

機械系のための関数論入門

工学博士 野原 勉 共著
博士(理学) 古田 公司

コロナ社

はじめに

本書は機械系学科向けの関数論入門書である。一般的に、わが国の工学部での数学教育は、初年度の微・積分学や線形代数に始まり、2, 3年時に微分方程式論、フーリエ解析学、ベクトル解析、確率・統計などを習い、関数論はやや軽視されがちである。しかし、機械系の各学科において、流体力学は必須の科目であり、そこで展開される非圧縮渦なし流であるポテンシャル流のなす複素ポテンシャルは、Cauchy-Riemann の方程式を満足する。すなわち、2次元ポテンシャル流において、関数論の正則関数や等角写像の概念が重要な役割を果たすのである。片や、熱力学は流体力学と並ぶ重要科目であり、ここでも複素熱ポテンシャルが定義できて、ポテンシャル流と同様の議論ができる。

本書の大部分は、近代数学の父といわれる Augustin-Louis Cauchy (コーシー, 1789~1857年) により確立された内容である。Cauchy は解析学全般の厳密な形式化を行い、Cauchy-Riemann の方程式 (定理 3.3), Cauchy の定理 (定理 5.3), Cauchy の積分公式 (定理 5.7), Cauchy 列, Cauchy の収束原理等々、Cauchy の名がついた定理や原理は枚挙にいとまがない。生涯に執筆した論文数は、じつに 789 にものぼっている。狂信的なカトリック信者であった Cauchy が、2019年4月15日 (現地時間) 大火災にみまわれた Cathédrale Notre-Dame de Paris (ノートルダム寺院) に足しげく通ったであろうことを思うと、200年以上の歳月は経ているものの、ごく身近に感じられる存在ではある。

さて、著者らは本書において、工学部機械系学科の低学年が初めて複素数の関数を扱うときに混乱が生じないように、まず、応用を前提とした基礎 (1~7章) を解説し、そのうえで流体力学と熱力学への関数論の展開にページを割いた (8~11章)。一般の数学書が重点的に書いている積分論や解析接続 (5章および6章) などについては、必要最小限の解説にとどめた。

本書は、第 I 部として関数論の数学的基礎を解説し、第 II 部にて流体力学と熱力学への応用を表し、さらに、第 III 部では、付録として本論の内容を補うという構成になっている。第 I 部は、関数論の基礎となる複素数について復習し、その後、正則関数へと進んでいく。複素関数が 1 回微分できれば、すなわち、正則ならば何回でも微分可能であるという実関数にはない著しい特徴を有することに気づくであろう。さらに、複素積分では Cauchy の定理が根本的な役割を果たし、正則関数の性質がここに帰結することが理解できよう。応用上、正則関数の等角性はきわめて重要な位置を占めており、この部分に紙数を割いた。早く応用を知りたいと思う読者は、1~3, 7 章を読み終えた後、8~11 章に進まれるとよい。また、各章の末尾には章末問題を掲載したが、読者はこれを解くことにより、理解を深めることができるであろう。論旨の展開でやや込み入った箇所には脚注で解説を付したが、読み飛ばしてもいっこうに構わない。また、歴史上の数学者についても参考のため脚注を施した。

謝辞

本書の企画段階から編集・校正に至るまで、コロナ社には大変お世話になったこと、ここに改めて謝意を表します。執筆分担は古田が 5~7 章を担当し、そのほかは野原によります。内容の責任は野原にありますが、解説の不備・不足など読者の叱責を賜るしだいです。

最後に、本書がこれから専門科目を学ぼうとする学生諸氏や、昨今話題になっているリカレント教育として改めてこの分野を学び直そうとするエンジニアの方々へのよき海図になることを念じます。

2019 年 9 月

著者を代表してしるす 野原 勉

目 次

第I部

基 礎

1 章 複 素 数

1.1	複素数と複素平面	1
1.2	極 形 式	5
1.2.1	極 形 式	5
1.2.2	積 と 商	6
1.2.3	de Moivre の定理	7
1.2.4	n 乗 根	7
1.3	三角不等式	9
	章 末 問 題	10

2 章 複素関数の極限と領域

2.1	複 素 関 数	12
2.2	領 域	16
2.3	極限と連続性	20
	章 末 問 題	23

3章 正則関数

3.1 導関数	24
3.2 微分法則	26
3.3 正則関数	26
3.4 Cauchy-Riemann の方程式	27
3.5 Laplace の方程式	31
3.6 Laplace の方程式の極座標表現	34
章末問題	36

4章 初等複素関数

4.1 多項式, 有理関数	38
4.2 指数関数	38
4.2.1 指数関数の定義	38
4.2.2 指数関数のいくつかの事実	39
4.2.3 指数関数の写像	41
4.3 三角関数	42
4.3.1 三角関数の定義	42
4.3.2 三角関数のいくつかの事実	42
4.3.3 三角関数の写像	44
4.4 双曲線関数	45
4.4.1 双曲線関数の定義	45
4.4.2 双曲線関数のいくつかの性質	46
4.5 対数関数	47
4.5.1 対数関数の定義	47
4.5.2 対数関数の正則性	50

4.5.3 対数法則	50
4.6 べき関数	52
章末問題	54

5章 複素積分

5.1 実変数複素数値関数の微分と積分	55
5.2 複素平面上の曲線	56
5.3 複素積分	58
5.4 Cauchyの定理	61
章末問題	73

6章 関数の展開

6.1 数列と級数	75
6.2 べき級数	78
6.3 Taylor展開	83
6.4 正則関数の性質	86
6.5 解析接続	91
6.6 Laurent展開	94
6.7 特異点の分類	98
6.8 留数	102
章末問題	105

7章 等角写像

7.1 等角写像	107
7.2 1次変換	109

章 末 問 題	115
---------	-----

第 II 部

流体力学と熱力学への応用

8 章 流体力学の基礎

8.1 流 体 の 分 類	116
8.2 Navier-Stokes 方程式	117
8.3 Euler の運動方程式	118

9 章 ポテンシャル流

9.1 非圧縮渦なしの流れ	121
9.2 流 線	123
9.3 複素ポテンシャル	125
章 末 問 題	126

10 章 2次元ポテンシャル流れ

10.1 一 様 流	127
10.2 円柱まわりの一様流	128
10.3 Joukowski 変換	130
10.3.1 平 板	132
10.3.2 Joukowski 翼	135
章 末 問 題	137

11章 熱力学への応用

11.1 熱方程式	138
11.2 複素熱ポテンシャル	139
章末問題	144

第III部 付 録

12章 円柱まわりの一様流（循環が0のとき）の複素速度ポテンシャルの導出

12.1 流線関数	145
12.2 速度ポテンシャルと複素速度ポテンシャル	148

13章 ベクトル解析の基礎

13.1 ベクトルの内積	150
13.2 ベクトルの外積	152
13.3 勾配, 発散, 回転	154
13.3.1 スカラー界とベクトル界	154
13.3.2 勾配	155
13.3.3 発散	156
13.3.4 回転	157
13.4 重要な公式	160
章末問題	161
引用・参考文献	162
索引	163

1.1 複素数と複素平面

複素数全体の集合を \mathbb{C} 、実数全体の集合を \mathbb{R} で表す。 $z \in \mathbb{C}$ 、 $x \in \mathbb{R}$ 、 $y \in \mathbb{R}$ とすると、複素数 (complex number) z は $z = (x, y)$ で定義される^{†1}。 x を z の実部 (real part) と呼び、 $x = \operatorname{Re} z$ と書く。また、 y を z の虚部 (imaginary part) と呼び、 $y = \operatorname{Im} z$ と書く。

$z_1 = (x_1, y_1)$ 、 $z_2 = (x_2, y_2)$ として、 $z_1 = z_2$ とは、 $x_1 = x_2$ かつ $y_1 = y_2$ のことである。すなわち、二つの複素数が等しいとは、それぞれの実部と虚部がともに等しいときである。

$(0, 1)$ は虚数単位 (imaginary unit) で i と書く^{†2}。すなわち、 $i = (0, 1)$ である。

定義 1.1 (和と差の定義) $z_1 = (x_1, y_1)$ 、 $z_2 = (x_2, y_2)$ とするとき、和と差は

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2) \quad (1.1)$$

である。

^{†1} このように複素数 z は実数の対で表現される。

^{†2} 添字で使う記号 i と区別するため、 i とした。

例題 1.1 $z_1 = (3, 4)$, $z_2 = (1, -2)$ とすると

$$z_1 + z_2 = (4, 2), \quad z_1 - z_2 = (2, 6).$$

定義 1.2 (積と商の定義) 積と商の定義はつぎである。

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad (1.2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) \quad (1.3)$$

例題 1.2 $z_1 = (3, 4)$, $z_2 = (1, -2)$ とすると

$$z_1 z_2 = (11, -2), \quad \frac{z_1}{z_2} = (-1, 2).$$

ところで, $(x, 0)$ は実部が x で虚部が 0 であるから

$$(x, 0) = x \quad (1.4)$$

と同一視する。また, $iy = (0, 1)(y, 0)$ であるので, 積の定義より

$$\begin{aligned} iy &= (0, 1)(y, 0) \\ &= (0 \cdot y - 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + y \cdot 1) \\ &= (0, y). \end{aligned}$$

すなわち,

$$(0, y) = iy \quad (1.5)$$

となる。式 (1.4) と式 (1.5) の各辺を足すと

$$(x, 0) + (0, y) = x + iy \quad (1.6)$$

となり、式 (1.6) 左辺は和の定義より (x, y) であり、結局

$$z = x + iy \quad (1.7)$$

と書くことができる。したがって、式 (1.1) は

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \quad (1.8)$$

となり、式 (1.2) と式 (1.3) は

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1), \quad (1.9)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (1.10)$$

となる。

ここで、虚数単位と虚数単位の積 $i \cdot i$ を考える。積の定義により

$$i \cdot i = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

となり、 $i^2 = -1$ を得る。この事実により、例えば、 $x^2 + 1 = 0$ という方程式は $x \in \mathbb{R}$ では解はなく ($x^2 \geq 0$)、解くことは不可能である。しかし、 $x \in \mathbb{C}$ として解くことが可能になるのである (例題 1.4 参照)。

複素数 $z = (x, y) = x + iy$ を座標 x, y をもつ **Descartes** (デカルト)^{†1}座標系 (Cartesian coordinate system) の点として描く。この x - y 平面を複素平面^{†2} (complex plane) という (図 1.1)。

複素数 $z = x + iy$ の共役複素数 \bar{z} とは、 $\bar{z} = x - iy$ で定義される。つぎの種々な公式が成り立つ。

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad (1.11)$$

^{†1} René Descartes (1596~1650 年)：フランス生まれの哲学者であり、数学者である。「Je pense, donc je suis (我思う、故に我在り)」は有名な命題。

^{†2} 創始者の名をとり **Gauss** 平面 (Gauss plane) ともいう。Johann Carl Friedrich Gauß (1777~1855 年) は、ドイツの偉大な数学者であり、Newton と双璧をなす。

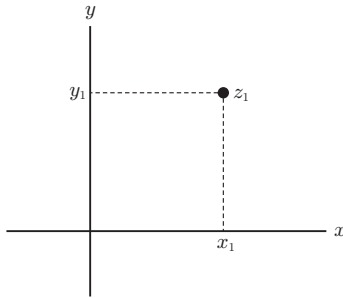


図 1.1 複素平面：2次元平面で表し、横 (x) 軸を実軸、縦 (y) 軸を虚軸とする。例えば、 $z_1 = x_1 + iy_1$ である。

$$\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \quad (1.12)$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \quad (1.13)$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \quad (1.14)$$

$$\frac{\bar{z}_1}{z_2} = \frac{\bar{\bar{z}_1}}{\bar{z}_2} \quad (1.15)$$

注意 1.1 負の実数 $c (< 0)$ の平方根には注意する必要がある。 $c_1, c_2 < 0$ とすると、残念ながら

$$\sqrt{c_1} \sqrt{c_2} \neq \sqrt{c_1 c_2} \quad (1.16)$$

である。

【理由】 例えば、 $c_1 = -2$ とすると、 $\sqrt{-2}$ は $\sqrt{2}i$ または $-\sqrt{2}i$ 、あるいは $\pm\sqrt{2}i$ などがあり、どれを選択するかは自由度があるからである。◇

命題 1.1 $c \geq 0$ とする限り、 c の平方根は \sqrt{c} と $-\sqrt{c}$ であり、 $\sqrt{c} > 0$ と約束する。このとき、

$$\sqrt{c_1} \sqrt{c_2} = \sqrt{c_1 c_2} \quad (1.17)$$

が成り立つ。

【証明】 式 (1.17) が成り立たないとする。すなわち、

$$\sqrt{c_1} \sqrt{c_2} = \sqrt{c_1 c_2} + \varepsilon \quad (\varepsilon \neq 0) \quad (1.18)$$

と書ける。両辺を 2 乗すると

$$2\varepsilon\sqrt{c_1c_2} + \varepsilon^2 = 0$$

が得られ、 $\varepsilon \neq 0$ であるので

$$\varepsilon = -2\sqrt{c_1c_2}$$

となり、これを式 (1.18) に代入すると

$$\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = -\sqrt{c_1c_2}$$

となり、 $\sqrt{c} > 0$ ($c > 0$) と約束したことに矛盾する。◇

注意 1.2 複素関数論では、 $c \geq 0$ の場合は、命題 1.1 に述べたとおり（中学校で習ったように） $\sqrt{c} \geq 0$ である。しかし、 c が一般の複素数の場合には、 \sqrt{c} の定義は、そのときに扱っている問題に応じて決める。すなわち、断りのない限り $\sqrt{-2} = \sqrt{2}i$ とはしない（高校の数学はこのように定義している）。◇

1.2 極 形 式

1.2.1 極 形 式

複素数 z の極形式は、

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

である。ここに、 r を z の絶対値または大きさと呼び、 $|z|$ で表す。すなわち、

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

また、 θ を z の偏角と呼び、 $\arg z$ で表す。すなわち、

$$\theta = \arg z = \arctan \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

であるが、

$$\arg z = \theta + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

索引

【あ】		【し】		【ち】	
亜音速	118	指数関数	39	値 域	12
圧力方程式	122	実 部	1	調和関数	33
【う】		収 束	75	直交曲線網	33
渦 度	119	収束円	79	【て】	
【え】		収束半径	79	定義域	12
枝	49	主 値	49	デカルト座標	3
【か】		主要部	98	点関数	154
開集合	17	除去可能な特異点	98	【と】	
外 積	152	真性特異点	99	等位面	154
解析接続	92	【す】		等 角	108
回 転	157	数値流体力学	117	等角写像	108
外 点	17	スカラー界	154	等角性	15
【き】		スカラー積	151	導関数	25
級 数	76	【せ】		等高線	33
境界層	133	整関数	39	動粘性係数	118
共役調和関数	33	正 則	27	等ポテンシャル線	33
極	98	正則関数	27	等ポテンシャル面	154
曲 線	56	絶対収束	77	特異点	94
曲線族	33	【そ】		【な】	
虚数単位	1	双曲線関数	45	内 積	151
虚 部	1	速度ポテンシャル	122	内 点	17
近 傍	17	【た】		【ね】	
【こ】		対称翼	136	熱拡散率	138
孤立特異点	94	対数関数	47	熱方程式	138
【さ】		体積力	118	【は】	
三角不等式	9	多価関数	48	発 散	76, 156
		多項式	38	バロトロピー流体	119
		単純閉曲線	56		

【ひ】		【へ】		有限要素法	117
微係数	24	閉曲線	56	有理関数	38
非対称翼	136	ベクトル界	154	【り】	
非調和比	115	ベクトル積	152	力学的粘性係数	118
微分可能	24	ベクトル点関数	155	リーマン予想	116
		偏角	49	留数	102
【ふ】		【ほ】		流線	33, 125
複素関数	12	ポテンシャル流	121	流線関数	125
複素数	1	ポテンシャル論	33	領域	18
複素数列	75	【む】		臨界点	142
複素速度ポテンシャル	126	迎え角	132	【れ】	
複素平面	3	【ゆ】		零点	100
複素変数	12	有限体積法	117		
部分和	76				

【A】		【J】		【R】	
Apollonius の円	113	Joukowski 変換	130	Riemann 面	49
【B】		【K】		【S】	
Bernoulli の定理	120	Kutta-Joukowski の条件	133	Stokes の定理	123
【C】		【L】		【T】	
Cauchy の定理	62	Lagrange 微分	117, 119	Taylor 級数	84
【D】		Laplace の方程式	32, 122	Taylor 展開	84
Descartes 座標	3	Laplacian	32	~~~~~	
【G】		Laurent 展開	95	【ギリシャ文字・数字】	
Gauss の定理	124	【M】		ε 近傍	17
Gauss 平面	3	Maclaurin 展開	85	2 次元流れ	121
Goursat の定理	32	【N】		2 重湧出し	129
Green の定理	62	Navier-Stokes 方程式	117		

— 著者略歴 —

野原 勉 (のほら べん)	古田 公司 (ふるた こうじ)
1988年 名古屋大学大学院工学研究科博士課程 満期退学 工学博士	1993年 北海道大学大学院理学研究科博士課程 満期退学 博士 (理学)
2000年 米国ヴァージニア州立工科大学客員 ~03年 教授	1993年 武蔵工業大学助手
2001年 武蔵工業大学教授	1995年 武蔵工業大学講師
2009年 東京都市大学教授	2007年 武蔵工業大学准教授
2012年 東京大学大学院数理科学研究科連携併 ~14年 任講座客員教授	2009年 東京都市大学准教授 現在に至る
2015年 東京都市大学名誉教授	

機械系のための関数論入門

Introduction to Complex Analysis for Mechanical Engineering

© Ben Nohara, Koji Furuta 2019

2019年11月28日 初版第1刷発行



検印省略

著者 野原 勉
古田 公司
発行者 株式会社 コロナ社
代表者 牛来 真也
印刷所 三美印刷株式会社
製本所 有限会社 愛千製本所

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844 · 電話 (03) 3941-3131 (代)

ホームページ <https://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-06118-5 C3041 Printed in Japan

(三上)



< 出版者著作権管理機構 委託出版物 >

本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつど事前に、出版者著作権管理機構 (電話 03-5244-5088, FAX 03-5244-5089, e-mail: info@jcopy.or.jp) の許諾を得てください。

本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めていません。落丁・乱丁はお取替えいたします。