# 工学のための
# 微分方程式入門

工学博士 金野 秀敏 著

コロナ社

# ま え が き

微分方程式の解法を学習・習得するのはたいへん難しいといわれている。しかし，一方で実在のさまざまな応用分野における学問の精緻化の現状を考えると高度な知識を短期間で習得することが要求されている。特に工学の諸分野では多変量の定数係数のモデルがMATLABなどの数式処理ソフトウェアを用いて解析されることが多くなってきており，また，大規模な多変量システムモデルの数値解析も必須の素養として定着している。実学とのギャップは増大の一途をたどっており，この現状を打開するために初等的な微分積分や線形代数の知識で読み通せる微分方程式の教科書が欲しいが，適当なものは必ずしも多くない。

この本は1学期間の10コマ程度の講義とそれに付随した10回程度の演習で終了する分量を念頭に，上記のような工学で要請されている基礎知識を与えるよう準備したものである。章末の演習問題は講義と対応した内容であり，解法の考え方や解の導出過程をわかりやすく初等的な方法で詳しく示してある。また，同じ微分方程式の解を異なるいくつかの方法で導出してみせている。これは，解法は唯一でなく，「異なる解法を呈示することは高度な微分方程式の数理，数値解析に関する重要な知見と指針に関する情報を与える」ことを読者に認識してもらうためである。学生諸君は，演習問題を必ず自分で考えて解いてみてから答えを確認していただきたい。

偏微分方程式にも言及したが，空間1次元の問題に限定し，工学で必須の「境界のあるシステム」の解法にもページを割いて説明している。高度で特殊な微分方程式や空間高次元の偏微分方程式などの紹介やその解き方は分量や応用に関する汎用性を配慮して割愛した。主として工学分野で現れる定数係数の微分方程式の解き方や，拡散と波動現象の物理的・数学的背景が身に付くように配慮している。計算を実行し，解法の考え方を確認しながら通読すれば，線

形代数，ラプラス変換，フーリエ変換，数値解析，差分法，微分・差分方程式など，工学の応用解析に必要な基礎知識をこれ1冊で身に付けることができる。また，本格的な微分方程式や確率微分方程式の数値解析などの教科書を読む前に通読すれば，理解の大きな助けとなると信ずる。

2004年8月

金野　秀敏

# 目　　次

## 1. 微分方程式と差分方程式


1.1 ニュートンの方程式 ..... 1
1.2 実在のシステムのモデル化 ..... 2
1.3 差分方程式によるモデル化 ..... 3
1.4 差分方程式の解 ..... 5
1.5 ま と め ..... 6
演 習 問 題 ..... 8


## 2. 定数係数の微分方程式


2.1 1階の微分方程式 ..... 9
2.1.1 斉次微分方程式の解法 ..... 9
2.1.2 非斉次微分方程式の解法 ..... 11
2.2 2階の微分方程式 ..... 12
2.2.1 差分方程式の行列解法 ..... 13
2.2.2 連続変数極限 ..... 16
2.2.3 非斉次方程式の形式解 ..... 17
2.2.4 単振り子の例 ..... 18
2.3 ま と め ..... 21
演 習 問 題 ..... 21


## 3. $N$ 階微分方程式の解法


3.1 3階の微分方程式 ..... 23
3.2 4階の微分方程式 ..... 28
3.3 2質点の連成振動 ..... 30
3.4 $N$ 階の微分方程式 ..... 33
3.5 ま と め ..... 36
演 習 問 題 ..... 39

## 4. 変数係数の微分方程式

4.1 1階の変数係数微分方程式 ..... 40
4.2 2階の変数係数微分方程式 ..... 41
4.3 線形安定性 ..... 44
4.4 まとめ ..... 48
演習問題 ..... 50

## 5. ラプラス変換・フーリエ変換による解法

5.1 ラプラス変換による解法 ..... 51
5.2 フーリエ変換による解法 ..... 56
5.3 まとめと応用例 ..... 58
演習問題 ..... 60

## 6. 境界値問題の解法

6.1 境界値問題 ..... 61
6.2 最も簡単な例題 ..... 62
6.3 糸の変位と梁のたわみ ..... 63
6.4 前節の問題の別解 ..... 65
6.5 まとめと応用例 ..... 66
演習問題 ..... 68

## 7. 偏微分方程式の解法 I

7.1 拡散方程式 I ..... 70
7.2 拡散方程式 II ..... 72
7.3 拡散方程式III ..... 75
7.4 まとめ ..... 77
演習問題 ..... 78

## 8. 偏微分方程式の解法 II

8.1 波動方程式 I ..... 80
8.2 波動方程式 II ..... 83
8.3 波動方程式III ..... 85

*8.4* まとめと応用例 ..... *86*
演 習 問 題 ..... *89*

## *9.* 数値解法の基礎

*9.1* 基本的な差分化法 ..... *91*
*9.2* 高度な差分化法が必要な理由 ..... *93*
*9.3* 生存競争の方程式の差分化 ..... *96*
*9.4* 偏微分方程式の差分化 I ..... *97*
*9.5* 偏微分方程式の差分化 II ..... *100*
*9.6* まとめと応用例 ..... *101*
演 習 問 題 ..... *102*

## *10.* リカッチ方程式の解法

*10.1* リカッチ方程式 ..... *103*
*10.2* リカッチの微分方程式の従属変数変換 ..... *105*
*10.3* 行列リカッチ方程式とその解 ..... *107*
*10.4* 応　用　例 ..... *108*
演 習 問 題 ..... *112*

**付録　便利な公式集** ..... *114*
**引用・参考文献** ..... *130*
**演習問題詳解** ..... *131*
**索　　引** ..... *182*

# 1 微分方程式と差分方程式

## 1.1 ニュートンの方程式

高校物理や大学教養教育では，質点の運動 (投げ上げ，自由落下，天体運動，振り子，ばねにつながれた質点の振動など) が取り上げられることが多い。この理由はそれらがニュートン†の運動方程式（古典力学）

$$m\,(\text{質量}[\mathrm{kg}]) \times a(\text{加速度}[\mathrm{m/s^2}]) = F(\text{力}[\mathrm{N}]) \tag{1.1}$$

でよく記述されることがわかっているからである。加速度は速度の微分，位置の２階微分である。

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \tag{1.2}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{1.3}$$

ニュートンの運動方程式は，実は微分方程式 (differential equation) である。式 (1.1) は普通の微分 (1.2)，(1.3) で表現されているので，**常微分方程式** (ordinary differential equation) と呼ばれている。大学の教養課程では上記の運動の解析のほか，剛体の運動，質点系の運動などの重心の運動として置き換えられ，解析が簡単に可能な事例のみに限定して学習を行っている。

† Isaac Newton：英国の物理学者・数学者・天文学者 (1642-1727)

## 1.2 実在のシステムのモデル化

しかし，自然・人工物，経済社会現象，生命・化学現象の動的な挙動の解析は力学の解析だけで済むような簡単なものではなく，一般に複雑で難しい。複雑で難しい原因は，現象の本質に電磁現象や化学反応ネットワークなどが複雑にからみ合って現れるためであり，また，基礎となる微分方程式がニュートンの運動方程式から導かれるものとは異なり，質点の運動として解析することが困難であることによる。

学生諸君の頭に電極を着けて脳波を測定すると，時間とともに変動する脳波が観測される。脳波は脳内での情報処理に伴う電流が流れることが原因で出現する電磁波であり，基本的には電磁気学で学習するマクスウェル†の方程式から導出される電磁場 $E(x,t)$ に関する波動方程式

$$E_{tt} - v^2 E_{xx} = 0 \tag{1.4}$$

($v$ は電磁波の速度) を用いて解析できる。ただし，変数 $E$ の下付き記号 $_{tt}$ は偏微分

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{1.5}$$

を表す (以下，簡単のためにこの記号を使用する)。

さらに，この脳内に流れる電流の起源をたどっていくと，脳内で起こっている超複雑な分子化学反応ネットワークの存在に行き当たる。超複雑な分子化学反応ネットワークを支えているのは，脳内に複雑に張り巡らされている毛細血管とさまざまな血流の輸送や拡散現象である。すなわち，拡散方程式

$$c_t - Dc_{xx} = 0 \tag{1.6}$$

($D$ は拡散定数) や輸送方程式

$$u_t + uu_x = Ku_{xx} \tag{1.7}$$

† James Clerk Maxwell : 英国の物理学者 (1831～1879)

と呼ばれる**偏微分方程式** (partial differential equation) で表現される現象がシステムの動的挙動を支配している。このような偏微分方程式は，天気予報で雲の動きの予測，煙突から排出される汚染物質の広がりの予測，放射性廃液や廃棄物の地中への浸透の問題の予測や制御などにも利用されている。

式 (1.4)，(1.6)，(1.7) のような偏微分方程式を用いることによって，工学分野に現れる多くの問題について時間，空間変動の詳細な解析をすることが可能になる。式 (1.4)〜(1.7) では簡単のために空間 1 次元としたが，一般には 3 次元空間内の運動になるから式 (1.4)〜(1.7) の空間微分

$$u_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \tag{1.8}$$

は

$$\nabla^2 \vec{u} \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{u} \tag{1.9}$$

などのように 3 次元のラプラシアン $\nabla^2$ に，スカラ $u$ はベクトル $\vec{u}$ に変更する必要がある。

$$\vec{u} = \vec{i} u_1 + \vec{j} u_2 + \vec{k} u_3 \tag{1.10}$$

ここで，$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ はそれぞれ $x$，$y$，$z$ 方向の単位ベクトル，$u_1, u_2, u_3$ は速度の $x$，$y$，$z$ 成分である。

偏微分方程式によるモデル化には解析する対象が複雑な構造をもっている場合や，現象を支配する動的変数の数が増えると，一般に解析が困難になる場合が多い。

## 1.3 差分方程式によるモデル化

このような複雑な現象のモデル化や解析には，計算や解析を容易にするために，主要な動的変数のみに注目し，**差分方程式** (difference equation) に基づいた解析が行われる場合がある。差分方程式の簡単な例をつぎに示す。

$$x(m+1) = f(x(m)) \tag{1.11}$$

ここで，$m$ は整数であり，$f(x)$ は任意の $x$ についての関数である。このような方程式の場合，PC(personal computer) を用いて $x(m)$ の $m$ の増加に伴う変化を計算するのは簡単である。初期値 $x(0)$ を与えると，$x(1)$ が求まり，つぎにこれを式 (*1.11*) に代入すると $x(2)$ が求まる。この操作を繰り返すと $x(m)$ が求まることがわかる。

式 (*1.11*) の $f(x)$ は任意の関数としたが，具体的に

$$f(x) = Ax(1-x) \tag{1.12}$$

と置いてみると，式 (*1.11*) は，人口や生物の増殖の様子が記述可能な方程式として非常に有名なロジスティック (Logistic) 方程式になる。常微分方程式で表したロジスティックモデルは

$$\frac{d}{dt}N(t) = \alpha N(t) - \beta N^2(t) \tag{1.13}$$

と書ける。上記の差分モデル (*1.11*) との対応関係を明確にするために，この常微分方程式を差分化することを考えよう。時間微分の定義は

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} \tag{1.14}$$

であるが，ここでは式 (*1.14*) の微分を無限小の極限をとらないもので近似してみよう。

$$\frac{dN(t)}{dt} \equiv \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} \tag{1.15}$$

このような近似を (単純) 差分近似と呼ぶ。式 (*1.15*) を式 (*1.13*) に代入して $t = m\Delta t$ と置き，$N(t)$ を $N(m)$ と表すことにしてつぎのように書き換える。

$$N(m+1) = (1+\alpha\Delta t)N(m)\left(1 - \frac{\beta\Delta t}{1+\alpha\Delta t}N(m)\right) \tag{1.16}$$

ここで

$$x(m) \equiv \frac{\beta\Delta t}{1+\alpha\Delta t}N(m), \quad A = 1+\alpha\Delta t \tag{1.17}$$

と置けば，式 (*1.16*) は式 (*1.11*) で非線形関数を式 (*1.12*) によって与えたものに一致する。

$$x(m+1) = Ax(m)(1-x(m)) \tag{1.18}$$

微分を差分で置き換えたとき,「もとの常微分方程式の解と差分方程式の解はどの程度の違いがあるのか?」については本章末の演習問題や 9 章などで検討する。

式 (1.12) と類似の上に凸の関数として

$$f(x) = \frac{ax}{1+bx} - cx \tag{1.19}$$

(ただし, $a, b, c$ は正の定数) のようなものも考えられており, 豆類に付くアズキゾウムシやヨツモンマメゾウムシの個体変動がこの関数を使ったモデルで解析されている。

## 1.4 差分方程式の解

式 (1.16) で $\beta = 0$ の場合を考えよう。

$$N(m+1) = (1+\alpha\Delta t)N(m) \tag{1.20}$$

これは単純な漸化式であるから, 次数を下げていけば解がつぎのように求まる。

$$N(m) = (1+\alpha\Delta t)^m N(0) \tag{1.21}$$

$t = m\Delta t$ および指数関数の定義

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{\alpha t}{m}\right)^m = \exp(\alpha t) \tag{1.22}$$

に注意すれば, 式 (1.21) で $\Delta t \to 0$ の極限をとって

$$N(t) = N(0)\exp(\alpha t) \tag{1.23}$$

が得られる。一方, $\beta \neq 0$ の場合には式 (1.16) あるいは式 (1.18) のように変形すれば, 初期値 $N(0)$ から出発して逐次代入により, $N(m)$ の値を数値的に求めることは容易である。

# 索　　引


## 【あ行】

位相平面 *21*
phase plane
一般解 *17*
general solution
一般解の明瞭解 *17*
explicit general solution
インパルス応答 *74*
impulse response
うなり *48*
beat
運動モード *31,32*
mode of motion
$N$ 階の定数係数の微分方程式 *33*
constant-coefficient differential equation of the $N$-th order
エネルギー保存の法則 *19*
energy conservation law
オイラー法 *91*
Euler scheme
オームの法則 *86*
Ohm's law

## 【か行】

解曲線 *96*
curve of solution
改良オイラー法 *92*
improved Euler scheme
カオス *6*
chaos
化学反応の法則 *8*
law of chemical reaction
拡散方程式 *2,69,70*
diffusion equation
確率・統計 *58,59*
probability theory and statistics
重ね合せの原理 *66*
principle of superposition
基本解 *24*
elementary solution
逆フーリエ変換 *58*
inverse Fourier transform
逆ラプラス変換 *52*
inverse Laplace transform
境界値問題 *61*
boundary value problem
行列リカッチ方程式 *107,108*
matrix Riccati equation
グリーン関数 *65*
Green's function
グリーン関数法 *65*
Green's function method
形式解 *14,32,99*
formal solution
ゲージ不変性 *106*
gauge invariance
ゲージ変換 *105*
gauge transform
後退オイラー法 *92*
backward Euler scheme
高調波 *41*
higher harmonics
誤差関数 *74,120*
error function
固有関数 *64,85*
eigenfunction
固有関数展開 *64*
eigenfunction expansion
固有値 *14,15,16*
eigenvalue
固有値行列 *26*
matrix of eigenvalues
固有値方程式 *24*
equation of eigenvalues
固有値問題 *26*
eigenvalue problem
固有ベクトル *16*
eigenvector
コンダクタンス *86*
conductance

## 【さ行】

差分化 *4*
discretization
差分近似 *4*
difference approximation
差分方程式 *3*
difference equation
3重対角行列 *99*
triple diagonal matrix
指数関数の定義 *5,13,16,115*
definition of exponential function
死滅過程 *8*
death process
従属変数変換 *105,107,110*
dependent variable transformation
常微分方程式 *1*
ordinary differential equation
ジョルダンの標準形 *27*
Jordan normal form
シルベスター行列 *24*
Silvester matrix
シルベスターの標準形 *36*
Silvester normal form
ステッター行列 *123,124*
Stetter matrix
ステップ関数 *73*
step function
スペクトル表示 *36,37*
spectral representation
斉次解 *17,55*
homogeneous solution
斉次微分方程式 *11*
homogeneous differential equation
生成過程 *8*
birth process
正則行列 *14*
regular matrix
積分定数 *19*
constant of integration
線形安定 *44*
linear stable
線形不安定 *45*
linear instability

相似変換　14,15,26,27
similarity transformation

【た行】

第1種の境界条件　61
boundary condition of the first kind
第3種の境界条件　61
boundary condition of the third kind
代数方程式　15
algebraic equation
第2種の境界条件　61
boundary condition of the second kind
畳込み積分　17
convolution integral
単純差分近似　4
simple difference approximation
単純差分法　91
simple discretization scheme
単振り子　18
simple pendulum
調和振動子　12,18
harmonic oscillator
定数係数の常微分方程式　9
ordinary differential equation with constant coefficient
定数変化法　11,42
variation of constants
δ関数　64,81,125
delta function
電信方程式　89
telegraph equation
特性方程式　26
characteristic equation
独立な調和振動子　30
independent harmonic oscillator
特　解　17,55
particular solution

【な行】

ナビエ・ストークス方程式　69
Navier-Stokes equation
2重指数関数　41
double exponential function
ニュートンの運動方程式　1
Newton's equation of motion
ニュートンの冷却の法則　8
Newton's law of cooling
粘性抵抗　104
viscous resistance

【は行】

波動方程式　2,69,80
wave equation
パラメータ励振　48
parametric excitation
引込み現象　38,39
phenomenon of entrainment
非斉次微分方程式　11,17
inhomogeneous differential equation
非線形系　43
nonlinear system
評価関数　110
performance function
標準型の微分方程式　23
differential equation in the normal form
標準型の4階微分方程式　28
differential equation of the fourth order in the normal form
ファンデルポール方程式　97
Van der Pol equation
部分分数　10
partial fraction
フーリエ空間　80
Fourier space
フーリエ変換　57
Fourier transform
ベルヌーイの微分方程式　103,104
Bernoulli equation
変数係数系　43
variable coefficient system
変数係数の微分方程式　33,40
differential equation with variable coefficient
変数分離　10
separation of variables
変数分離型　9
variables separable
偏微分方程式　3,69
partial differential equation
放射性元素の崩壊の法則　8
law of radioactive element decay

【ま行】

マクスウェルの方程式　2,68,86
Maxwell's equations
摩擦抵抗　12
frictional resistance
マチウの方程式　41
Mathieu equation
明瞭解　14,16,32
explicit solution

【や行】

輸送方程式　2
transport equation
余誤差関数　73,120
complimentary error function

【ら行】

ラウス・フルビッツの安定性基準　45
Routh-Furwitz's stability criterion
ラプラス空間　51,52,53
Laplace space
ラプラス変換　51
Laplace transform
リカッチの微分方程式　103,104,105
Riccati differential equation
留数定理　52
residue theorem
ロジスティック方程式　4,6,8,10,21,91,96,103,129
Logistic equation
ロトカ・ボルテラ方程式　96
Lotka-Volterra equation
ロンスキアン　57
Wronskian

——著者略歴——

1973年　北海道大学工学部原子工学科卒業
1975年　北海道大学大学院工学研究科修士課程修了
1978年　北海道大学大学院工学研究科博士課程単位取得退学
1980年　工学博士（北海道大学）
1980年　筑波大学助手
1983年　筑波大学講師
1995年　筑波大学助教授
2000年　筑波大学教授
　　現在に至る


**工学のための微分方程式入門**

Introduction to Differential Equations for Students of Engineering

© Hidetoshi Konno 2004


2004年10月8日　初版第1刷発行

検印省略

著　者　金野秀敏（こんのひでとし）
　　つくば市並木2-207-103
発行者　株式会社　コロナ社
　　代表者　牛来辰巳
印刷所　壮光舎印刷株式会社

112-0011　東京都文京区千石4-46-10
**発行所**　株式会社　**コロナ社**
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo　Japan
振替　00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)
ホームページ　http://www.coronasha.co.jp

ISBN 4-339-06075-5　（金）　（製本：グリーン）
Printed in Japan

**無断複写・転載を禁ずる**

落丁・乱丁本はお取替えいたします