工学・物理のための

基礎ベクトル解析

工学博士　畑山　明聖
博士(工学)　櫻林　徹
共著

コロナ社

まえがき

ベクトル解析の知識や手法は，電磁気学，力学などの基礎物理学の分野はもちろん，幅広い工学分野において活用されている。物理系，工学系の学生にとって必須の科目である。

私の所属する慶應義塾大学理工学部物理情報工学科では，「電磁気学」が2年次必修科目になっている。その際，「電磁気学の理解が容易」になるように，最初の3週分を「基礎ベクトル解析の習得」にあてている。本書は，この基礎ベクトル解析の講義ノートをもとに，加筆修正してまとめたものである。

著者（畑山）の所属する上記学科は，応用物理をキーワードに，物性工学，制御工学，システム工学，医療工学など，幅広い分野を研究対象としている。著者（畑山）自身も，現在はプラズマ，特に核融合プラズマを専門としており，数学をその生業とはしていない。したがって，本書をまとめるにあたって，厳密な数学的理解よりは，むしろ本書で学んだ基礎知識や手法が，将来，電磁気学，力学，流体力学などの基礎科目の学習に役立つこと，さらには，大学の学部3，4年で学ぶ様々な工学分野における応用科目の学習に役立つことを最優先させた。

そのため，身近な日常生活や電磁気学，力学，流体力学など物理分野，さらには幅広い工学分野における，ベクトル解析の応用例，具体例を数多く挙げている。これをもとに，ベクトルの「発散」，「回転」など，応用上，重要なベクトル解析の知識や手法が，自然に身につくよう工夫した。物理や工学では様々な場面で「保存則」に出会う。その理解に重要と考えられる「流束の概念」，「ガウスの定理」については，具体例をいくつか挙げ，かなりのページ数を割いて丁寧に説明している。この点は，本書の特長の一つではないかと思われる。

また，著者の一人（櫻林）は，現在，高等学校の数学科教員である。本書で

は，高等学校の数学を前提に無理なく，ベクトル解析の基礎が学習できるように配慮した。例えば，2章では，「ベクトルの微分」を学習する前に，高等学校で学んだ普通の「微分」を復習する（冗長と思われる読者は読み飛ばしても一向に構わない)。また，「偏微分」について，まだ学習していない読者もいることに配慮し，4章では「偏微分」の概念を，最初にまとめた。5章では，同様に「重積分」を学習していない読者のために，「太陽光パネル」に入射するエネルギーの例を用いてその概念をやさしく説明している。

以上のように，本書では読者の理解が容易であるように，いくつか工夫をしたつもりである。しかしながら，本書が真に読者に役立つためには，ある程度，理屈抜きの問題練習も不可欠であろう。九九を学んだときのことを思い出すと，私自身，必ずしも理屈を完全に理解して演算を行っていたわけでない。多くの問題を解いてみることによって，掛け算の意味をだんだんに身体で感じ，理解していったように思う。そこで，項目の区切りごとに，できる限り多くの問題を用意した。ぜひ，自分でできる限り多くの問題を解いてみることをお勧めする。また，各章末には，「まとめのQuiz」を用意した。基本知識のチェック，さらに，チェック後は基本事項のまとめとして，役立てていただければ幸いである。

最後に，本書をまとめるのにあたり，原稿に目を通していただき，内容に関して多くのご助言をいただいた慶應義塾大学の植田利久 教授，本多 敏 教授，伊藤公平 教授，石榑崇明 准教授に心から感謝を申し上げたい。著者（畑山）が担当する「電磁気学」関連の科目でティーチングアシスタントを勤めてくれた博士課程学生の星野一生 君，水野貴敏 君（現：日本原子力研究開発機構)，修士課程学生の江原 毅 君（現：シャープ（株)），山口翔太 君（現：キヤノン（株)），藤野郁朗 君，松下大介 君，藤間光徳 君らには，問題解答作成などで協力を得た。彼らの協力に深く感謝する。

2009年1月

畑山明聖
櫻林　徹

目　　　次

1. ベクトルに関する基本事項

2. ベクトルの微分

3. 場の考え方と流束の概念

4. 場の微分

5. ベクトルの積分

6. 曲線座標系

7. 基本事項のまとめと主な公式

1. ベクトルに関する基本事項

1.1 ベクトルとスカラー

単に大きさのみが意味を持つ物理量を**スカラー量**と呼ぶ。これに対して，大きさだけではなく向きを持っている物理量を**ベクトル量**と呼ぶ。ベクトル量とスカラー量とを区別するために，ベクトル量に対しては

$$\boldsymbol{A},\ \vec{A} \tag{1.1}$$

などの表記を用いる。また，以下，ベクトルの大きさを

$$A = |\boldsymbol{A}| \tag{1.2}$$

で表すことにする。

問 1.1 これまで学んできた物理量の中から，スカラー量およびベクトル量の例をできる限り多く挙げよ。

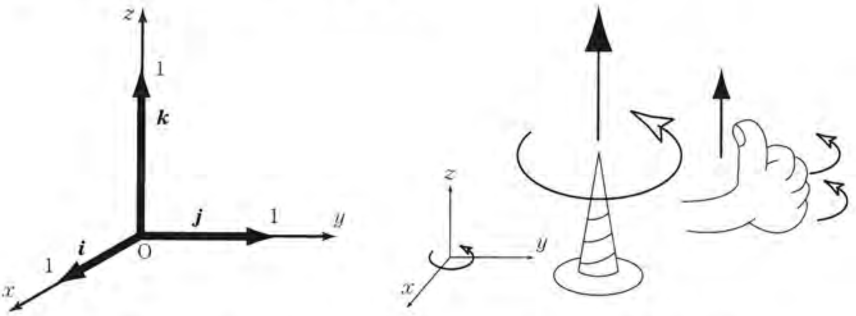
1.2 座標系とベクトルの成分表示

ここでは，主として3次元直交座標系におけるベクトルを考える。

まず，**図 1.1** に示した簡単な直角座標系において，ベクトルに関する基本事項，ベクトル解析を学ぶうえで重要となる概念や言葉の定義を行う。

〔1〕 右手座標系

図1.1（a）に示すような座標系を右手座標系あるいは単に右手系と呼ぶ。右手系では，図（b）に示したように，x 軸を y 軸のほうに回転すると



（a） 基本単位ベクトル　　　　（b） 右手座標系（右手系）

図1.1 3次元ユークリッド空間における直角座標系

き，右ねじの進む方向を z 軸の正の方向にとる。

〔2〕 **基本単位ベクトル**

図1.1（a）に示した x 軸，y 軸，z 軸の正の方向に向かう大きさが1である三つのベクトル，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ を基本単位ベクトルと呼ぶ。

〔3〕 **ベクトルの成分表示**

〔2〕に定義した基本単位ベクトルを用いて，3次元空間における任意のベクトル量は

$$\boxed{\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}} \tag{1.3}$$

と表される。**図1.2** で $\boldsymbol{A}$ の始点を原点Oに平行移動すれば理解できる。このとき，A_x，A_y，A_z を，各々，ベクトルの x 成分，y 成分，z 成分と呼ぶ。このときベクトル $\boldsymbol{A}$ の大きさは式（1.4）で与えられる。

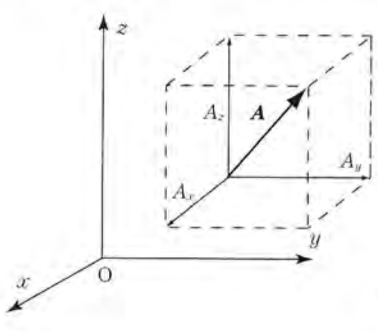


図1.2 ベクトルの成分表示

$$\boxed{A \equiv |\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2}} \tag{1.4}$$

問 1.2　ベクトル $\boldsymbol{A}$ を，その大きさ $|\boldsymbol{A}|$ で割ることによって得られる

$$\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$$

の意味を考えよ。

〔4〕 位置ベクトル

空間の点 P を考え，原点 O から点 P に向かうベクトル

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} \tag{1.5}$$

を位置ベクトルと呼ぶ（**図 1.3**）。点 P の座標を (x, y, z) とするとき，位置ベクトルは

$$\boxed{\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}} \tag{1.6}$$

と表すことができる。

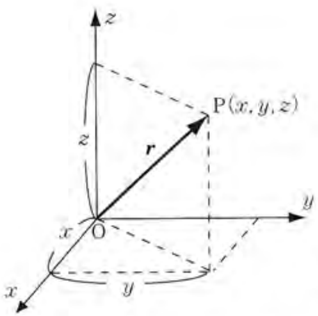


図 1.3　位置ベクトル

問 1.3　3 次元空間に点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ が与えられたとき，点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の方向を向く基本単位ベクトル（大きさ 1 のベクトル）は

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{r}}{r} \quad \text{ただし，} \quad r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{1.7}$$

で与えられることを確かめよ。

問 1.4　3 次元空間に点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ が与えられたとき，原点 O と点 P を結ぶ直線の方向を向き，大きさが A のベクトルは，次式で表現できることを確かめよ。

$$\boxed{\boldsymbol{A}=A\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)}$$

問 1.5 3次元空間の点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ において，ベクトル $\boldsymbol{A}$ が与えられている。その方向は，点 P の位置ベクトルの向き，その大きさは，原点 O から点 P までの距離 r の 2 乗に逆比例（$A=K/r^2$，$K=const.$）するとき，ベクトル $\boldsymbol{A}$ を，$\boldsymbol{r}$，r および K を用いて表現せよ。

問 1.6 空間の点 $\mathrm{P}(x_1, y_1, z_1)$ および点 $\mathrm{Q}(x_2, y_2, z_2)$ の位置ベクトルを，各々

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_1&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{r}_2&=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}\end{aligned}\tag{1.8}$$

とするとき，次の問に答えよ。

（1） 点 P から点 Q へ向かうベクトルは，式 (1.9) で与えられることを確かめよ。

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}\tag{1.9}$$

（2） 2 点間の距離は，式 (1.10) で与えられることを確かめよ。

$$\boxed{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}\tag{1.10}$$

（3） 点 Q において，ベクトル $\boldsymbol{A}$ が与えられている。その方向は，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と同じ向き，大きさは，2 点間の距離の 2 乗に逆比例する。比例定数を K とするとき，ベクトル $\boldsymbol{A}$ は，式 (1.11) で与えられることを確かめよ。

$$\boxed{\boldsymbol{A}=\frac{K}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|^2}\frac{(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|}=K\frac{(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{3/2}}}\tag{1.11}$$

1.3 ベクトルの内積

〔1〕 内 積 の 定 義

ベクトルの内積（スカラー積）は，式 (1.12) で定義される。

$$\boxed{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta}\tag{1.12}$$

ここで，$|\boldsymbol{A}|$，$|\boldsymbol{B}|$ は，各々，ベクトル $\boldsymbol{A}$ および $\boldsymbol{B}$ の大きさ，θ はベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ とのなす角である（図 1.4）。

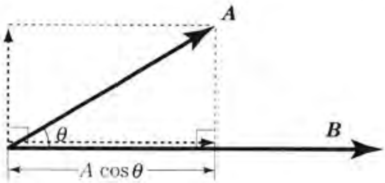


図 1.4 ベクトルの内積

〔2〕 **交換法則，分配法則**

ベクトルの内積については，以下の交換法則および分配法則が成り立つ。

$$\boxed{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}\ \text{（交換法則）}} \tag{1.13}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}\ \text{（分配法則）}} \tag{1.14}$$

ただし，1.4 節で定義するベクトルの外積については，交換法則は成立しない。

〔3〕 **内積に関する重要な性質**

内積の定義から

$$\boxed{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|^2=\boldsymbol{A}^2} \tag{1.15}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}\ \rightarrow\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0} \tag{1.16}$$

〔4〕 **基本単位ベクトルについての内積**

$$\boxed{\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1} \tag{1.17}$$

$$\boxed{\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0} \tag{1.18}$$

〔5〕 **ベクトルの成分による内積の表現**

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k} \tag{1.19}$$

$$\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k} \tag{1.20}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z} \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}&=(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})\cdot(B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k})\\&=A_xB_x(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})+A_xB_y(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})+A_xB_z(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k})\\&\quad+A_yB_x(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i})+A_yB_y(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j})+A_yB_z(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k})\\&\quad+A_zB_x(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i})+A_zB_y(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j})+A_zB_z(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

索　　　引

―― 著 者 略 歴 ――

畑山　明聖（はたやま　あきよし）

1976年　慶應義塾大学工学部計測工学科卒業
1978年　慶應義塾大学大学院修士課程修了（計測工学専攻）
1982年　慶應義塾大学大学院博士課程修了（計測工学専攻）
工学博士
1982年　東京芝浦電気（株）勤務
1992年　慶應義塾大学専任講師
1993年　慶應義塾大学助教授
2001年　慶應義塾大学教授
2013年　九州大学客員教授（併任，～2016年）
2015年　自然科学研究機構核融合科学研究所客員教授（併任，～2017年）
2019年　慶應義塾大学名誉教授

櫻林　徹（さくらばやし　とおる）

1999年　慶應義塾大学理工学部計測工学科卒業
2001年　慶應義塾大学大学院前期博士課程修了（計測工学専攻）
2004年　慶應義塾大学理工学部助手（有期）
2005年　慶應義塾大学大学院後期博士課程修了（基礎理工学専攻）
博士（工学）
2006年　共立女子高等学校数学科教諭
現在に至る

工学・物理のための 基礎ベクトル解析

Basic Vector Analysis for Engineering and Physics

2009年3月25日　初版第1刷発行
2021年2月5日　初版第7刷発行

検印省略

著　者	畑　山　明　聖
	櫻　林　　　徹
発行者	株式会社　コロナ社
	代表者　牛来真也
印刷所	萩原印刷株式会社
製本所	有限会社　愛千製本所

112-0011　東京都文京区千石4-46-10
発行所　株式会社　**コ ロ ナ 社**
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)
ホームページ https://www.coronasha.co.jp

ISBN 978-4-339-06098-0　C3041　Printed in Japan　（新宅）