

## ま え が き

情報技術にとって 1990 年代から 2010 年まではまさしくインフラの時代であったといえる。インターネットの通信インフラの確立、Web データの入力、またデータの格納方法などが最も重要な研究課題であった。その後、インターネット上に大量にデータが蓄積された結果、現在、溢れかえるほどの膨大なデータがインターネット上に氾濫している。いまでは、この大量データをどのように有効活用できるかが最も重要な技術課題となっている。多くの情報技術関連の企業にとって、データ有効活用に競争力をもっていることが重要になってくるであろう。

このような時代に、最もふさわしい技術がベイジアンネットワークである。ベイジアンネットワークは、離散確率分布の近似モデルであり、現在あるモデルの中でも最も仮定が少なく自然なモデルとして予測精度が高いことが知られている。具体的には、因果モデルをグラフ構造としてデータより学習し、その因果モデルを用いてさまざまな推論を行う人工知能の最先端技術である。ベイズ統計を基調としており、単純な推論、予測だけでなく、意思決定理論と組み合わせることにより、より複雑な問題解決を実現できるツールとなる。

また、ベイジアンネットワークは、さまざまな技術を組み合わせて実現されており、モデルとしても最上位にある。そのため、ベイジアンネットワークを深く学習するだけで他の下位モデルや手法を同時に学習したことになる。しかし、このことは逆にベイジアンネットワークを学習することが非常に難しいことも示唆している。修士課程から学習を始めても 2 年間で基礎を習得するのは非常に難しい。だからこそ、この技術をもっていることがその人の競争力を高めるのだが、ハードルが高すぎるのはよいことではない。ベイジアンネットワーク研究の最高峰は、UAI (The Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence)

という国際会議であるが、ベイジアンネットワークの研究で採録されることは非常に難しくなってきた。トップレベルなので当たり前というだけでなく、基礎から最先端までの研究を学ぶことがベイジアンネットワークでは非常に難しいことがその理由になっているのかもしれない。

そこで、簡単に早くベイジアンネットワークの基礎から最先端までの研究を学べる書籍を書くことになった。本書は、限られたスペースで、基礎から現在の推論研究と構造学習研究の最先端にたどり着けるように意図して書いた教科書である。また、ページ数の制限とアルゴリズムの理解を中心的に学ばせるために、本書では重要なものを除いてほとんどの定理には証明を掲載していない。また、本書では2013年3月時点での最先端研究までを掲載しているが、それらに結び付かないトピックはすべて割愛している。しかし、将来的には、それらの流れは大胆に変化していく可能性がある。本書を読んだ後、2013年以降のUAIの論文を読んでいただくことで最先端の研究に追いつけることを期待している。これからベイジアンネットワークを専門的に学ぼうとする初学者にぜひ役に立てていただきたい。

執筆にあたり、5章では修士課程2年生の小竹遼弥君に、6章は博士課程2年生の宇都雅輝君に、7章は博士課程3年生の森下民平君に多大なる協力を得た。ここに感謝する。

2013年3月

植野 真臣

# 目 次

## 1. 確率とビリーフ

1.1 確 率 .....	1
1.2 主 観 確 率 .....	3
1.3 条件付き確率と独立 .....	4
1.4 ベイズの定理 .....	5
1.5 確 率 変 数 .....	9
1.6 尤 度 原 理 .....	11
1.7 ベ イ ズ 推 定 .....	16
1.8 無情報事前分布 .....	17
1.8.1 ジェフリーズの事前分布 .....	17
1.8.2 自然共役事前分布 .....	20
1.9 予 測 分 布 .....	25
1.10 周 辺 尤 度 .....	27

## 2. ベイジアンネットワークのためのグラフ理論

2.1 定 義 .....	28
2.2 無 向 グ ラ フ .....	30
2.3 無向グラフのタイプ .....	33
2.4 有 向 グ ラ フ .....	34
2.5 有向グラフのタイプ .....	38

2.6 三角グラフ	40
2.7 ジョイントツリー	46

### 3. ベイジアンネットワーク

3.1 条件付き独立構造のグラフ表現	53
3.2 d 分離	55
3.3 ベイジアンネットワークモデル	61
3.3.1 定義	61
3.3.2 ベイジアンネットワークと d 分離	63
3.3.3 ベイジアンネットワークの実際の表現と推論	64
3.3.4 枝刈りによる高速化	71
3.3.5 MPE と MAP	72
3.3.6 変数消去順序の決定	73

### 4. ジョイントツリーアルゴリズムによる推論

4.1 ファクター消去	80
4.2 エリミネーションツリー	84
4.3 セパレーターとクラスター	87
4.4 メッセージパッシング	90
4.5 周辺事後確率のためのファクター消去	92
4.6 ジョイントツリーアルゴリズム	93
4.7 変数消去順序の最適化	97

## 5. ベイジアンネットワークの近似推論

5.1	ポリツリーアルゴリズム	108
5.2	ルーピービリーフプロパゲーション	112
5.3	カルバック・ライブラーダイバージェンスによる評価	115
5.4	ジョインングラフ近似によるルーピービリーフプロパゲーション	117
5.5	エッジ削除アルゴリズム	122
5.5.1	緩 和	123
5.5.2	再 生	127

## 6. ベイジアンネットワークの学習

6.1	ベイジアンネットワークのパラメータ学習	132
6.1.1	事前分布	134
6.1.2	母数推定	136
6.1.3	数値例	138
6.2	周辺尤度による構造学習	139
6.3	最小記述長 (MDL) による学習	140
6.4	尤度等価と $BDe(u)$ スコア	143
6.5	ディリクレスコアのハイパーパラメータ	144
6.5.1	周辺尤度スコア	144
6.5.2	$BDeu$ スコア	147
6.6	無情報事前分布による学習スコア	151
6.7	構造の探索アルゴリズム	152
6.8	厳密解探索アルゴリズム	153
6.8.1	動的計画法	153

6.8.2	$A^*$ ヒューリスティック探索	160
6.8.3	幅優先分枝限定法	168
6.8.4	比較実験	172
6.9	モデル平均スコア	173

## 7. 条件付き独立性検定による構造学習

7.1	因果のフェイスフルの仮定	178
7.2	PC アルゴリズム	179
7.3	MMHC アルゴリズム	183
7.4	RAI アルゴリズム	189
7.5	スーパーストラクチャーによる厳密解	194
7.6	手法の比較実験	195

## 付 録

A.1	ディリクレ積分	197
A.2	ディリクレ分布の平均・分散	198
A.3	周辺尤度 $BDe(u)$ の性質	198
A.3.1	事前分布項の性質	198
A.3.2	尤度項の性質	201
A.3.3	周辺尤度 $BDe(u)$ の性質	202

引用・参考文献	203
---------	-----

索 引	211
-----	-----

# 1

## 確率とビリーフ

ベイジアンネットワークはベイズ統計学を基礎としている。本章では、ベイジアンネットワークを学ぶために必要なベイズ統計学の基礎知識を学ぶ。

### 1.1 確率

本節では、まず、確率 (probability) を定義する。確率を定義するためには、それが対象とする事象 (event) の集合を定義しなければならない。

**定義 1 ( $\sigma$  集合体)**  $\Omega$  を標本空間 (sample space) とし、 $\mathcal{A}$  が以下の条件を満たすならば  $\sigma$  集合体 ( $\sigma$ -field) と呼ぶ。

1.  $\Omega \in \mathcal{A}$
2.  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$  (ただし,  $A^c = \Omega \setminus A$ )
3.  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

つまり、たがいに素な事象の和集合により新しい事象を生み出すことができ、それらすべての事象を含んだ集合を  $\sigma$  集合体と呼ぶ。

$\sigma$  集合体上で確率 (probability) は以下のように定義される。

**定義 2 (確率測度)**  $P$  は、 $\sigma$  集合体  $\mathcal{A}$  上で、つぎの条件を満たす測度 (measure)  $P$  を、確率測度 (probability measure) と呼ぶ (Kolmogorov 1933)。

1.  $A \in \mathcal{A}$  について,  $0 \leq P(A) \leq 1$
2.  $P(\Omega) = 1$
3. たがいに素な事象列  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  に対して,

## 2 1. 確率とビリーフ

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

上の定義では、1. は確率が0から1の値をとること、2. は全事象の確率が1になること、3. はたがいに素な事象の確率はそれぞれの確率の和で求められること、が示されている。特に3. の条件を確率の加法性 (additivity) と呼ぶ。また、三つ組  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  を確率空間 (probability space) と呼ぶ。

以下、確率の重要な性質を導こう。

定義1. の2. より、 $P(A^c) = P(\Omega \setminus A) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$  となることがわかる。これより、以下の定理が成り立つ。

**定理 1 (余事象の確率)** 事象  $A$  の余事象 (complementary event) の確率は以下のとおりである。

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

また、定義1. の2. より、 $P(\phi) = P(\Omega^c) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$  となる。これより、以下の定理が成り立つ。

**定理 2 (境界)**

$$P(\phi) = 0$$

さらに、 $A \subset B$  のとき、 $P(A)$  と  $P(B)$  の関係について考えよう。

$A \subset B$  より、 $\exists B' : B = A \cup B'$ 、 $A \cap B' = \phi$  が成り立つ。定義1. の3. より  $P(B) = P(A) + P(B')$ 、定義1. の2. より  $0 \leq P(B') \leq 1$  が成り立ち、結果として  $P(A) \leq P(B)$  が成り立つことがわかる。これを以下のように単調性 (monotonicity) と呼ぶ。

**定理 3 (単調性)**  $A \subset B$  のとき  $P(A) \leq P(B)$

定義2. の3. では、たがいに素な事象の和の確率はそれぞれの事象の確率の和で求めることができた。では、たがいに素ではない事象の和はどのように求められるのであろうか？ 以下のように求められる。



$A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B)$  より,  $P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) + P(A \cap B)$  が成り立つ. これより,  $P(A) + P(B) = P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) + P(A \cap B)$ , そして  $P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  が成り立つ. したがって,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  となる. これを以下のように確率の和法則 (additional law of probability) と呼ぶ.

定理 4 (確率の和法則)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

## 1.2 主 観 確 率

前節で確率を数学的に定義した. しかし, 確率の実際的な解釈には二つの立場がある. 最も一般的な解釈が, ラプラスの頻度主義である.

コインを何百回も投げて表が出た回数 (頻度) を数えて, その割合を求めることを考えよう. いま, 投げる回数を  $n$  とし, 表の出た回数を  $n_1$  とすると,  $n \rightarrow \infty$  のとき,

$$\frac{n_1}{n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

となることが予想される. このように, 何回も実験を繰り返して  $n$  回中, 事象  $A$  が  $n_1$  回出たとき,  $n_1/n$  を  $A$  の確率と解釈するのが頻度主義である.

しかし, この定義では真の確率は無限回実験をしなければならぬので得ることは不可能である. また, 科学的実験が可能な場合のみ確率が定義され, 実際の間人が扱う不確かさに比べてきわめて限定的になってしまう.

一方, より広く確率を捉える立場として, 人間の個人的な主観確率 (subjective probability) として解釈する立場がある.

ベイジアン (Bayesian, バイズ主義者) は, 確率を主観確率として扱う. 次節で導出されるバイズの定理を用いる人々をベイジアンだと誤解されているが,

#### 4 1. 確率とベリーフ

ベイズの定理は確率の基本定理で数学的に議論の余地のないものであり、頻度主義者も用いる。

例えば、松原（2010）では以下のような主観確率の例が挙げられている。

1. 第三次世界大戦が 20XX 年までに起こる確率が 0.01
2. 明日、会社の株式の価格が上がる確率が 0.35
3. 来年の今日、東京で雨が降る確率が 0.5

ベイズ統計では、これらの主観確率は個人の意思決定のための信念として定義され、ベリーフ (belief) と呼ばれる。当然、頻度論的確率を主観確率の一種とみなすことができるが、その逆は成り立たない。本書では、ベイズ統計の立場に立ち、確率をベリーフの立場で解釈する。ベリーフの具体的な決定の仕方など厳密な理論に興味のある読者は Bernardo and Smith (1994), Berger (1985) を参照されたい。

### 1.3 条件付き確率と独立

本節では、条件付き確率と独立を定義する。

**定義 3 (条件付き確率)**  $A \in \mathcal{A}$ ,  $B \in \mathcal{A}$  について、事象  $B$  が起こったという条件の下で、事象  $A$  が起こる確率を条件付き確率 (conditional probability) と呼び、

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

を示す。

このとき、 $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$  より以下の乗法公式が成り立つ。

**定理 5 (乗法公式)**

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

このとき、 $P(A \cap B)$  を  $A$  と  $B$  の同時確率 (joint probability) と呼ぶ。

つぎに、事象の独立を以下のように定義する。

**定義 4 (独立)** ある事象の生起する確率が、他のある事象が生起する確率に依存しないとき、二つの事象は独立 (independent) であるという。すなわち事象  $A$  と事象  $B$  が独立とは  $P(A|B) = P(A)$  であり、

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

が成り立つことをいう。

さらに乗法公式を一般化すると以下のチェーンルールが導かれる。

$$P(A \cap B \cap C) = P(A|B, C)P(B|C)P(C)$$

これは、3 個以上の事象にも拡張できるので、チェーンルール (chain rule) は以下のように書ける。

**定理 6** チェーンルール  $N$  個の事象  $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$  について

$$\begin{aligned} & P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_N) \\ &= P(A_1|A_2, A_3, \dots, A_N)P(A_2|A_3, A_4, \dots, A_N) \cdots P(A_N) \end{aligned}$$

が成り立つ。

## 1.4 ベイズの定理

本節では、条件付き確率より、ベイズ統計にとって最も重要なベイズの定理を導出する。

ベイズの定理を導出する前に、たがいに背反な事象  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , ( $A_i \in \mathcal{A}$ ) が全事象  $\Omega$  を分割しているとき、事象  $B \in \mathcal{A}$  について以下が成り立つことがわかる。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_i)} \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B) = P(\Omega \cap B) = P(B) \end{aligned}$$

これを以下の全確率の定理と呼ぶ。

**定理 7 (全確率の定理 (total probability theorem))** たがい背反な事象  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , ( $A_i \in \mathcal{A}$ ) が全事象  $\Omega$  を分割しているとき, 事象  $B \in \mathcal{A}$  について,  $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$  が成り立つ。

全確率の定理より,  $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$ , したがって

$$\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i, B)}{P(B)} = P(A_i|B)$$

が成り立つ。これが以下のベイズの定理である。

**定理 8 (ベイズの定理 (Bayes' theorem))** たがい背反な事象  $A_1, A_2, \dots, A_n$  が全事象  $\Omega$  を分割しているとする。このとき, 事象  $B \in \mathcal{A}$  について,  $P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}$  が成り立つ。

**例 1** 昔, ある村にうそつき少年がいた。少年はいつも「オオカミが来た!!」と大声で叫んでいたが, いままで本当だったことがない。「オオカミが来た」という事象を  $A$ , 少年が「オオカミが来た!!」と叫ぶ事象を  $B$  とし,  $P(B|A) = 1.0$ ,  $P(B|A^c) = 0.5$ ,  $P(A) = 0.005$  とする。少年が「オオカミが来た!!」と叫んだとき実際にオオカミが来ている確率を求めてみよう。

ベイズの定理より,

$$\begin{aligned}
 P(A|B) &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + (1 - P(A))P(B|A^c)} \\
 &= \frac{0.005 \times 1.0}{0.005 \times 1.0 + 0.995 \times 0.5} \approx 0.00995.
 \end{aligned}$$

すなわち、うそつき少年の情報により、情報がないときに比較して、オオカミの来ている確率が約2倍に上昇していることがわかる。

ベイズ統計では、より広い確率の解釈として「ビリーフ」(belief)を用いることは先に述べた。ここでは考え方のみについてふれよう。意思決定問題から個人的な主観確率であるビリーフが以下のように求められる。

例えば、つぎの二つの賭けを考えよう。

1. もしオオカミが来ていれば1万円もらえる。
2. 赤玉  $n$  個、白玉  $100 - n$  個が入っている合計100個の玉が入っている壺の中から一つ玉を抜き出し、それが赤玉なら1万円もらえる。

どちらの賭けを選ぶかといわれれば、2番目の賭けで赤玉が100個ならば、誰もが迷わず2番目の賭けを選ぶだろうし、逆に  $n = 0$  ならば、1番目の賭けを選ぶだろう。この二つの賭けがちょうど同等になるように  $n$  を設定することができれば、 $\frac{n}{100}$  があなたの「オオカミが来る」ビリーフになる。このように、ベイズ統計における確率の解釈「ビリーフ」は頻度主義の確率で扱える対象を拡張でき、個人的な信念やそれに基づく意思決定をも合理的に扱えるツールとなる。

ビリーフを用いてもう一度例を振り返ろう。例1では、もともとのオオカミが来る確率  $P(A) = 0.005$  が、(うそかどうかわからない)少年の報告により  $P(A|B) = 0.00995$  と約2倍にビリーフが更新されていることがわかる。すなわち、うそをつく少年の証言によって事前のビリーフが事後のビリーフに更新されたのである。このとき、ベイズ統計では、少年の証言を「エビデンス」(evidence)と呼び、事前のビリーフを「事前確率」(prior probability)、事後のビリーフを「事後確率」(posterior probability)と呼ぶ。

**例2 (3囚人問題)** つぎに有名な3囚人問題を紹介しよう。ある監獄にアラ

ン、バーナード、チャールズという3人の囚人がいて、それぞれ独房に入られている。3人は近く処刑される予定になっていたが、恩赦が出て3人のうち1人だけ釈放されることになったという。誰が恩赦になるかは明かされておらず、それぞれの囚人が「私は釈放されるのか?」と聞いても看守は答えない。囚人アランは一計を案じ、看守に向かって「私以外の2人のうち少なくとも1人は死刑になるはずだ。その者の名前が知りたい。私のことじゃないんだから教えてくれてもよいだろう?」と頼んだ。すると看守は「バーナードは死刑になる」と教えてくれた。それを聞いたアランは「これで釈放される確率が1/3から1/2に上がった」とひそかに喜んだ。果たしてアランが喜んだのは正しいのか?

この問題はベイズの定理を用いれば合理的に解くことができる。アランが釈放される事象を  $A$ 、バーナードが釈放される事象を  $B$ 、チャールズが釈放される事象を  $C$  とする。いま、事前にはだれが釈放されるかわからないので、 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$  としてよい。また、看守はうそをつかないものとし、看守が証言した事象を  $E$  とする。ベイズの定理を用いれば、以下の事後確率を計算すればよい。

$$P(A | E) = \frac{P(E | A)P(A)}{P(E | A)P(A) + P(E | B)P(B) + P(E | C)P(C)}$$

$P(E | A)$  は、アランが釈放されるときに看守はバーナードかチャールズかどちらかの名前を言えたので、看守がバーナードが処刑されると言う確率は  $\frac{1}{2}$  である。 $P(E | B)$  は、看守はバーナードが釈放されるときにバーナードが処刑されるとは言わないので 0.0 である。 $P(E | C)$  は、チャールズが釈放されるときに、アランの名前は言えないので看守はバーナードの名前しか言えず、確率は 1.0 となる。これらの値を上でのベイズの定理に挿入すると

$$\begin{aligned} P(A | E) &= \frac{P(E | A)P(A)}{P(E | A)P(A) + P(E | B)P(B) + P(E | C)P(C)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0.0 \cdot \frac{1}{3} + 1.0 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

結果として、アランの釈放される事後確率は事前確率と等しく、看守の証言は情報にはなっていないことがわかる。

以上のようにベイズの定理は帰納推論のための合理的なツールであることがわかる。すなわち、条件付き確率  $P(A | B)$  を知っていることはわれわれが因果 (causality)  $B \rightarrow A$  を仮定していることになる。したがって、ベイズの定理は、因果 (causality)  $B \rightarrow A$  を用いて  $A$  が起こったときの原因の確率  $P(B | A)$  を求めるツールである。そして、因果  $B \rightarrow A$  をより複雑なネットワークに拡張して、これらの推論を行うことがベイジアンネットワーク (Bayesian network) なのである。

## 1.5 確 率 変 数

一つの試行の結果を標本点  $\omega \in \Omega$  と呼ぶ。この標本点  $\omega \in \Omega$  は、なんらかの測定によって観測される。この測定のことを、確率論では確率変数 (random variable) と呼ぶ。例えば、コインを  $n$  回投げるという試行について、表が出る回数  $X$  は確率変数である。このとき、標本点  $\omega$  は表・裏のパターンが  $n$  個あり得るので  $2^n$  通りあり、 $X$  は  $0$  から  $n$  までの値をとる。

数学的には、確率変数は以下のように定義される。

**定義 5** 確率空間  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  に対し、 $\Omega$  から実数  $\mathcal{R}$  への関数  $X : \Omega \rightarrow \mathcal{R}$  が、任意の実数  $r$  に対し

$$\{X \leq r\} \in \mathcal{A}$$

を満たすならば、 $X$  を確率空間  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  上の確率変数という。

また、確率変数  $X$  が確率空間  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  上に定義されると、任意の  $r \in \mathcal{R}$  に対して

$$F(r) = P(\{X \leq r\})$$

# 索引

<b>【あ】</b>		完全集合	31	最尤推定値	137
アンセスタル集合	35	完全ナンバリング	42	最尤推定法	12
アンセストラルナンバ リング	36	緩和	123	最尤推定量	13
		<b>【き】</b>		三角化	41
<b>【い】</b>		木	33	三角グラフ	40
因果サポート	110	擬似サンプル	135	漸近正規推定量	15
インスタンス化	68	擬似データ	201	漸近分散	15
インデペンデントマップ	55	期待事後推定値	17	<b>【し】</b>	
		強一致推定値	15	ジェフリーズの事前分布	19
<b>【え】</b>		境界	32	事後確率	7
枝刈り	71	許容的	164	事後分布	16
エッジ	28	近傍	32	事後分布最大化推定値	16
エッジ削除アルゴリズム	123	<b>【く】</b>		事後分布周辺化	68
エビデンス	7	クラスター	46, 89	辞書式順序	156
エリミネーションツリー	84	クラスターグラフ	46	事前確率	7
		クリーク	31	自然共役事前分布	20
<b>【お】</b>		クリークグラフ	47	事前分布	16
親ノード	34	クリークチェーン	45	事前分布項	198
		<b>【け】</b>		事前分布周辺化	67
<b>【か】</b>		弦	40	子孫	35
外生因果	190	厳密解	153	ジャンクショングラフ	47
過学習	201	<b>【こ】</b>		ジャンクションツリー	47
確率測度	1	交差法則	45	ジャンクションツリー アルゴリズム	94
確率の和法則	3	コーダルグラフ	40	集積フェーズ	91
確率分布	10	子ノード	34	周辺確率分布	11
確率変数	9	<b>【さ】</b>		周辺事後確率	68
確率密度関数	10	最小記述長	140	周辺事後分布	24
空グラフ	199	最小次数法	77	周辺事前確率	67
カルバック・ライブラー ダイバージェンス	115	再生	127	周辺密度関数	11
完全	99			周辺尤度	27, 139
完全グラフ	30, 200			主観確率	3
				循環	37



循環グラフ	38	同時確率分布表	66	ベイジアンモデル平均	173
ジョイングラフ	47	動的計画法	153	ベイズ推定値	16
ジョイントリー	47	独立	5	ベイズの定理	6
ジョイントリーアルゴリズム	80, 94	トータルテーブルサイズ	100	並列スケジュール	114
条件付き確率	4	トポロジカルオーダー	157	閉路	30
条件付き独立性検定	180	貪欲法	153	ベータ分布	20
自律的	190				
自律的部分構造	190	<b>【な】</b>		<b>【ほ】</b>	
診断サポート	110	ナンバリング	35	母数化	132
				ポリトリーアルゴリズム	108
<b>【せ】</b>		<b>【の】</b>		<b>【ま】</b>	
正則条件	15	ノード	28	マルコフブランケット	60
説明効果	56				
セパレータ	88	<b>【は】</b>		<b>【み】</b>	
全確率の定理	6	ハイパーパラメータ	21	路	30
先祖	35	ハードエビデンス	57		
		幅優先分枝限定法	168	<b>【む】</b>	
<b>【そ】</b>		パーフェクトマップ	54	無向エッジ	29
ソフトエビデンス	57			無向グラフ	29
		<b>【ひ】</b>		無情報事前分布	18
<b>【た】</b>		非循環グラフ	38	無矛盾	164
ダイナミッククリーク		非循環有向グラフネット			
メンテナンス法	103	ワーク構造	61	<b>【め】</b>	
多項分布	135	標本点	9	メッセージスケジュール	114
単結合木	38	非連結グラフ	33	メッセージパッシング	90
単調性	2	非連結有向グラフ	38		
		頻度主義	3	<b>【も】</b>	
<b>【ち】</b>		<b>【ふ】</b>		モデル選択	27
チェンルール	5	ファクター消去	80	モラルグラフ	36
逐次結合	55	フィルイン	41, 76		
逐次スケジュール	114	フェイスフル	178	<b>【ゆ】</b>	
		複結合木	38	有向エッジ	29
<b>【て】</b>		複連結グラフ	33	有向木	38
ディリクレ積分	197	複連結有向グラフ	38	有向グラフ	29
ディリクレ分布	135	分岐結合	56	有向グラフに対応した無向	
データ情報最大化事前分布	20	分枝限定法	100	グラフ	36
デュアルジョイングラフ	119	分配フェーズ	92	尤度関数	12
		分布関数	10	尤度項	198
<b>【と】</b>				尤度等価	143
統計的学習	132	<b>【へ】</b>		<b>【よ】</b>	
同時確率	4	ベイジアンネットワーク		余事象	2
同時確率分布	11	学習	132		

<p>予測分布 25</p> <p style="text-align: center;"><b>【り】</b></p> <p>隣接ノード集合 30</p>	<p style="text-align: center;"><b>【る】</b></p> <p>ルーピービリーフプロパ ゲーション 114 ループ 32</p>	<p style="text-align: center;"><b>【れ】</b></p> <p>連結グラフ 33 連結有向グラフ 38</p>
◆ ◆		
<p style="text-align: center;"><b>【A】</b></p> <p>A* ヒューリスティック探索 160</p> <p style="text-align: center;"><b>【B】</b></p> <p>BDe 143 BFBnB 168 BIC 141</p> <p style="text-align: center;"><b>【C】</b></p> <p>CPT 65</p> <p style="text-align: center;"><b>【D】</b></p> <p>d 結合 58 d 分離 58 DAG 38 DAG ネットワーク構造 61 DP 153</p> <p style="text-align: center;"><b>【E】</b></p> <p>EAP 推定値 17, 137</p> <p style="text-align: center;"><b>【G】</b></p> <p><math>G^2</math> テスト 181</p>	<p style="text-align: center;"><b>【H】</b></p> <p>HUGIN アルゴリズム 96</p> <p style="text-align: center;"><b>【I】</b></p> <p>IC アルゴリズム 179 improper prior distribu- tion 18</p> <p style="text-align: center;"><b>【J】</b></p> <p>JPDT 66</p> <p style="text-align: center;"><b>【K】</b></p> <p>KL ダイバージェンス 115</p> <p style="text-align: center;"><b>【M】</b></p> <p>MAP 73 MAP 推定値 16, 136 Max-Min ヒューリス ティック 184 MDL 140 ML 27 MLE 12 MMHC アルゴリズム 184 MPE 72</p>	<p style="text-align: center;"><b>【N】</b></p> <p>NIP-BDe 151 NIP-BIC 151 NML 142</p> <p style="text-align: center;"><b>【P】</b></p> <p>PC アルゴリズム 179 principle of stable estimation 18</p> <p style="text-align: center;"><b>【R】</b></p> <p>RAI アルゴリズム 190</p> <p style="text-align: center;"><b>【S】</b></p> <p>SGS アルゴリズム 179 Shenoy-Shafer アルゴ リズム 94 Stochastic Complexity 142 super-structure 153</p> <p style="text-align: center;"><b>【T】</b></p> <p>TTS 100</p> <p style="text-align: center;"><b>【ギリシャ文字】</b></p> <p><math>\sigma</math> 集合体 1</p>

— 著者略歴 —

1989年 神戸大学教育学部初等教育科卒業  
1992年 神戸大学大学院修士課程修了(教育学専攻)  
1994年 東京工業大学大学院博士課程早期修了(システム科学専攻)  
博士(工学)  
1994年 東京工業大学助手  
1996年 千葉大学助手  
2000年 長岡技術科学大学助教授  
2006年 電気通信大学助教授  
2007年 電気通信大学准教授  
現在に至る

ベイジアンネットワーク

Bayesian Network

© Maomi Ueno 2013

2013年7月30日 初版第1刷発行

★

検印省略

著者 うえのまおみ  
植野真臣  
発行者 株式会社 コロナ社  
代表者 牛来真也  
印刷所 三美印刷株式会社

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)

ホームページ <http://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-06103-1 (金) (製本:愛千製本所)

Printed in Japan



本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めておりません。

落丁・乱丁本はお取替えいたします