象 4, 10</p> <p>指数分布 82</p> <p>事前確率 21</p> <p>下側信頼限界 157</p> <p>実測値 28</p> <p>従属変数 179</p> <p>周辺確率関数 103</p> <p>周辺確率密度関数 106</p> <p>周辺分布関数 100</p> <p>寿命時間 50</p> <p>条件付き確率 18</p> <p>条件付き確率関数 107</p> <p>条件付き確率密度関数 107</p> <p>条件付き期待値 110</p>
--	---	--	---

条件付き分散	112	第二種の誤り	167	パスカル分布	92
乗法定理	19	タイプ I の誤り	167	パラメータ	72, 132
信頼区間	157	タイプ II の誤り	167		
信頼係数	157	対立仮説	167	【ひ】	
信頼度関数	31	互いに独立	23	非心カイ二乗分布	137
		互いに排反	11	非復元抽出	90, 132
【す】		単回帰モデル	179	標準誤差	184
推測統計学	128	単純仮説	168	標準正規分布	75
推定	143			標準偏差	46
推定値	145	【ち】		標本	132
推定量	144	チェビシェフの不等式	57	——の大きさ	132
		中央値	42	標本空間	4, 10
【せ】		抽出	132	標本相関係数	187
正規化	76	抽出率	133	標本抽出	132
生起確率	8	中心カイ二乗分布	137	標本調査	131
正規分布	72	中心極限定理	124	標本点	4
——の再生性	75	超幾何分布	90	標本分散	135
正規方程式	181			標本分布	135
正規母集団	136	【て】		標本平均	122, 135
正則条件	149	データ	128		
生存関数	31	点推定	143	【ふ】	
積事象	13			フィッシャー情報量	149
積率	51	【と】		復元抽出	90, 132
積率母関数	53	統計的推測	128, 131, 143	複合仮説	168
——の一意性	55	統計量	135	負の二項分布	35, 92
説明変数	179	同時確率関数	102	不偏推定量	146
全確率の定理	20	同時確率質量関数	102	不偏性	146
線形推定量	183	同時確率分布	100	不偏標本分散	135
線形不偏推定量	183	同時確率密度関数	104	不偏分散	135
全事象	4	同時積率母関数	109	分散	46, 52
全数調査	131	同時分布	100	分散分析	186
尖度	52	同時分布関数	100	分散分析表	186
全変動	185	特性関数	55	分配法則	15
		独立変数	179	分布	31
【そ】		ド・モルガンの法則	15		
相関係数	114, 186	【に】		【へ】	
		二項係数	35	平均	40
【た】		二項定理	87	平均残存寿命	49
第一種の誤り	167	二項分布	87	平均二乗誤差	148
対数正規分布	77			ベイズの定理	20, 21
大数の強法則	123	【は】		ベータ分布	80
大数の弱法則	123	バイアス	145	ベルヌーイ試行	86
対数尤度関数	153			ベルヌーイ分布	86

変数変換	64	無作為標本	133	予測値	179
変動係数	48				
【ほ】		【め】		【り】	
ポアソン分布	93	メディアン	42	離散型	32
ポアンカレの定理	17			離散型確率分布	32
母集団	131	【も】		離散型確率変数	31
母集団分布	132	目的変数	179	離散型分布	32
母数	72, 132	モード	41	両側検定	168
母標準偏差	135	モーメント	51		
母比率	161	モーメント法	151	【る】	
母分散	135	モーメント母関数	53	累積分布関数	31
補分布	31	モンティホール問題	21		
補分布関数	31			【れ】	
母平均	135	【ゆ】		連続型	36
		有意水準	168	連続型確率分布	36
【ま】		有限母集団	132	連続型確率変数	36
マルコフの不等式	56	有効推定量	149	連続型分布	36
		尤度	152		
【む】		尤度関数	152	【わ】	
無記憶性	81	尤度方程式	153	歪度	52
無限母集団	132			和事象	12
無作為抽出	133	【よ】			
		余事象	13		

【A】		【F】		PDF	36
a の周りの k 次積率	51	F 比	185	PF	32
ANOVA	186	F 分布	137	【T】	
				t 分布	138
【B】		【K】		【数字】	
BLUE	183	k 次積率	51	2次元離散型確率分布	102
				2次元連続型確率分布	104
【C】		【P】			
CDF	31	p 値	174		

—— 著者略歴 ——

1996年 中央大学理工学部管理工学科卒業
1998年 東京工業大学大学院博士前期課程修了（経営工学専攻）
2001年 中央大学大学院博士後期課程修了（経営システム工学専攻）
博士（工学）
2002年 中央大学助手
2004年 防衛大学校助手
2007年 防衛大学校助教
2011年 法政大学准教授
現在に至る

経営科学のための確率統計入門

Introduction to Probability and Statistics for Management Science

© Nobuyuki Tamura 2022

2022年6月24日 初版第1刷発行



検印省略

著者 田 村 のぶ ゆき
信 幸
発行者 株式会社 コロナ社
代表者 牛来 真也
印刷所 三美印刷株式会社
製本所 有限会社 愛千製本所

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844 · 電話 (03) 3941-3131(代)

ホームページ <https://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-06125-3 C3041 Printed in Japan

(金)



JCCOPY <出版者著作権管理機構 委託出版物>

本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつど事前に、出版者著作権管理機構（電話 03-5244-5088, FAX 03-5244-5089, e-mail: info@jccopy.or.jp）の許諾を得てください。

本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めていません。落丁・乱丁はお取替えいたします。