

# システム解析のための フーリエ・ラプラス変換の基礎

博士(工学) 楊 劍鳴 著

コロナ社

## まえがき

本書は、積分変換の基礎を学び、また、その応用をおもな目的と考える学部生のための入門書である。そのため、基本的な数学公式や定理に関して厳密な証明などを述べるのではなく、それらを用いて容易に解ける演習問題を解いていくうちに、積分変換(フーリエ変換、ラプラス変換)の基礎を自然に理解し、その応用ができるようになるよう心掛けた。

高度に発展した工学の基礎知識として数学およびその応用面を考慮した講義が非常に強く要望されている。このような中で、私は、大学理工学系の2年生を対象として、微分方程式、システム解析のための積分変換(フーリエ変換、ラプラス変換)などの内容を主体とした「応用数学」という講義を行っている。本書はこの「応用数学」の講義での経験を基にまとめたものである。積分変換は、大学初学年で学習した微積分学などの基礎数学と機械システム工学各専門分野との間の架け橋となる。

将来の機械システムエンジニアとして設計能力はとても重視され、システムのモデル化とその解析手法は不可欠となる。本書では、機械系学生に、将来使うための数学を教育し、あるいはどのような形で数学が重要であるかを体系的に説明する。また機械・電気・制御などの実際システムにおいて、モデル化から解析までを通じて積分変換の役割を明確にする。

本書の前半では、講義の経験を基にフーリエ解析について理解しやすい例題などを通して解説し、その関連の応用も紹介する。後半では、工学の分野でよく用いられるラプラス変換の入門、および機械・電気システムの解析への応用などについて述べる。本書によって得られる積分変換の基礎知識が、読者の皆さんがさらに高度な専門知識を得られる道しるべとなれば幸いである。

最後に、名古屋大学大学院において数学およびその応用の学び方、研究の仕

方についてご指導いただいた恩師藤井省三先生，早川義一先生，そして名古屋大学在職中大変お世話になった末松良一先生にこの場を借りて心から感謝申し上げます。また，本書の作成にあたり終始お世話になったコロナ社の皆さんに厚くお礼申し上げます。

2008年8月

著 者

# 目 次

## 1. 数学的準備

1.1 複素数と複素関数	1
1.1.1 複素数の基本	1
1.1.2 複素平面と極形式	3
1.1.3 複素関数	6
1.2 広義積分	8
1.3 デルタ関数	10
章末問題	12

## 2. フーリエ変換の基礎

2.1 フーリエ級数	14
2.1.1 フーリエ級数とは	14
2.1.2 偶関数, 奇関数のフーリエ級数	20
2.1.3 複素フーリエ級数	23
2.2 フーリエ変換	25
2.2.1 フーリエ積分	25
2.2.2 フーリエ変換	26
2.3 フーリエ変換の性質	31
2.3.1 フーリエ変換の法則	31
2.3.2 特殊関数のフーリエ変換	35

2.3.3 パーセバルの等式 .....	37
章 末 問 題 .....	38

### 3. フーリエ変換の応用

3.1 フーリエ解析の応用分野 .....	40
3.2 たたみこみ積分と相関関数 .....	41
3.2.1 たたみこみ積分のフーリエ変換 .....	41
3.2.2 相関関数のフーリエ変換 .....	45
3.3 サンプリング定理 .....	47
3.3.1 離散時間信号 .....	48
3.3.2 サンプリング定理 .....	49
3.4 線形システムのスペクトル解析 .....	51
3.4.1 線形システム .....	52
3.4.2 線形システムの周波数応答 .....	53
3.5 信号のフィルタリング .....	55
3.5.1 フィルタの基本 .....	55
3.5.2 理想化周波数選択フィルタ .....	55
3.5.3 実際の周波数選択フィルタ .....	57
章 末 問 題 .....	59

### 4. ラプラス変換の基礎

4.1 ラプラス変換 .....	61
4.1.1 ラプラス変換の定義 .....	61
4.1.2 重要性および変換条件 .....	64
4.2 ラプラス変換の性質 .....	67

4.2.1	ラプラス変換の法則	67
4.2.2	ラプラス変換の定理	73
4.3	ラプラス逆変換	79
4.3.1	ラプラス逆変換の定義	79
4.3.2	部分分数展開によるラプラス逆変換	81
章 末 問 題		87

## 5. ラプラス変換の応用

5.1	線形微分方程式解法への適用	89
5.1.1	定係数線形微分方程式の解法	89
5.1.2	連立常微分方程式	94
5.2	微積分および偏微分方程式解法への適用	98
5.2.1	積分方程式の解法	98
5.2.2	微積分方程式の解法	99
5.2.3	偏微分方程式の解法	101
5.3	工学問題への適用	104
5.3.1	コンデンサ・コイルをもつ電気回路の問題	104
5.3.2	定常荷重が作用するはりのたわみの問題	106
5.3.3	撃力が作用する質点の運動問題	108
5.3.4	タンク液面高さの変化の問題	109
5.3.5	インパルス応答の問題	110
章 末 問 題		112

## 6. システム解析への応用

6.1	機械運動システム解析への適用	115
-----	----------------	-----

6.1.1	機械運動システムの基本要素	115
6.1.2	機械振動システムの解析	117
6.2	電気回路システム解析への適用	120
6.2.1	電気回路の基本要素	121
6.2.2	電気回路の基本法則	122
6.2.3	電気回路システムのラプラス変換	124
6.2.4	ラプラス変換を用いた電気回路の過渡現象解析	128
6.3	線形システムへの適用	130
6.3.1	線形システムによる機械・電気システムの表現	131
6.3.2	伝達関数とブロック線図	133
6.3.3	線形システムの応答解析	139
6.3.4	線形システムの安定解析	142
	章末問題	146
	参考文献	149
	章末問題解答	150
	索引	177

# 1

## 数学的準備

本章では、フーリエ変換、ラプラス変換を学ぶために必要な数学の基礎的内容を復習する。

### 1.1 複素数と複素関数

2, 3次方程式から生まれた虚数という概念から、複素数は定義され、それは数学、物理、工学のいろいろな分野で利用されている。ここでは、実数からの数の拡張である複素数について述べる。

#### 1.1.1 複素数の基本

虚数の基本単位として2乗して $-1$ 、すなわち $-1$ の平方根をアルファベットの小文字 $j = \sqrt{-1}$ を用いて表す。この $j$ を虚数単位といい、二つの実数 $x, y$ と虚数単位を用いて作られた数 $z$

$$z = x + jy \quad (1.1)$$

を複素数という。複素数 $z$ に対して、 $x, y$ をそれぞれ実部および虚部といい

$$x = \operatorname{Re}[z], \quad y = \operatorname{Im}[z] \quad (1.2)$$

と書く。

二つの複素数 $z_1 = a + jb$ ,  $z_2 = c + jd$ に対して、つぎのような四則演算がある。



## 2 1. 数学的準備

- 和： $z_1 + z_2 = (a + c) + j(b + d)$
- 差： $z_1 - z_2 = (a - c) + j(b - d)$
- 積： $z_1 z_2 = (ac - bd) + j(bc + ad)$
- 商： $\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$

また、複素数  $z_1, z_2, z_3$  に対して、つぎのような法則もある。

- 交換法則： $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, z_1 z_2 = z_2 z_1$
- 結合法則： $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
- 分配法則： $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

複素数  $z = x + jy$  の絶対値  $|z|$  は

$$|z| = |x + jy| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.3)$$

となる。また

$$\bar{z} = x - jy \quad (1.4)$$

を  $z = x + jy$  の共役複素数と定義する。

複素数とその共役複素数とはつぎの関係を持つ。

- $\overline{\bar{z}} = z$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}[z]$
- $z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im}[z]$
- $z\bar{z} = |z|^2$

また、二つの複素数  $z_1, z_2$  に対して

- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0)$

が成り立つ。

例題 1.1 つぎの複素数を  $x + jy$  の形で表せ。

$$(1) (2+j)\overline{(1+j3)} \qquad (2) (1+j\sqrt{3})^2$$

$$(3) \frac{1+j}{1-j} \qquad (4) (2-j) + \frac{1+j}{4+j3}$$

【解答】

(1)

$$(2+j)\overline{(1+j3)} = (2+j)(1-j3) = 2+j-j6+3 = 5-j5$$

(2)

$$(1+j\sqrt{3})^2 = 1+j2\sqrt{3}-3 = -2+j2\sqrt{3}$$

(3)

$$\frac{1+j}{1-j} = \frac{(1+j)(1+j)}{(1-j)(1+j)} = \frac{j^2}{2} = j$$

(4)

$$(2-j) + \frac{1+j}{4+j3} = (2-j) + \frac{(1+j)(4-j3)}{(4+j3)(4-j3)}$$

$$= (2-j) + \frac{7+j}{25} = \frac{57}{25} - j\frac{24}{25}$$

◇

### 1.1.2 複素平面と極形式

(1) 複素平面 複素数  $z = x + jy$  を二つの実数の組み合わせ  $(x, y)$  と考えると、直交座標平面上的座標  $(x, y)$  で点  $(z)$  を表すことができる。この平面を複素平面という。複素平面の横軸を実軸、縦軸を虚軸と呼ぶ。図 1.1 のように、複素数  $z = x + jy$  を、原点  $O$  から座標  $(x, y)$  の点  $P$  までのベクトル  $OP$  で表すとき、これを複素ベクトルという。複素ベクトルの実軸方向成分(横軸への正射影)が複素数の実部、虚軸方向成分(縦軸への正射影)が複素数の虚部である。

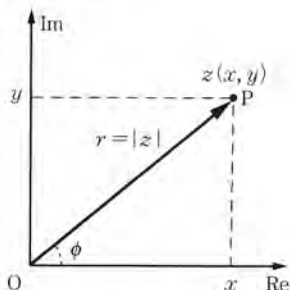


図 1.1 複素平面

(2) 複素数の極形式表示 図 1.1 に示すように、複素ベクトルの長さ  $r$  は

$$r = |OP| = \sqrt{\operatorname{Re}[z]^2 + \operatorname{Im}[z]^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \quad (1.5)$$

となり、実軸より反時計回りに測られた角度

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\operatorname{Im}[z]}{\operatorname{Re}[z]} = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (1.6)$$

は複素ベクトルの偏角と呼ばれる。複素ベクトル  $z = OP$  を

$$z = OP = r(\cos \phi + j \sin \phi) \quad (1.7)$$

で表す。すなわち三角関数により複素数を表現する。また、よく知られたオイラーの公式

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (1.8)$$

より、三角関数と指数関数の関係式

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \quad (1.9)$$

も得られる。オイラーの公式より式 (1.7) を次式のように表すことができる。

$$z = re^{j\phi} \quad (1.10)$$

この式を複素数の極形式または指数形式表示と呼ぶ。共役複素数は

$$\bar{z} = \overline{re^{j\phi}} = re^{-j\phi}$$

となる。

**例題 1.2** つぎの複素数を計算して、結果を極形式で表せ。

$$(1) j(1-j) \qquad (2) (1-j\sqrt{3})^2$$

$$(3) \frac{1}{\sqrt{3}+j} \qquad (4) \frac{2+j}{j} + \frac{j}{2+j}$$

**【解答】**

(1)

$$j(1-j) = 1+j, \quad r = |1+j| = \sqrt{2}, \quad \phi = \frac{\pi}{4}$$

したがって

$$j(1-j) = re^{j\phi} = \sqrt{2}e^{j\pi/4}$$

(2)

$$(1-j\sqrt{3})^2 = 4\left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

であるから

$$\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ の } r = \left|\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1, \quad \phi = -\frac{\pi}{3}$$

したがって

$$(1-j\sqrt{3})^2 = 4(e^{-j\pi/3})^2 = 4e^{-j2\pi/3}$$

(3)

$$\sqrt{3}+j \text{ の } r = |\sqrt{3}+j| = 2, \quad \phi = \frac{\pi}{6} \text{ で, } \sqrt{3}+j = 2e^{j\pi/6}$$

したがって

$$\frac{1}{\sqrt{3}+j} = \frac{1}{2e^{j\pi/6}} = \frac{1}{2}e^{-j\pi/6}$$

(4)

$$\frac{2+j}{j} + \frac{j}{2+j} = \frac{(2+j)^2 + j^2}{j(2+j)} = \frac{2}{5}(3-j4)$$

から、 $r = 2, \phi = -\tan^{-1}\frac{4}{3}$  であるので

$$\frac{2+j}{j} + \frac{j}{2+j} = re^{-j\phi} = 2e^{-j\tan^{-1}(4/3)}$$

◇

# 索 引

<b>【あ】</b>		ギブスの不安定現象	19	遮断域	56
安定	145	境界	103	遮断周波数	58
安定限界	145	共役性	34	周期的デルタ関数	36
安定性	52	共役複素数	2	周波数領域	40
		極	143	振幅周波数応答	54
<b>【い】</b>		キルヒホッフの法則	122	振幅スペクトル	54
行き過ぎ量	140	<b>【く】</b>		<b>【す】</b>	
位相周波数応答	54	偶関数	20	ステップ応答	139
位相スペクトル	54	駆動関数	100	スペクトル	40
因果性	53	<b>【け】</b>		<b>【せ】</b>	
インディシャル応答	139	結合法則	2	制動定数	128
インパルス応答		原関数	27, 62	積分方程式	98
	110, 111, 139	減衰係数	117	遷移域	58
インパルス信号	53	<b>【こ】</b>		線形システム	44, 52
インピーダンス	124	交換法則	2	線形性	31, 52
<b>【え】</b>		広義積分	8	<b>【そ】</b>	
エネルギースペクトル	38	合成積	41	相関	41
エネルギー容量	38	固有振動数	117	相関関数	45
<b>【お】</b>		<b>【さ】</b>		像関数	27, 62
オイラーの公式	4	最終値定理	77	相互相関関数	45
<b>【か】</b>		最初値定理	77	相似性	32
回転運動	116	三角関数	20	<b>【た】</b>	
過制動	119	サンプリング	48	対称性	34
カットオフ周波数	58	サンプリング定理	50	代数方程式	91
過渡応答特性	139	<b>【し】</b>		たみこみ	41
過渡現象	128	時間スケージング	67	たみこみ積分	41
加法定理	30	時間領域	41	立ち上がり時間	140
慣性能率	107	自己相関関数	46	断面係数	107
<b>【き】</b>		指数関数	23	<b>【ち】</b>	
奇関数	20	時不変性	52	直線運動	115

	<b>【つ】</b>	複素関数	6		<b>【や】</b>	
		複素数	1		ヤング弾性率	107
通過域	56	複素フーリエ級数展開	24		<b>【ら】</b>	
	<b>【て】</b>	複素フーリエ係数	24		ラプラス逆変換	79
定係数線形微分方程式	89	複素フーリエ積分	26		ラプラス変換	61
デルタ関数	11, 35	複素平面	3		ラプラス変換表	80
伝達関数	133	複素ベクトル	4		<b>【り】</b>	
	<b>【な】</b>	不足制動	120		離散時間信号	49
ナイキスト周期	51	部分分数展開	82		離散時間領域	47
ナイキスト周波数	51	フーリエ逆変換	27		理想化ハイパスフィルタ	56
	<b>【に】</b>	フーリエ級数	14		理想化バンドストップ	
ニュートンの法則	117	フーリエ級数展開	14		フィルタ	57
	<b>【の】</b>	フーリエ係数	15		理想化バンドパスフィルタ	
ノード	122	フーリエ正弦級数	20			57
	<b>【は】</b>	フーリエ正弦変換	31		理想化ローパスフィルタ	56
パーセバルの等式	37	フーリエ変換	27		臨界制動	120
パワースベクトル	38	フーリエ余弦級数	20		<b>【る】</b>	
	<b>【ひ】</b>	フーリエ余弦変換	31		類似性	131
微積分方程式	99	ブロック線図	135		ループ	122
標本化	48	分配法則	2		<b>【れ】</b>	
	<b>【ふ】</b>				零点	143
不安定	145	<b>【へ】</b>			連続時間信号	48
フィルタリング	44	ヘビサイドの部分分数	82		連続時間領域	47
		展開定理	32		連立代数方程式	94
		変数移動	101			
		偏微分方程式	101			
		<b>【む】</b>				
		むだ時間	71			

— 著者略歴 —

- 1982年 中国福州大学工学部機械工学科卒業  
その後、同大学助手
- 1985年 中国浙江大学大学院工学研究科修士課程修了(制御工学専攻)  
その後、同大学講師
- 1994年 名古屋大学大学院工学研究科後期博士課程修了(情報工学専攻)  
その後、同大学助手
- 1995年 博士(工学) (名古屋大学)
- 2000年 名城大学専任講師
- 2003年 名城大学助教
- 2007年 名城大学准教授
- 2009年 名城大学教授  
現在に至る

システム解析のためのフーリエ・ラプラス変換の基礎

Introduction to Fourier and Laplace Transformation for System Analysis

© Jianming Yang 2008

2008年10月16日 初版第1刷発行

2021年1月20日 初版第8刷発行

検印省略

著者	ヤン	メイ	ミン
	楊	劍	鳴
発行者	株式会社	コロナ社	
	代表者	牛来真也	
印刷所	三美印刷株式会社		
製本所	有限会社	愛千製本所	

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社  
CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844・電話 (03)3941-3131(代)

ホームページ <https://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-06095-9 C3041 Printed in Japan

(阿部)



©COPY <出版者著作権管理機構 委託出版物>

本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつと事前に、出版者著作権管理機構(電話 03-5244-5088, FAX 03-5244-5089, e-mail: info@jcopy.or.jp)の許諾を得てください。

本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めていません。落丁・乱丁はお取替えいたします。