機械系のための関数論入門

工学博士　野原　　勉
博士（理学）　古田　公司　共著

コロナ社

はじめに

本書は機械系学科向けの関数論入門書である。一般的に，わが国の工学部での数学教育は，初年度の微・積分学や線形代数に始まり，2，3 年時に微分方程式論，フーリエ解析学，ベクトル解析，確率・統計などを習い，関数論はやや軽視されがちである。しかし，機械系の各学科において，流体力学は必須の科目であり，そこで展開される非圧縮渦なし流であるポテンシャル流のなす複素ポテンシャルは，Cauchy-Riemann の方程式を満足する。すなわち，2 次元ポテンシャル流において，関数論の正則関数や等角写像の概念が重要な役割を果たすのである。片や，熱力学は流体力学と並ぶ重要科目であり，ここでも複素熱ポテンシャルが定義できて，ポテンシャル流と同様の議論ができる。

本書の大部分は，近代数学の父といわれる Augustin-Louis Cauchy（コーシー，1789～1857 年）により確立された内容である。Cauchy は解析学全般の厳密な形式化を行い，Cauchy-Riemann の方程式（定理 3.3），Cauchy の定理（定理 5.3），Cauchy の積分公式（定理 5.7），Cauchy 列，Cauchy の収束原理等々，Cauchy の名がついた定理や原理は枚挙にいとまがない。生涯に執筆した論文数は，じつに 789 にものぼっている。狂信的なカトリック信者であった Cauchy が，2019 年 4 月 15 日（現地時間）大火災にみまわれた Cathédrale Notre-Dame de Paris（ノートルダム寺院）に足しげく通ったであろうことを思うと，200 年以上の歳月は経ているものの，ごく身近に感じられる存在ではある。

さて，著者らは本書において，工学部機械系学科の低学年が初めて複素数の関数を扱うときに混乱が生じないように，まず，応用を前提とした基礎（1～7 章）を解説し，そのうえで流体力学と熱力学への関数論の展開にページを割いた（8～11 章）。一般の数学書が重点的に書いている積分論や解析接続（5 章および 6 章）などについては，必要最小限の解説にとどめた。

本書は，第 I 部として関数論の数学的基礎を解説し，第 II 部にて流体力学と熱力学への応用を表し，さらに，第 III 部では，付録として本論の内容を補うという構成になっている。第 I 部は，関数論の基礎となる複素数について復習し，その後，正則関数へと進んでいく。複素関数が 1 回微分できれば，すなわち，正則ならば何回でも微分可能であるという実関数にはない著しい特徴を有することに気づくであろう。さらに，複素積分では Cauchy の定理が根本的な役割を果たし，正則関数の性質がここに帰結することが理解できよう。応用上，正則関数の等角性はきわめて重要な位置を占めており，この部分に紙数を割いた。早く応用を知りたいと思う読者は，1〜3，7 章を読み終えた後，8〜11 章に進まれるとよい。また，各章の末尾には章末問題を掲載したが，読者はこれを解くことにより，理解を深めることができるであろう。論旨の展開でやや込み入った箇所には脚注で解説を付したが，読み飛ばしてもいっこうに構わない。また，歴史上の数学者についても参考のため脚注を施した。

謝辞

本書の企画段階から編集・校正に至るまで，コロナ社には大変お世話になったこと，ここに改めて謝意を表します。執筆分担は古田が 5〜7 章を担当し，そのほかは野原によります。内容の責任は野原にありますが，解説の不備・不足など読者の叱責を賜るしだいです。

最後に，本書がこれから専門科目を学ぼうとする学生諸氏や，昨今話題になっているリカレント教育として改めてこの分野を学び直そうとするエンジニアの方々へのよき海図になることを念じます。

2019 年 9 月

著者を代表してしるす　　野原　勉

目　　　　次

第I部　基　　　　礎

1章　複　素　数

2章　複素関数の極限と領域

3章　正　則　関　数

4章　初等複素関数

5章　複　素　積　分

6章　関　数　の　展　開

7章　等　角　写　像

第 II 部　流体力学と熱力学への応用

8章　流体力学の基礎

9章　ポテンシャル流

10章　2次元ポテンシャル流れ

11章　熱力学への応用

第III部　付　　録

12章　円柱まわりの一様流（循環が0のとき）の複素速度ポテンシャルの導出

13章　ベクトル解析の基礎

第I部　基　　礎

1章　複　素　数

1.1　複素数と複素平面

複素数全体の集合を $\mathbb{C}$，実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す。$z \in \mathbb{C}$，$x \in \mathbb{R}$，$y \in \mathbb{R}$ とすると，**複素数**（complex number）z は $z = (x, y)$ で定義される[†1]。x を z の**実部**（real part）と呼び，$x = \operatorname{Re} z$ と書く。また，y を z の**虚部**（imaginary part）と呼び，$y = \operatorname{Im} z$ と書く。

$z_1 = (x_1, y_1)$，$z_2 = (x_2, y_2)$ として，$z_1 = z_2$ とは，$x_1 = x_2$ かつ $y_1 = y_2$ のことである。すなわち，二つの複素数が等しいとは，それぞれの実部と虚部がともに等しいときである。

$(0, 1)$ は**虚数単位**（imaginary unit）で i と書く[†2]。すなわち，$\mathrm{i} = (0, 1)$ である。

定義 1.1（**和と差の定義**）　$z_1 = (x_1, y_1)$，$z_2 = (x_2, y_2)$ とするとき，和と差は

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2,\ y_1 \pm y_2) \tag{1.1}$$

である。

[†1] このように複素数 z は実数の対で表現される。
[†2] 添字で使う記号 i と区別するため，i とした。

例題 1.1 $z_1 = (3, 4)$，$z_2 = (1, -2)$ とすると

$$z_1 + z_2 = (4, 2), \qquad z_1 - z_2 = (2, 6).$$

定義 1.2（**積と商の定義**） 積と商の定義はつぎである。

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{1.2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2},\ \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) \tag{1.3}$$

例題 1.2 $z_1 = (3, 4)$，$z_2 = (1, -2)$ とすると

$$z_1 z_2 = (11, -2), \qquad \frac{z_1}{z_2} = (-1, 2).$$

ところで，$(x, 0)$ は実部が x で虚部が 0 であるから

$$(x, 0) = x \tag{1.4}$$

と同一視する。また，$\mathrm{i}y = (0, 1)(y, 0)$ であるので，積の定義より

$$\begin{aligned} \mathrm{i}y &= (0, 1)(y, 0) \\ &= (0 \cdot y - 1 \cdot 0,\ 0 \cdot 0 + y \cdot 1) \\ &= (0, y). \end{aligned}$$

すなわち，

$$(0, y) = \mathrm{i}y \tag{1.5}$$

となる。式 (1.4) と式 (1.5) の各辺を足すと

$$(x,0)+(0,y)=x+\mathrm{i}y \tag{1.6}$$

となり，式 (1.6) 左辺は和の定義より (x,y) であり，結局

$$z=x+\mathrm{i}y \tag{1.7}$$

と書くことができる。したがって，式 (1.1) は

$$z_1 \pm z_2=(x_1 \pm x_2)+\mathrm{i}(y_1 \pm y_2) \tag{1.8}$$

となり，式 (1.2) と式 (1.3) は

$$z_1 z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1), \tag{1.9}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \tag{1.10}$$

となる。

ここで，虚数単位と虚数単位の積 $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}$ を考える。積の定義により

$$\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$$

となり，$\mathrm{i}^2=-1$ を得る。この事実により，例えば，$x^2+1=0$ という方程式は $x\in\mathbb{R}$ では解はなく（$x^2 \geqq 0$），解くことは不可能である。しかし，$x\in\mathbb{C}$ として解くことが可能になるのである（例題 1.4 参照）。

複素数 $z=(x,y)=x+\mathrm{i}y$ を座標 x，y をもつ **Descartes**（デカルト）[†1]**座標系**（Cartesian coordinate system）の点として描く。この x–y 平面を**複素平面**[†2]（complex plane）という（**図 1.1**）。

複素数 $z=x+\mathrm{i}y$ の共役複素数 $\bar{z}$ とは，$\bar{z}=x-\mathrm{i}y$ で定義される。つぎの種々な公式が成り立つ。

$$\mathrm{Re}\,z=\frac{1}{2}(z+\bar{z}) \tag{1.11}$$

[†1] René Descartes（1596～1650 年）：フランス生まれの哲学者であり，数学者である。「Je pense, donc je suis（我思う，故に我在り）」は有名な命題。

[†2] 創始者の名をとり **Gauss 平面**（Gauss plane）ともいう。Johann Carl Friedrich Gauß（1777～1855 年）は，ドイツの偉大な数学者であり，Newton と双璧をなす。

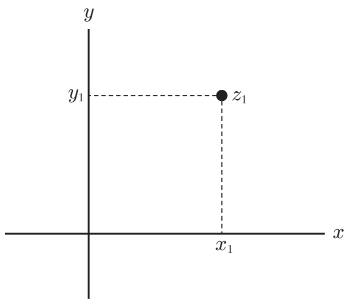

図 1.1 複素平面：2 次元平面で表し，横（x）軸を実軸，縦（y）軸を虚軸とする。例えば，$z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ である。

$$\operatorname{Im} z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \bar{z}) \tag{1.12}$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2} \tag{1.13}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2} \tag{1.14}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \tag{1.15}$$

注意 1.1 負の実数 c（< 0）の平方根には注意する必要がある。$c_1, c_2 < 0$ とすると，残念ながら

$$\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} \neq \sqrt{c_1 c_2} \tag{1.16}$$

である。

【理由】 例えば，$c_1 = -2$ とすると，$\sqrt{-2}$ は $\sqrt{2}\,\mathrm{i}$ または $-\sqrt{2}\,\mathrm{i}$，あるいは $\pm\sqrt{2}\,\mathrm{i}$ などがあり，どれを選択するかは自由度があるからである。 ◇

命題 1.1 $c \geqq 0$ とする限り，c の平方根は $\sqrt{c}$ と $-\sqrt{c}$ であり，$\sqrt{c} > 0$ と約束する。このとき，

$$\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1 c_2} \tag{1.17}$$

が成り立つ。

【証明】 式 (1.17) が成り立たないとする。すなわち，

$$\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1 c_2} + \varepsilon \qquad (\varepsilon \neq 0) \tag{1.18}$$

と書ける。両辺を 2 乗すると

$$2\varepsilon\sqrt{c_1c_2}+\varepsilon^2=0$$

が得られ，$\varepsilon\neq 0$ であるので

$$\varepsilon=-2\sqrt{c_1c_2}$$

となり，これを式 (1.18) に代入すると

$$\sqrt{c_1}\sqrt{c_2}=-\sqrt{c_1c_2}$$

となり，$\sqrt{c}>0$（$c>0$）と約束したことに矛盾する。 ◇

注意 1.2　複素関数論では，$c\geqq 0$ の場合は，命題 1.1 に述べたとおり（中学校で習ったように）$\sqrt{c}\geqq 0$ である。しかし，c が一般の複素数の場合には，$\sqrt{c}$ の定義は，そのときに扱っている問題に応じて決める。すなわち，断りのない限り $\sqrt{-2}=\sqrt{2}\,\mathrm{i}$ とはしない（高校の数学はこのように定義している）。 ◇

1.2 極　　形　　式

1.2.1 極　　形　　式

複素数 z の極形式は，

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$$

である。ここに，r を z の絶対値または大きさと呼び，$|z|$ で表す。すなわち，

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\bar{z}}.$$

また，θ を z の偏角と呼び，$\arg z$ で表す。すなわち，

$$\theta=\arg z=\arctan\frac{y}{x}\qquad(x\neq 0)$$

であるが，

$$\arg z=\theta+2n\pi\qquad(n\in\mathbb{Z})$$

索　　　　　　引

―― 著 者 略 歴 ――

野原　勉（のはら　べん）

1988年　名古屋大学大学院工学研究科博士課程満期退学
工学博士

2000年〜03年　米国ヴァージニア州立工科大学客員教授

2001年　武蔵工業大学教授

2009年　東京都市大学教授

2012年〜14年　東京大学大学院数理科学研究科連携併任講座客員教授

2015年　東京都市大学名誉教授

古田　公司（ふるた　こうじ）

1993年　北海道大学大学院理学研究科博士課程満期退学
博士（理学）

1993年　武蔵工業大学助手

1995年　武蔵工業大学講師

2007年　武蔵工業大学准教授

2009年　東京都市大学准教授
現在に至る

機械系のための関数論入門

Introduction to Complex Analysis for Mechanical Engineering

2019 年 11 月 28 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略

著　者	野　原　　勉
	古　田　公　司
発 行 者	株式会社　コ ロ ナ 社
	代 表 者　牛 来 真 也
印 刷 所	三 美 印 刷 株 式 会 社
製 本 所	有限会社　愛 千 製 本 所

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10

発 行 所　株式会社　コ ロ ナ 社

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)

ホームページ　https://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–06118–5　C3041　Printed in Japan　（三上）