機械システム学のための数値計算法

— MATLAB版 —

工学博士　平井 慎一 【著】

コ ロ ナ 社

ま　え　が　き

本書の目的は，機械システムにかかわる数学的な問題を数値的に解くときに有用な数値計算アルゴリズムを紹介することである。現代の工学ではコンピュータが駆使され，さまざまな数値計算が実行されている。ただし，工学の分野によって必要とされる数値計算アルゴリズムは少しずつ異なる。本書では，機械システム学における数値計算アルゴリズムを対象とし，その原理を説明するとともに，数値計算のためのソフトウェアである MATLAB を用いた実際の計算方法を述べる。

本書は，2008 年に発刊された前著『機械システム学のための数値計算法』の改訂版である。前著の発刊から 10 年以上が経過し，コンピュータならびに数値計算の環境が大きく変わった。数値計算のためのソフトウェアが普及し，特に MATLAB はさまざまな分野の数値計算に用いられている。このような経緯に鑑み，MATLAB を用いることを前提にして本書を執筆し，サンプルプログラムを別途 Web 上に用意した[†]。一方，数値計算アルゴリズムの原理の説明は，ソフトウェアに依存しない一般的な形で進めており，MATLAB を使わない場合も参考になると思う。

機械システムにかかわるいくつかの数値計算法は，機械力学を支えるさまざまな原理と密接に結びついている。例えば，常微分方程式の数値解法である制約安定化法は，制約を有する系のラグランジュの力学と密接に結びついている。偏微分方程式の数値解法である有限要素法は，弾性体の静力学の変分原理や動力学の変分原理をもとに導くことができる。得られた式を解くときには，非線形最適化や常微分方程式の数値解法を用いる。そこで，機械システムの例や機械力学の原理に結びつけて，このような数値計算アルゴリズムを説明することを試

† 本書の書籍詳細ページ（https://www.coronasha.co.jp/np/isbn/9784339061192/）を参照してください（コロナ社 Web ページから書名検索でもアクセス可能）。

みる。本書では，可能な限り具体的な数値例を用いて説明し，抽象的な記号で説明することは極力抑えた。章末問題は，本文で解説した事項の演習のみならず発展的な内容や MATLAB を用いた計算を含んでいるので，目を通して欲しい。

なぜ数値計算の手法を学ぶ必要があるのであろうか。われわれの多くは数値計算を使うユーザであり，数値計算の手法の研究者ではない。それでも数値計算の手法を学ぶ必要があるのは，道具の原理を知っているほど適切かつ効果的に道具を使いこなすことができるからである。まず，数値計算アルゴリズムを理解していると，問題を解くためにはなにをどこまで定式化すればよいかがわかる。例えば，制約を有する常微分方程式を数値的に解く場合，制約安定化法を知っていると，制約を解いて常微分方程式に代入するという計算が不要になる。機械システムの定式化においては，制約を有する常微分方程式に帰着する場合が多く，制約を有する常微分方程式の数値解法を理解していると，問題を容易に解くことができる。また，数値計算のためのソフトウェアを使って得た数値解が正しいか誤っているかは，ユーザが判断しなくてはならない。アルゴリズムの原理，その長所や短所を理解していると，数値解が正しいか誤っているかの判断，数値解が誤っている場合の対処が可能になる。さらにはハードウェアによって適切なアルゴリズムが異なる。数値計算を実行するハードウェアには，単一の CPU のみならず，複数の CPU を接続したクラスタシステム，VLSI 上に実装した論理回路など，いくつかの選択肢がある。ハードウェアに適したアルゴリズムを選択するためには，アルゴリズムの原理，長所や短所を理解しておく必要がある。

著者は機械システムの研究者であり，数値計算アルゴリズムのユーザであるが，数値計算法は専門としていない。機械システムにかかわる数値計算アルゴリズムの紹介という，本書の目的が満たされているかどうかは，読者の方々のご判断を仰ぎたい。

最後に，著者をつねに温かく見守ってくれた妻と，著者に元気を与え続けてくれた子供たちに感謝する。

2019 年 9 月

著　者

目　　次

1.　数値計算とは …… *1*

2.　MATLAB

2.1　行列とベクトル …… *4*
2.2　常微分方程式 …… *6*
2.3　最　適　化 …… *8*
2.4　パラメータの受渡し …… *10*
2.5　乱　数 …… *11*
章　末　問　題 …… *12*

3.　常微分方程式

3.1　常微分方程式の標準形 …… *15*
3.2　常微分方程式の数値解法 …… *19*
3.3　制約安定化法 …… *23*
3.4　パフィアン制約の安定化 …… *26*
章　末　問　題 …… *29*

4.　連立一次方程式

4.1　ガウスの消去法と LU 分解 …… *32*
4.2　LU分解の計算 …… *38*
4.3　ピボット選択と置換行列 …… *42*

4.4 冗長な連立一次方程式 …… 47
章 末 問 題 …… 50

5. 射 影

5.1 正規方程式と射影行列 …… 52
5.2 正 規 直 交 系 …… 57
5.3 グラム・シュミットの直交化と QR 分解 …… 58
5.4 ノ ル ム 最 小 解 …… 61
章 末 問 題 …… 62

6. 補 間

6.1 区 分 線 形 補 間 …… 65
6.2 スプライン補間 …… 70
章 末 問 題 …… 74

7. 変 分 原 理

7.1 静力学の変分原理と最適化 …… 77
7.2 制約を有する系における静力学 …… 79
7.3 動力学の変分原理と常微分方程式 …… 81
7.4 制約を有する系における動力学 …… 83
章 末 問 題 …… 85

8. 非線形最適化

8.1 ネルダー・ミード法 …… 89
8.2 乗 数 法 …… 94
章 末 問 題 …… 100

9. 有 限 要 素 法

9.1　ビームの静力学における一次元有限要素法 …… 102
9.2　ビームの動力学における一次元有限要素法 …… 109
9.3　二次元有限要素法 …… 112
9.4　動的な二次元変形 …… 120
9.5　非 弾 性 変 形 …… 121
章　末　問　題 …… 125

10. 乱　　数

10.1　確率変数と確率分布 …… 129
10.2　モンテカルロ法 …… 131
章　末　問　題 …… 134

引用・参考文献 …… 135
章末問題解答 …… 137
索　　引 …… 178

MATLAB は MathWorks, Inc. の登録商標です。本書では，MATLAB およびその他の製品名に ™，® マークは明記しておりません。

本書を発行するにあたって，記載内容に誤りがないように可能な限り注意を払いましたが，本書の内容を適用した結果生じたこと，また，適用できなかったことに関して，著者，出版社とも一切の責任は負いませんのでご了承ください。

1 数値計算とは

本書では，機械システムにかかわる数学的な問題を数値的に解くときに有用な数値計算アルゴリズムを紹介する。微分方程式 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -2x$ を例として，**解析的に解く**ことと**数値的に解く**ことの違いを述べよう。この微分方程式は，式の変形を通して解くことができ，$x(t) = x(0)e^{-2t}$ という解を得ることができる。これは微分方程式を解析的に解くことに相当し，$x(0)e^{-2t}$ を微分方程式 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -2x$ の**解析解**（analytical solution）と呼ぶ。一方，微分方程式の初期値を $x(0) = 1.00$ と定め，オイラー法（3.2 節）と呼ばれるアルゴリズムを用いると，時刻 t と変数 x の値を例えば

t	x	t	x
0.000 000	1.000 000	0.600 000	0.300 833
0.200 000	0.670 052	0.800 000	0.201 573
0.400 000	0.448 969	1.000 000	0.135 065

と計算することができる。これは微分方程式を数値的に解くことに相当し，このような数値の列を微分方程式 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -2x$ の**数値解**（numerical solution）と呼ぶ。微分方程式は，力学の運動方程式や電気回路の方程式などに現れ，工学を支える重要な数学基盤である。残念ながら，ほとんどの微分方程式は解析的には解けない。すなわち，解析的に解くことができる微分方程式は理想的な状態を扱っている一部の微分方程式に限られており，解析的に解くことができないほとんどの微分方程式は数値的に解かざるを得ない。例えば，万有引力に従う 2 個の物体（例えば太陽と地球）の運動は，個々の物体の運動方程式を解

析的に解くことにより求めることができる。しかしながら，万有引力に従う 3 個の物体（例えば太陽，地球，月）の運動は，解析的に求めることができないことがわかっている（三体問題）。したがって，万有引力に従う 3 個以上の物体の運動を求めるときには，個々の物体の運動方程式を数値的に解いて，数値的な解を計算する必要がある。全地球測位システム（global positioning system：GPS）は，地球のまわりを回る人工衛星に支えられており，人工衛星の運動を計算することは GPS の基礎となる。人工衛星には，地球や月からの万有引力が作用するため，人工衛星の運動を計算するときには数値計算が必要である。

数値計算アルゴリズムは実数を対象としている。数値計算をコンピュータ上で実行する場合には，有限語長で実数を表す。現在の標準である IEEE 754 という規格では，倍精度実数を仮数部 53 ビット，指数部 11 ビットの合計 8 バイトで表す。したがって，コンピュータ上では，無理数はもちろんのこと，2 進数で循環小数となる有理数は，倍精度実数では丸められて近似的に表される。したがって，有限語長で数値を表すことに起因する**計算誤差**（computational error）の問題は，数値計算では不可避である。また，アルゴリズムを実行するために必要な時間やメモリの量は，アルゴリズムによって異なる。解析的に有効な手法が数値計算上は実質的に計算が不可能という場合もある。これらは**計算の複雑性**（computational complexity）に関する理論の対象である。

本書の構成を述べよう。2 章では，数値計算のためのソフトウェアである MATLAB におけるプログラミングを紹介する。特に，行列とベクトルの記述，常微分方程式の数値解法，最適化，乱数に関するプログラムを紹介する。3 章では常微分方程式の数値解法を述べる。常微分方程式は，機械電気システムの挙動のモデリングにおいて多用される数学的ツールであり，常微分方程式を数値的に解き，機械電気システムの挙動を調べることが一般的である。ここでは，常微分方程式の数値解法に続いて，制約を有する微分方程式の解法を紹介する。4 章と 5 章では連立一次方程式の解法を述べる。未知数の個数と式の個数が一致する場合に加えて，工学の多くの分野で生じる未知数の個数より式の個数が多い場合や，未知数の個数より式の個数が少ない場合を扱う。ここでは，連立一

次方程式の代表的な数値解法であるガウスの消去法に続いて，射影の計算法を紹介する。6 章では補間について述べる。補間とは，有限個の観測値から全体の挙動を表す関数を推定する手法である。補間は有限要素法（9 章）でも重要な役割を果たす。ここでは区分線形補間をはじめとして代表的な補間法を紹介する。

7 章では，力学における変分原理について述べる。変分原理を用いると機械システムにおけるさまざまな課題を統一的に定式化することができ，さらに数値計算法と直接的に結びつけることができる。そこで，ここでは，静力学の変分原理と最適化手法，動力学の変分原理と常微分方程式の数値解法との結びつきを述べる。8 章では非線形関数の最適化の手法を述べる。静力学の変分原理（7 章）においては，関数を最大あるいは最小にするという形式で力学を定式化する。関数は一般に非線形であり，多くの場合に解析的に最小解や最大解を求めることが難しく，数値的に解を求める必要がある。また，幾何学的な制約を有する場合も多い。そこで，ここでは，最適化の手法と制約の扱いについて述べる。9 章では，境界値問題を解くアルゴリズムである有限要素法を紹介する。有限要素法は，材料力学における変形の計算，電磁気学における電磁場の計算，音響工学における音場の計算，熱工学における熱分布の計算などに用いられている。ここでは，力学における変分原理（7 章）の立場から有限要素法について述べる。10 章では，確率変数を用いたノイズやパラメータ変動の表現について述べる。さらに確率変数を用いた計算法としてモンテカルロ法を紹介する。

コーヒーブレイク

計算の手順を**アルゴリズム**（algorithm）と呼ぶ。アルゴリズムという言葉は，9 世紀のアラビアの数学者アルフワーリズミ（Al-Khwarizmi）の名前に由来するといわれている。二つの自然数の最大公約数を求めるユークリッドの互除法と呼ばれるアルゴリズムでは，二つの自然数の除算を行い，さらに除数を余りで割るという計算を余りが 0 になるまで繰り返す。最後の除数が二つの自然数の最大公約数である。ユークリッドの互除法では，被除数と除数が繰返しとともに単調に減少する。除数が 1 になった場合には，被除数にかかわらず余りが 0 であるので必ず停止する。

2 MATLAB

MATLAB は，数値計算のためのソフトウェアである。数値計算のアルゴリズムを数式に近い形で表すことが可能である。また，多くの数値計算アルゴリズムが実装されており，工学分野で広く用いられている。本章では，MATLAB のプログラミングを紹介する。

2.1 行列とベクトル

MATLAB を用いると，行列やベクトルを数式に近い形式で記述することができる。例えば，つぎの記述は 3×3 行列 A を与える。

```
A = [  4, -2,  1; ...
      -2,  5,  2; ...
      -2,  3,  2 ];
```

要素を記号「,」で区切り，行を記号「;」で区切る。記号「...」は，文が続くことを表す。文の終わりは記号「;」で表す。行ベクトルは，一つの行からなる行列として

```
y = [ 2, 3, -1 ];
```

と表される。列ベクトルは，一つの列からなる行列として

```
x = [ 2; ...
      3; ...
     -1 ];
```

と表される。この列ベクトルを記号「...」を使わずに表すと

```
x = [ 2; 3; -1 ];
```

となる。

行列，ベクトル，スカラーの加算，減算，乗算は，記号「+」,「-」,「*」で表される。例えば，p = A*x は行列 A と列ベクトル x の積を計算し，変数 p に代入する。このとき，変数 p は列ベクトルとなる。また，q = y*A は行ベクトル y と行列 A の積を計算し，変数 q に代入する。このとき変数 q は行ベクトルとなる。行列 A の転置は，A' または transpose(A) で表される。

行と列の番号を自然数で指定して，行列の要素を参照する。例えば，行列 A の $(3,2)$ 要素は

```
A(3,2)
```

で参照できる。行の番号のみを指定し，列の番号の部分に記号「:」を指定すると，行列の行を参照することができる。例えば，行列 A の 3 行目は

```
A(3,:)
```

で参照できる。同様に，行の番号の部分に記号「:」を指定し，列の番号のみを指定すると，行列の列を参照することができる。例えば行列 A の 2 列目は

```
A(:,2)
```

で参照できる。行や列の番号を複数個指定すると，指定した行や列からなる部分行列を参照できる。例えば

```
A([1,3],:)
```

は，行列 A の 1 行目と 3 行目からなる部分行列を表す。また

```
A(:,[2,1])
```

は，行列 A の 2 列目と 1 列目からなる部分行列を表す。記号「2:5」は，2 から 5 までの自然数 $2,3,4,5$ を表す。記号「3:2:8」は，3 から間隔 2 で 8 まで

索　　引

【あ】

アルゴリズム　3

【い】

位相図　12
一様分布　129
一様乱数　11, 130
入れ子関数　11

【う】

上三角行列　36, 60
運動エネルギー　81, 109, 120
運動方程式　16, 17, 19, 82, 85, 87
　ラグランジュの—　82, 83

【お】

オイラー法　19
帯行列　74, 108, 111, 155

【か】

解析解　1
解析的に解く　1, 13, 78, 81
ガウスの消去法　33
ガウス分布　130
拡張ラグランジュ関数　94, 165
確率変数　129
確率密度関数　129
過拘束　52
硬い常微分方程式　30
可変ステップ幅　8, 22
慣性行列　111, 120

【き】

基本変形　6
　行に関する—　6, 34
　列に関する—　6, 55
キューン・タッカー条件　94
境界条件　103
境界値問題　103
行に関する基本変形　6, 34
行ベクトル　4
行　列　4
　—の行　5
　—の列　5
近　似　63

【く】

区分線形補間　65, 67, 69, 104, 114, 120
グラム・シュミットの直交化　59
グリーンひずみ　127

【け】

計算誤差　2
計算の複雑性　2
係数行列　6, 34

【こ】

剛性行列　105, 107, 118
勾配ベクトル　17, 26, 94
コーシーひずみ　128
固定ステップ幅　7, 21
固有値　63, 64
固有ベクトル　63, 64
コレスキー分解　6, 51

【さ】

最小化問題　78, 89
　制約付き—　13, 79, 94, 106
最速降下曲線　100
作用積分　82, 84
三重対角行列　155
三要素モデル　122

【し】

四元数　87
仕　事　77, 81, 104
自然スプライン補間　72
下三角行列　37
射　影　52
射影行列　54, 57
重力ポテンシャル　77, エネルギー　81, 125
乗数法　94
状態変数　16
　—ベクトル　23
冗　長　47
常微分方程式　6, 15
　硬い—　30
　—の初期値　16
　—の標準形　7, 16, 19, 23
初期値　16
初期値問題　103

【す】

数値解　1
数値的に解く　1, 13, 19, 78, 81, 83, 85
図　心　90, 171

ステップ幅 19
　可変— 8, 22
　固定— 7
スプライン補間 71
スラック変数 96

【せ】

正規直交系 57
正規分布 130
正規方程式 54
正規乱数 11, 130
正定対称行列 6, 51, 54, 74
制　約 17, 18, 94
　等式— 94
　パフィアン— 18, 26
　非ホロノミック— 18
　不等式— 96
　ホロノミック— 17, 23
制約安定化法 23, 111, 121
制約付き最小化問題 13, 79, 94, 106
制約力 26, 80, 111, 119
静力学の変分原理 77, 104
接続行列 115
　部分— 115
節　点 104
　—速度ベクトル 112
　—変位ベクトル 105
　—力 123

【そ】

疎行列 118, 121

【た】

大域変数 10
単位置換行列 45
弾性ポテンシャル
　エネルギー 104, 113
単　体 70, 90

【ち】

置換行列 46
直交行列 57, 60, 64, 87

【て】

転　置 5

【と】

等式制約 94, 164, 166
動力学の変分原理 81
特異値分解 64

【な】

内部エネルギー 78, 104

【ね】

ネルダー・ミード法 9, 90

【の】

ノルム最小解 61

【は】

パフィアン制約 18, 26
汎関数 104

【ひ】

ひずみベクトル 113
ピボット 33, 42
ピボット型 LU 分解 42
ピボット選択型 LU 分解 47
非ホロノミック制約 18
標準形 7, 16

【ふ】

ファンデルポール方程式 6
フォークトモデル 121
符号付き体積 69
符号付き面積 68
不等式制約 96, 165, 166
部分行列 5
部分接続行列 115

【へ】

ヘッセ行列 138, 144
変位ベクトル 112
変数ベクトル 34, 89
偏微分方程式 103
　—の境界値問題 103
変　分 78, 80, 127

【ほ】

ホイン法 19
補　間 65
ホロノミック制約 17, 23, 83, 87, 109

【ま】

曲げポテンシャル
　エネルギー 86
マックスウェルモデル 122

【め】

メルセンヌ・ツイスター 12

【も】

目的関数 89, 164, 166
モンテカルロ法 131

【ゆ】

有限要素法 102

【ら】

ラグランジアン 81, 83, 111
ラグランジュの 82, 83,
　運動方程式 111, 121
ラグランジュの 13, 26, 79,
　未定乗数 83, 107, 111
ラメの定数 113
乱　数 12, 130

【り】

リンク機構 29, 30, 85

【る】

ルンゲ・クッタ・
　フェールベルグ法 21
ルンゲ・クッタ法 19

【れ】

列に関する基本変形 6, 55
列ベクトル 4
連立一次方程式 32, 107, 109, 112, 119, 121
—が過拘束 52
—が冗長 47
—の一般解 50

【ろ】

ローゼンブロック関数 8, 12

【C】

chol 6
CSM 23

【F】

FEM 102
fminbnd 78, 168
fmincon 13, 78, 81
fminsearch 9

【L】

lu 47
LU 分解 6, 38
ピボット型— 42
ピボット選択型— 47

【O】

ODE 6
ODE ソルバー 6, 144
odeset 144
ode23tb 30
ode45 7
optimset 9, 166

【P】

PD 制御 29
PID 制御 29, 85
plot 8, 12

【Q】

qr 61
QR 分解 60

【R】

rand 12, 130
randn 130
rank 61, 151
rng 12

【S】

spdiags 155
SVD 64
svd 64

【T】

transpose 5

【記号】

, 5
, 4
.* 12
... 4
./ 12
.^ 12
: 5
; 4
\ 6

—— 著 者 略 歴 ——

1985年　京都大学工学部数理工学科卒業
1987年　京都大学大学院工学研究科修士課程修了（数理工学専攻）
1989年　マサチューセッツ工科大学客員研究員
1990年　京都大学大学院工学研究科博士課程単位取得退学（数理工学専攻）
1991年　工学博士（京都大学）
1995年　大阪大学助教授
1996年　立命館大学助教授
2002年　立命館大学教授
　　現在に至る

機械システム学のための数値計算法 —MATLAB 版—
Numerical Methods for Mechanical Systems —MATLAB version—
© Shinichi Hirai 2019

2019 年 11 月 28 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略

著　　者　平井慎一（ひらい しんいち）
発 行 者　株式会社　コロナ社
　　代 表 者　牛来真也
印 刷 所　三美印刷株式会社
製 本 所　有限会社　愛千製本所

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発 行 所　株式会社　コロナ社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ　https://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–06119–2　C3041　Printed in Japan　（新井）

JCOPY　＜出版者著作権管理機構 委託出版物＞
本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は，そのつど事前に，出版者著作権管理機構（電話 03-5244-5088，FAX 03-5244-5089，e-mail: info@jcopy.or.jp）の許諾を得てください。

本書のコピー，スキャン，デジタル化等の無断複製･転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は，いかなる場合も認めていません。
落丁・乱丁はお取替えいたします。