システム解析のための
フーリエ・ラプラス変換の基礎

博士(工学) 楊　剣鳴 著

コロナ社

まえがき

本書は，積分変換の基礎を学び，また，その応用をおもな目的と考える学部生のための入門書である。そのため，基本的な数学公式や定理に関して厳密な証明などを述べるのではなく，それらを用いて容易に解ける演習問題を解いていくうちに，積分変換（フーリエ変換，ラプラス変換）の基礎を自然に理解し，その応用ができるようになるよう心掛けた。

高度に発展した工学の基礎知識として数学およびその応用面を考慮した講義が非常に強く要望されている。このような中で，私は，大学理工学系の2年生を対象として，微分方程式，システム解析のための積分変換（フーリエ変換，ラプラス変換）などの内容を主体とした「応用数学」という講義を行っている。本書はこの「応用数学」の講義での経験を基にまとめたものである。積分変換は，大学初学年で学習した微積分学などの基礎数学と機械システム工学各専門分野との間の架け橋となる。

将来の機械システムエンジニアとして設計能力はとても重視され，システムのモデル化とその解析手法は不可欠となる。本書では，機械系学生に，将来使うための数学を教育し，あるいはどのような形で数学が重要であるかを体系的に説明する。また機械・電気・制御などの実際システムにおいて，モデル化から解析までを通じて積分変換の役割を明確にする。

本書の前半では，講義の経験を基にフーリエ解析について理解しやすい例題などを通して解説し，その関連の応用も紹介する。後半では，工学の分野でよく用いられるラプラス変換の入門，および機械・電気システムの解析への応用などについて述べる。本書によって得られる積分変換の基礎知識が，読者の皆さんがさらに高度な専門知識を得られる道しるべとなれば幸いである。

最後に，名古屋大学大学院において数学およびその応用の学び方，研究の仕

方についてご指導いただいた恩師藤井省三先生，早川義一先生，そして名古屋大学在職中大変お世話になった末松良一先生にこの場を借りて心から感謝申し上げます。また，本書の作成にあたり終始お世話になったコロナ社の皆さんに厚くお礼申し上げます。

2008 年 8 月

著　　者

目　　次

1. 数学的準備

2. フーリエ変換の基礎

3.　フーリエ変換の応用

4.　ラプラス変換の基礎

5.　ラプラス変換の応用

6.　システム解析への応用

1 数学的準備

本章では，フーリエ変換，ラプラス変換を学ぶために必要な数学の基礎的内容を復習する。

1.1 複素数と複素関数

2，3 次方程式から生まれた虚数という概念から，**複素数**は定義され，それは数学，物理，工学のいろいろな分野で利用されている。ここでは，実数からの数の拡張である複素数について述べる。

1.1.1 複素数の基本

虚数の基本単位として 2 乗して -1，すなわち -1 の平方根をアルファベットの小文字 $j=\sqrt{-1}$ を用いて表す。この j を虚数単位といい，二つの実数 x，y と虚数単位を用いて作られた数 z

$$z = x + jy \tag{1.1}$$

を複素数という。複素数 z に対して，x，y をそれぞれ実部および虚部といい

$$x = \mathrm{Re}[z], \quad y = \mathrm{Im}[z] \tag{1.2}$$

と書く。

二つの複素数 $z_1 = a + jb$，$z_2 = c + jd$ に対して，つぎのような四則演算がある。

- 和：$z_1 + z_2 = (a + c) + j(b + d)$
- 差：$z_1 - z_2 = (a - c) + j(b - d)$
- 積：$z_1 z_2 = (ac - bd) + j(bc + ad)$
- 商：$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j\dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}$

また，複素数 z_1，z_2，z_3 に対して，つぎのような法則もある。

- **交換法則**：$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$，$z_1 z_2 = z_2 z_1$
- **結合法則**：$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$，$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
- **分配法則**：$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

複素数 $z = x + jy$ の絶対値 $|z|$ は

$$|z| = |x + jy| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.3}$$

となる。また

$$\overline{z} = x - jy \tag{1.4}$$

を $z = x + jy$ の**共役複素数**と定義する。

複素数とその共役複素数とはつぎの関係を持つ。

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $|z| = |\overline{z}|$
- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}[z]$
- $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}[z]$
- $z\overline{z} = |z|^2$

また，二つの複素数 z_1，z_2 に対して

- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$
- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0)$

が成り立つ。

例題 1.1 つぎの複素数を $x + jy$ の形で表せ。

(1) $(2+j)\overline{(1+j3)}$　　(2) $(1+j\sqrt{3})^2$

(3) $\dfrac{1+j}{1-j}$　　(4) $(2-j)+\dfrac{1+j}{4+j3}$

【解答】

(1)

$$(2+j)\overline{(1+j3)} = (2+j)(1-j3) = 2+j-j6+3 = 5-j5$$

(2)

$$(1+j\sqrt{3})^2 = 1+j2\sqrt{3}-3 = -2+j2\sqrt{3}$$

(3)

$$\frac{1+j}{1-j} = \frac{(1+j)(1+j)}{(1-j)(1+j)} = \frac{j2}{2} = j$$

(4)

$$\begin{aligned}(2-j)+\frac{1+j}{4+j3} &= (2-j)+\frac{(1+j)(4-j3)}{(4+j3)(4-j3)} \\ &= (2-j)+\frac{7+j}{25} = \frac{57}{25}-j\frac{24}{25}\end{aligned}$$

◇

1.1.2 複素平面と極形式

(1) 複素平面　複素数 $z = x + jy$ を二つの実数の組み合わせ (x, y) と考えると，直交座標平面上の座標 (x, y) で点 (z) を表すことができる。この平面を**複素平面**という。複素平面の横軸を実軸，縦軸を虚軸と呼ぶ。**図 1.1** のように，複素数 $z = x + jy$ を，原点 O から座標 (x, y) の点 P までのベクトル OP で表すとき，これを複素ベクトルという。複素ベクトルの実軸方向成分 (横軸への正射影) が複素数の実部，虚軸方向成分 (縦軸への正射影) が複素数の虚部である。

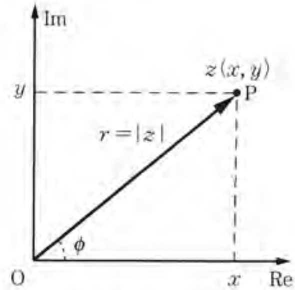

図 **1.1**　複素平面

(2)　複素数の極形式表示　　図 1.1 に示すように，**複素ベクトルの長さ** r は

$$r = |\mathrm{OP}| = \sqrt{\mathrm{Re}[z]^2 + \mathrm{Im}[z]^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \tag{1.5}$$

となり，実軸より反時計回りに測られた角度

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\mathrm{Im}[z]}{\mathrm{Re}[z]} = \tan^{-1} \frac{y}{x} \tag{1.6}$$

は複素ベクトルの偏角と呼ばれる。複素ベクトル $z = \mathrm{OP}$ を

$$z = \mathrm{OP} = r(\cos\phi + j\sin\phi) \tag{1.7}$$

で表す。すなわち三角関数により複素数を表現する。また，よく知られた**オイラーの公式**

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \tag{1.8}$$

より，三角関数と指数関数の関係式

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \tag{1.9}$$

も得られる。オイラーの公式より式 (1.7) を次式のように表すことができる。

$$z = re^{j\phi} \tag{1.10}$$

この式を複素数の極形式または指数形式表示と呼ぶ。共役複素数は

$$\overline{z} = \overline{re^{j\phi}} = re^{-j\phi}$$

となる。

例題 1.2 つぎの複素数を計算して，結果を極形式で表せ。

(1) $j(1-j)$ (2) $(1-j\sqrt{3})^2$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+j}$ (4) $\dfrac{2+j}{j}+\dfrac{j}{2+j}$

【解答】

(1)

$$j(1-j)=1+j, \quad r=|1+j|=\sqrt{2}, \quad \phi=\frac{\pi}{4}$$

したがって

$$j(1-j)=re^{j\phi}=\sqrt{2}e^{j\pi/4}$$

(2)

$$(1-j\sqrt{3})^2=4\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

であるから

$$\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ の } r=\left|\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1, \quad \phi=-\frac{\pi}{3}$$

したがって

$$(1-j\sqrt{3})^2=4(e^{-j\pi/3})^2=4e^{-j2\pi/3}$$

(3)

$$\sqrt{3}+j \text{ の } r=|\sqrt{3}+j|=2, \quad \phi=\frac{\pi}{6} \text{ で，} \sqrt{3}+j=2e^{j\pi/6}$$

したがって

$$\frac{1}{\sqrt{3}+j}=\frac{1}{2e^{j\pi/6}}=\frac{1}{2}e^{-j\pi/6}$$

(4)

$$\frac{2+j}{j}+\frac{j}{2+j}=\frac{(2+j)^2+j^2}{j(2+j)}=\frac{2}{5}(3-j4)$$

から，$r=2, \phi=-\tan^{-1}\dfrac{4}{3}$ であるので

$$\frac{2+j}{j}+\frac{j}{2+j}=re^{-j\phi}=2e^{-j\tan^{-1}(4/3)}$$

◇

索　　引

── 著者略歴 ──

1982年　中国福州大学工学部機械工学科卒業
　　　　その後，同大学助手
1985年　中国浙江大学大学院工学研究科修士課程修了（制御工学専攻）
　　　　その後，同大学講師
1994年　名古屋大学大学院工学研究科後期博士課程修了（情報工学専攻）
　　　　その後，同大学助手
1995年　博士（工学）（名古屋大学）
2000年　名城大学専任講師
2003年　名城大学助教授
2007年　名城大学准教授
2009年　名城大学教授
　　　　現在に至る

システム解析のためのフーリエ・ラプラス変換の基礎
Introduction to Fourier and Laplace Transformation for System Analysis

2008 年 10 月 16 日　初版第 1 刷発行
2021 年 1 月 20 日　初版第 8 刷発行

検印省略

著　者　楊　剣　鳴
発 行 者　株式会社　コ ロ ナ 社
　　　　代 表 者　牛 来 真 也
印 刷 所　三 美 印 刷 株 式 会 社
製 本 所　有限会社　愛千製本所

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発 行 所　株式会社　コ ロ ナ 社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話（03）3941–3131（代）
ホームページ　https://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–06095–9　C3041　Printed in Japan　（阿部）