多変数の制御・解析・最適化に使える行列論

博士（工学）　浅井　徹　著

コ ロ ナ 社

ま　え　が　き

多変量解析，最適化，システム制御などの分野では，多変数が関わる問題をおもな対象とするため，行列を用いることが多い。その際，できる限り行列の成分に踏み込まないように，行列そのものを1つの単位として扱うと見通し良く考えることができる。また，行列に基づいて問題を解決するためには，行列でできることを理解しているだけではなく，目前の問題を行列を用いた手法で解決できそうだとイメージできることが重要である。

このようなイメージを持てるほどの知識を得るには，大学初年度の線形代数の授業だけでは質・量ともに不十分である。例えば，実用上は正定行列や特異値分解などが多用されるが，それらを大学初年度の限られた時間で教えることは不可能である。そこで，実用上必要な知識を追加で勉強する必要がある。また，そのための書籍も出版されている。しかしながら，それらの書籍を独力で理解することが困難であるか，あるいは読めても非常に長い時間がかかる，というのが，ごくごく一部の学生を除いた多くの学生の現実である。そのため，例えば卒業研究などにおいて行列を活用した問題解決に取りかかれるようにするためには，教員による補足説明が不可欠である。しかしながら，このような補足説明に時間を取られると，当然，研究を進める時間は減ってしまう。すなわち，学習の非効率さが研究のボトルネックとなり，得られる研究成果を制約してしまう。これでも学生には教員がついているだけマシで，社会人技術者の場合は，周囲に勉強を補助してくれる人がいなかったり，勉強に割ける時間が厳しく制限されたりするなど，状況はさらに悪いことが多い。

こうした状況を改善するためには，学習の効率を高めることが必要不可欠である。そこで，本書は独力で効率良く学習できることを主目的とした。筆者のこれまでの経験から，学習が非効率になる原因は，学習者と書籍の間の以下のミスマッチにあると思われる。

- 知識そのものは，定理や証明の形で過不足なく示されている。一方，それらの知識を活用する者にとっては，その知識の必要性の説明や結果の意味の説明などが必要である。しかしながら，多くの場合そのような説明が不足している。
- 各話題が数学的には正しい順序で並べられているが，それらが学生にとって必ずしも必要性を感じる順序や，結果の意味を理解しやすい順序ではない。

これらのミスマッチが，独学では理解に至らない，あるいは，理解が積み上がっていかない，動機が持続しない，などの事態をもたらしている理由と考えられる。そこで，本書では，まず各話題の動機づけを与える問題や疑問を示した上で，問題の本質とその解決法を理解するための議論を進めることとした。また，本書の内容を学ぶことで問題解決能力が高まることを実感できるように，本書の内容を中級，かつ実用上重要なものに絞ることとした。そのため，大学1

年の線形代数で比較的理解が浸透しているであろう項目については，説明を割愛した。具体的には，1 次結合，1 次独立・1 次従属，行列式，正則行列，逆行列，固有値・固有ベクトルについては既知のものとした。また，行列自身の理解には必要であっても，応用される頻度が少ないものは取り扱っていない。一方，数学的にはやや高度であっても，実用上必要なものは取り上げた。

上記の 2 つ目のミスマッチを解消するために，本書では必要に応じて数学的概念の順序とは異なる順序で説明を与えている。順序が逆になっている部分もあれば，同じことを 2 回説明している部分もある。また，線形代数の講義を受講したことがある読者には，行列の階数（ランク）は既習の概念であるが，本書では階数をよく用いられるものとは異なる方法で定義している。その定義は，よく用いられるものよりも，階数の幾何学的な意味を理解しやすいものである。以上のことを踏まえて，本書を読んでいただきたい。

本書に限らず，数学的な内容を理解するには，集合と述語論理の理解が必要である。工学向けの書籍では，述語論理を避けて記述されているものもある。しかしながら，述語論理が必要な内容を述語論理を用いずに説明すると，説明が曖昧，かつ回りくどくなり，それが理解を妨げる。本書では，述語論理が必要な部分は述語論理を用いて記述している。そのため，例えば以下のような理解は最低限必要である。

- 集合 X, Y が述語 $P(x), Q(y)$ を用いて

  $$X = \{x : P(x)\}, \quad Y = \{y : Q(y)\}$$

  と定義されているときに，$X \subseteq Y$ や $X = Y$ を証明するにはどうすればよいかを理解している。

- 以下の 2 つの述語論理

  $$\forall x \in X \ \ \exists y \in Y \quad P(x, y)$$
  $$\exists y \in Y \ \ \forall x \in X \quad P(x, y)$$

  を，“$\in X$”，“$\in Y$” を読み飛ばすことなく読み取り，さらに両者の意味の違いを理解している。

これらについては，例えば中島著『集合・写像・論理』[1)][‡]などにわかりやすく説明されている。

なお，改めていうまでもないことであるが，書いてあることを鵜呑みにせず，自分で手を動かして確認することがなによりも重要である。

本書は，研究室の輪講に用いるために執筆を始めたテキストがもとになっている。その後，輪講時の学生からの意識的・無意識的なフィードバックを反映して改訂を繰り返した結果である。

2021 年 11 月

浅井　徹

‡　肩付き番号は巻末の引用・参考文献を示す。

記　　　号

$\mathbf{N}$	（1 から始まる）自然数の集合
$\mathbf{R}$	実数の集合
$\mathbf{C}$	複素数の集合
$\mathbf{R}^n$	n 次元実ベクトルの集合
$\mathbf{C}^n$	n 次元複素ベクトルの集合
$\lVert x \rVert$	ベクトル x のユークリッドノルム
$\mathbf{R}^{m\times n}$	$m \times n$ 実行列の集合
$\mathbf{C}^{m\times n}$	$m \times n$ 複素行列の集合
A^T	行列 A の転置行列
$\bar{A}$	行列 A の共役行列
A^*	行列 A の共役転置行列 $= \bar{A}^T$
$[a_{ij}]$	第 i 行 j 列の要素が a_{ij} となる行列
I_n	n 次の単位行列（文脈からサイズがわかる場合には，添字のサイズ n を省略）

$A \in \mathbf{C}^{m\times n}$，$v \in \mathbf{C}^n$，$S \subseteq \mathbf{C}^n$ のとき，AS，$v+S$ はそれぞれ以下の集合を表す。

$$AS = \{A\,x : x \in S\}, \quad v + S = \{v + x : x \in S\}$$

演習の解答例

https://www.coronasha.co.jp/np/data/docs1/978-4-339-06124-6_1.pdf

目　　　　次

1.　ブロック行列 Part I

2.　線形方程式 Part I

3.　正定行列と最小 2 乗法

4.　線形方程式 Part II

5.　ブロック行列 Part II

6.　ユニタリ行列による対角化と正規行列

7.　特 異 値 分 解

8.　ノ　　ル　　ム

1 ブロック行列 Part I

行列を扱う際，複数の行列を組み合わせて 1 つの行列を構成することがある。例えば

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を用いて，行列 M を

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 8 & 7 \\ \hdashline 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

と定めることなどである。このとき，M は行列を「要素」とする，より大きな行列となる。このようにして行列 M を構成するとき，A, B, C, D を M の**ブロック**，M を**ブロック行列**と呼ぶ。ブロックを組み合わせて行列を構成するときには，各ブロック行に含まれる行列の行数，各ブロック列に含まれる行列の列数はそれぞれ同じでなければならない。上の例では A と B，C と D の行数は等しくなければならない。同様に，A と C，B と D の列数も等しくなければならない。

逆に，1 つの行列を分割して考える場合もある。例えば

$$A = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & 7 & 6 \\ \hdashline 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],\quad A = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ \hdashline 1 & 8 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

などである。上の例のように，ある 1 つの行列に対して分割の仕方は 1 通りではない。行列の分割は，そのときの計算の都合に応じて決められる。ブロックに分割した行列は，(i, j) ブロックを A_{ij} と書くと，一般に

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

のように表される。これを行列 A のブロック表示という。

行列のブロック表示を用いると，スカラー要素に踏み入らずブロック単位で計算を行うことができるので，見通し良く計算を進めることができる。ただし，そのためにはブロック行列の和と積を理解する必要がある。いま，$A \in \mathbf{R}^{m\times n}$，$B \in \mathbf{R}^{p\times q}$ がつぎのように分割されているとする。

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right] \tag{1.2}$$

ただし，各分割のサイズは以下のとおりとする。

$$A_{11} \in \mathbf{R}^{m_1\times n_1},\ A_{22} \in \mathbf{R}^{m_2\times n_2},\ B_{11} \in \mathbf{R}^{p_1\times q_1},\ B_{22} \in \mathbf{R}^{p_2\times q_2} \tag{1.3}$$

ここで，対応するブロックは同一サイズ，すなわち

$$m_1 = p_1, \quad m_2 = p_2, \quad n_1 = q_1, \quad n_2 = q_2$$

であるとき，明らかに

$$A + B = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ \hline A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{array}\right] \tag{1.4}$$

が成り立つ。また，A の列の分割と B の行の分割が同一，すなわち，$n_1 = p_1$，$n_2 = p_2$ であるとき

$$AB = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}\right] \tag{1.5}$$

が成り立つ。式 (1.4), (1.5) はいずれも，ブロック行列の和，積を計算する際には各ブロックがあたかもスカラーであるかのように計算すればよいことを意味している。ただし，ブロック行列の和，積が計算できるためには，対応するブロック間でサイズが整合していなければならない。

演習 1.1　以下の計算を要素単位，ブロック単位でそれぞれ計算し，同じ結果になることを確認せよ。

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \\ \hline -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ \hline 2 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

ブロック行列を用いると，計算や式の構造の見通しを良くすることができる。例えば $z = A\,x + B\,u$ をブロック行列を用いて表現すると

$$z = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

と書くことができる。式 (1.6) のように表現すれば，z が x, u からなるベクトルに関して線形な関係にあることが明確である。さらに，u が

$$u = C\,x + D\,y \tag{1.7}$$

で与えられるときにも，z を

$$\begin{aligned} z &= A\,x + B(C\,x + D\,y) \\ &= (A + BC)x + BD\,y \\ &= \begin{bmatrix} A + BC & BD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.8}$$

のように行列とベクトルの積の形式で表現することができる。式 (1.8) は，式 (1.7) を

$$\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

と表現し，これを式 (1.6) に代入して

$$z = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BC & BD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

と計算することによっても得られる。

また，例えば

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

の積 AB は，A, B をそれぞれ

$$A = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hdashline -1 & 1 & 1 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ \hdashline 1 & 2 \end{array}\right]$$

と分割して，A の 1 ブロック行目が単位行列と零行列のみからなることに気づくと，AB の 1 ブロック行目を計算する必要がないことが即座にわかる。

対角ブロック A_{ii}（$i=1,2,\cdots,\ell$）が正方行列であり，$i<j$（$i>j$）のとき $A_{ij}=0$ となるブロック行列を**ブロック下（上）三角行列**という。A, B がブロック下（上）三角行列のとき，積 AB もブロック下（上）三角行列となる。例えば，$\ell=2$ で A, B ともに上三角行列，すなわち

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

であるとき，AB は

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ 0 & A_{22}B_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.11}$$

となり，上三角行列である。特に，A, B がブロック対角行列

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$(A_{11}, B_{11} \in \mathbf{R}^{p_1\times p_1},\ \ A_{22}, B_{22} \in \mathbf{R}^{p_2\times p_2})$$

のときは，AB は

$$AB=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & 0 \\ 0 & A_{22}B_{22} \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

のようにブロック対角となる。

行列の転置は，行と列を入れ替える操作である。例えば

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & -4 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

である。ブロック行列の転置を考えるために，上記の例をブロックに分割すると

$$\left[\begin{array}{c:cc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hdashline -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{array}\right]^T = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 4 & -1 & 2 \\ \hdashline 2 & 5 & 3 & -4 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \end{array}\right] \tag{1.14}$$

が得られる。これより，一般に

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

であることがわかる。スカラーの場合は単に要素の位置を変えるだけでよいが，ブロック行列の場合は各ブロックも転置をとらなければならないことに注意が必要である。上記の特別な場合として，A が 1 ブロック行あるいは 1 ブロック列のみからなる場合は

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_1^T & A_2^T \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_1^T \\ A_2^T \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

である。

索　　　引

—— 著者略歴 ——

1991年　東京工業大学工学部制御工学科卒業
1993年　東京工業大学大学院理工学研究科修士課程修了（制御工学専攻）
1996年　東京工業大学大学院理工学研究科博士課程修了（制御工学専攻），博士（工学）
1996年　日本学術振興会特別研究員（～1998 年）
1997年　カリフォルニア大学バークレー校客員研究員（～1998 年）
1999年　大阪大学助手
2002年　大阪大学講師
2005年　大阪大学助教授
2007年　大阪大学准教授
2015年　名古屋大学准教授
現在に至る

多変数の制御・解析・最適化に使える行列論

Matrices Useful for Multivariable Control, Analysis, and Optimizations

2022 年 1 月 17 日　初版第 1 刷発行 ★

検印省略

著　者　浅井　徹（あさい　とおる）
発行者　株式会社　コロナ社
代表者　牛来真也
印刷所　三美印刷株式会社
製本所　有限会社　愛千製本所

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発行所　株式会社　コロナ社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ https://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–06124–6　C3041　Printed in Japan　（新宅）G