

待ち行列理論

工学博士 大石 進一 著

コロナ社

まえがき

本書は、待ち行列理論の基礎的事柄について、丁寧に解説したものである。理工系の学部生(2年生から)を対象とし、線形代数と微積分の初歩的知識のみを前提とした。著者は、待ち行列理論、トラヒック理論の講義をこの10年来行ってきた。この教科書はその経験に基づいて、半期の講義用テキスト(90分の講義12~14回分の分量)としてデザインした。内容は、待ち行列理論の基礎を丁寧に論じることに重点をおき、応用への導入的解説も行った。基礎的な事項の理解を重視して本書を著したので、一つの定理について何種類もの証明が述べられていることがある。これにより、重要な定理や概念をさまざまな角度から掘り下げて理解を深めることができる。

さて、本書の特徴であるが、待ち行列の理論をできるだけ、標本過程に対する直感的な議論から解説した点である。最近の欧米や日本の優れた研究成果にこのような方向性の根拠がある。標本過程は実際に起こる現象の一つの見本であり、それから待ち行列を性格づけるならば、公式や定理の本質を直感的に理解できるからである。

もう一つの本書の特徴は、フリーな数値計算ツールの利用である。現在では、高度な数値計算インタプリタを無料でダウンロードして利用できる。このようなツールを大学の教育・研究に積極的に利用しようというのが著者の願いであるが、本書でも、Scilab と呼ばれる MATLAB クローンの数値計算ツールを利用している。このような数値計算ツールを利用すると、従来の待ち行列理論で必携であった図表を用いることなく、必要な量を簡単に計算することができる。そのために、待ち行列理論で必要となる諸量の計算アルゴリズムに関する議論も少なからず展開されている。

本書による半期(90分で12~14回)の講義を考えると、1回に10ページ前

後の内容を説明する(理解する)が必要になる。本書では、基礎的な事項を丁寧の説明してあるので、この中からさらに基本的な事項を抜き出して講義し、残りは本書に任せるといような使い方ができるものと思われる。特に、基礎的な講座の場合、1章を1回で講義し、2章から7章までの6章分を2回ずつ講義すると13回の講義となる。残りを、トピックスとして学生に読んでもらうことにすれば、本書1冊を、教科書(1章から7章)と副読本(8章から10章)として使うこともできる。

以上のような利用法により、本書が、待ち行列理論の講義展開に役に立つことがあれば著者の望外の幸せである。

なお、本書を著すにあたって、内外の多くの文献のお世話になっている。巻末に参考文献を掲げて、それらの著者に深く謝意を表す。

また、出版に当たり、いろいろお世話いただいた、コロナ社の各位に感謝する。

最後に、本書を父に捧げる。

2003年3月

旧花畑の上に立つ父母の家にて

大石 進一

目 次

1. 確 率

1.1 確 率 空 間	1
1.1.1 標 本 空 間	1
1.1.2 事 象	2
1.1.3 確 率	3
1.1.4 条件付き確率	4
1.2 確 率 分 布	4
1.2.1 確 率 変 数	4
1.2.2 確率分布関数	4
1.2.3 裾野分布	6
1.2.4 期 待 値	6
1.2.5 分 散	7
1.2.6 条件付き期待値	8
1.2.7 独立な確率変数の max と min の分布	8
演 習 問 題	9

2. ポアソン過程

2.1 ポアソン過程	10
2.1.1 ポアソンの定理	13
2.1.2 微分方程式によるポアソン分布の導出	14
2.1.3 関数方程式によるポアソン分布の導出	15
2.1.4 合 流	16
2.1.5 分 流	17
2.2 指 数 分 布	18
2.2.1 指数分布のマルコフ性	20
2.2.2 アーラン分布	21

演習問題	22
3. リトルの公式	
3.1 再生過程	23
3.1.1 点過程と計数過程	23
3.1.2 再生過程	25
3.1.3 再生定理	26
3.1.4 余命の平均	29
3.1.5 再生報酬定理	32
3.2 リトルの公式	33
3.2.1 リトルの公式とその図的な証明	34
3.2.2 $H = \lambda G$	36
3.2.3 $H = \lambda G$ からリトルの公式を導く	38
演習問題	38
4. マルコフ連鎖	
4.1 離散時間型マルコフ連鎖	40
4.1.1 遷移確率	40
4.1.2 マルコフ連鎖のグラフ	42
4.1.3 再帰性	44
4.2 定常分布とその数値計算法	44
4.2.1 待ち行列計算のための数値計算ツール	45
4.2.2 定常分布の数値計算	50
4.3 連続時間マルコフ過程	57
演習問題	61
5. 待ち行列	
5.1 待ち行列システムの定義とケンドールの記法	62
5.1.1 待ち行列システムの表し方	62
5.1.2 ケンドールの記法	64
5.2 PASTA	66
5.2.1 PASTA	66
5.2.2 PASTA の証明	67
5.3 待ち行列の解析に現れる量	68

5.3.1 占有率	68
5.3.2 特性測定	69
演習問題	70

6. M/M/S/S

6.1 M/M/S/S の解析	71
6.1.1 過渡状態を記述する方程式	72
6.1.2 定常状態の分布	73
6.1.3 打ち切られたポアソン分布のグラフ	76
6.2 アーラン B 式	78
6.2.1 アーラン B 式のトラヒック特性	80
6.2.2 負荷曲線	81
6.2.3 利用率	83
6.2.4 サービス時間分布に対する不感性	83
6.3 トラヒック理論への応用	85
演習問題	87

7. M/M/S

7.1 M/M/1	88
7.1.1 M/M/1 の平衡分布	89
7.1.2 M/M/1 の特性	91
7.1.3 平均値解析	92
7.1.4 スループットタイムの分布	93
7.2 M/M/S	94
7.2.1 定常状態での解析	94
7.2.2 アーラン C 式	95
7.2.3 アーラン C 式の特性	96
7.2.4 アーランの遅延システムの解析	97
7.2.5 M/M/S, FCFS の待ち時間分布	98
演習問題	99

8. 出生死滅過程

8.1 出生死滅過程の一般的性質	101
8.1.1 純粹出生過程	101

8.1.2 純粹死滅過程..... 103

8.1.3 出生死滅過程..... 104

8.2 出生死滅過程となる待ち行列..... 106

8.2.1 M/M/1/K..... 107

8.2.2 M/M/1/-/K..... 107

8.2.3 M/M/s/s/n..... 108

演習問題..... 110

9. ポラチェック-ヒンチンの公式

9.1 M/G/1 の平均値解析..... 111

9.2 ポラチェック-ヒンチンの公式の導出..... 112

9.2.1 ポラチェック-ヒンチンの公式の導出 II..... 112

9.2.2 ポラチェック-ヒンチンの公式の導出 III..... 115

演習問題..... 116

10. 待ち行列ネットワーク

10.1 待ち行列ネットワークの理論へ..... 118

10.1.1 Burke の定理..... 118

10.1.2 M/M/1 の 2 段直列接続..... 120

10.1.3 二つの M/M/1 の並列系..... 123

10.2 M/M/1 の開ジャクソン網..... 124

10.2.1 ジャクソンの定理..... 125

10.2.2 ジャクソン網の平均的な振舞い..... 127

10.2.3 最適なサービス時間の割当て..... 129

演習問題..... 130

参考文献..... 131

演習問題の解答..... 132

索引..... 141

1 | 確 率

本章のねらい 待ち行列理論は確率の考え方を使得、システムを有効に利用しようという学問である。例えば、「1日に平均1000人の客が来店する銀行に、最低いくつの窓口を用意すれば客をあまり待たせずに良いサービスを提供できるか」ということを解析するのが待ち行列理論である。確率の概念を使うと、とても役に立つ、面白い理論ができることを皆さんは学習するであろう。本章では、本書全体の準備として確率について学習する。

1.1 確 率 空 間

まず、確率の基礎概念となる確率空間の学習からスタートしよう。

1.1.1 標本空間

サイコロ投げを例にして考える。目が1, 2, 3, 4, 5, 6であるサイコロを投げたとき、目3が出たとする。サイコロ投げを確率現象であると考えたとき、その現れる得る結果である目を標本という。いまの場合、標本は3である。標本が取りうる値の集合を標本空間 (sample space) という。標本空間を記号 Ω で表すと、いまの例では

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \tag{1.1}$$

である。また、電池の寿命であれば、正の実数の集合で表され

$$\Omega = \{ \text{正の実数} \} \tag{1.2}$$

である。

さて、確率は標本空間の部分集合に対して割り当てられる。例えばサイコロ投げの例において、丁を

$$\text{丁} = \{2, 4, 6\} \quad (1.3)$$

と定義する。丁は標本空間 Ω の部分集合である。このとき、丁が出る確率を例えば

$$P(\text{丁}) = \frac{1}{2} \quad (1.4)$$

とする。このように標本空間の部分集合に確率を割り当てることで、確率モデルが定まる。これを抽象化して確率空間という概念が定義される。以下、確率空間について学習しよう。

1.1.2 事 象

まず、事象を定義する。上の例で、丁が出るというような確率的な現象が事象である。数学的には、標本空間 Ω の部分集合が事象である。例えば丁という事象は、式 (1.3) のように、 $\text{丁} = \{2, 4, 6\}$ で表される。確率論では、どのような確率で事象が現れるかはあらかじめ決まっているとして解析を始める。科学や工学では、事象がどのような確率的性質を持つかはきわめて重要な興味の対象であり、モデリングの問題として議論される。ここでは、そのようなモデリングの問題はいったん置いておき数学的な確率の定義に戻ろう。 S を事象の集合とする。 S はつぎの性質を満たしていると仮定する。

($\sigma 1$) Ω 自身は事象である ($\Omega \in S$)

($\sigma 2$) A が事象ならば、その補集合 A^c も事象である ($A \in S \Rightarrow A^c \in S$)

($\sigma 3$) $A_k \in S$, ($k = 1, 2, \dots$) が事象ならば、その和集合も事象である

$$(A_k \in S, (k = 1, 2, \dots)) \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in S$$

Ω が事象となることから、($\sigma 2$) により、空集合 \emptyset も事象となる。また、($\sigma 3$) から、 A, B が事象ならば、 $A \cup B$ も事象となることがわかる。 $A \cup B$ を和事象という。和事象は事象 A または B のいずれかが起きるという事象を表して

いる。この結果と $(\sigma 2)$ より

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in S \quad (1.5)$$

となり、 $A \cap B$ も事象となる。 $A \cap B$ を積事象という。積事象は、事象 A および B が同時に起きるという事象を表している。

1.1.3 確率

こうして、標本空間と事象が定義されたので、事象に確率を割り当てよう。確率 P は事象 (標本空間 Ω の部分集合) の集合である S から実数への関数で、つぎの性質をもつものをいう。

$$(p1) \quad P(A) \geq 0, \quad (\forall A \in S)$$

$$(p2) \quad P(\Omega) = 1$$

$$(p3) \quad A_k \in S (k = 1, 2, \dots), \text{ かつ } A_k \cap A_j = \emptyset (k \neq j \text{ のとき) ならば}$$

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \quad (1.6)$$

こうして、確率論を展開する枠組みがそろった。標本空間 Ω 、事象 (確率が定義される Ω の部分集合) の集合 S 、および事象に確率を割り当てる関数 (これを確率測度という) P の三つ組 (Ω, S, P) を確率空間という。

コーヒーブレイク

電気、電子、情報系の学科では、待ち行列理論ではなくトラヒック理論という言葉で待ち行列理論について講義することが多い。これは、1900年代の初頭、アーランによって、待ち行列理論のほぼ最初の応用として、電話の回線交換網の設計に採り入れられ、それが大成功を収めたからである。待ち行列理論の応用は、このほか、オペレーションズリサーチ、機械修理などと幅広く、情報通信系でもパケット交換では待ち行列理論の用語のほうが多く用いられることもある。待ち行列理論とトラヒック理論が存在することの注意点は、同じ概念に対する用語が異なる場合があることである。しかし、両者の用語はそれぞれに自然で、学習が進むにつれて、違和感なく理解されるので心配しなくてもよい。

1.1.4 条件付き確率

三つ組 (Ω, S, P) を確率空間とする。事象 $A \in S$ の出現確率が零でないとする ($P(A) > 0$)。このとき任意の $B \in S$ に対して

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (1.7)$$

を定義する。これは、 A が起きたという条件下で事象 B が起きる確率であると考えられる。これを、事象 A が起きたときの事象 B の条件付き (出現) 確率という。 $P(B|A)$ は A を固定して S 上の関数とみると、確率測度の性質 (p1) から (p3) を満たしていることがわかる。二つの事象 $A, B \in S$ が

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (1.8)$$

を満たすとき、事象 A と B は独立であると呼ばれる。事象 A と B が独立で $P(A) > 0$ とすると、式 (1.7) から、 $P(B|A) = P(B)$ となる。すなわち、事象 A と B が独立であるときは、事象 A が起きても事象 B の出現確率に影響を与えない。 $P(B) > 0$ のときには逆もいえる。こうして、事象 A と B が独立とは、たがいに出現確率に影響を与えない事象と事象の間の関係であることと理解される。

1.2 確率分布

1.2.1 確率変数

三つ組 (Ω, S, P) を確率空間とする。 X を Ω から実数の集合 (以下、これを R と表す) への関数とする。 X を確率変数という。

1.2.2 確率分布関数

確率変数 X が実数 x 以下の値を取る確率を

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (1.9)$$

と書き、 F を X の確率分布関数または単に分布関数という。 X がものの数や出来事の起きた回数など、 x_1, x_2, \dots というように離散的な値を取るとき、 X を離散的な確率変数であるという。 X が離散的な確率変数であるとき

$$p_j = P(X = x_j) \quad (1.10)$$

とすると

$$F(x) = \sum_{\{j|x_j \leq x\}} p_j \quad (1.11)$$

が成り立つ。 $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ は確率分布と呼ばれる。

X が水の量や粒子の位置など連続的な値を取るとき、 X を連続的な確率変数であるという。 X が連続的な確率変数であるとき

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds \quad (1.12)$$

となる非負関数 f が存在したとき、 f を F の確率密度関数という。式 (1.12) から、分布関数 F が微分可能ならば確率密度関数 f が存在して

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (1.13)$$

となる。

分布関数 $F(x)$ はつぎの性質を満たす。

$$(d1) \quad F(x) \rightarrow 0, \quad (x \rightarrow -\infty)$$

$$(d2) \quad F(x) \text{ は単調非減少で、右連続 (3.1.1 節参照)。}$$

$$(d3) \quad F(x) \rightarrow 1, \quad (x \rightarrow \infty)$$

さらに、 $a < b$ に対して

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \quad (1.14)$$

が成り立つ。 X が連続的で確率密度関数をもつとき、 $B \subset \mathbf{R}$ に対して

$$P(X \in B) = \int_B f(s) ds \quad (1.15)$$

で与えられる。確率変数 Y を

$$Y = g(X) \quad (1.16)$$

とすると、 Y の分布関数 $F_Y(x)$ は

索 引

<p>【あ】</p> <p>ア—ラン 72, 75 —の第一公式 75 —の遅延システムの 解析 97 ア—ラン B 式 78 ア—ラン C 式 95 —の特性 96 ア—ラン分布 21, 75, 93</p> <p>【い】</p> <p>位相 κ のア—ラン分布 21 一時的 44 入り線 85</p> <p>【う】</p> <p>打ち切られたポアソン分布 75 —のグラフ 76</p> <p>【え】</p> <p>エルゴード的 44, 106 —なマルコフ過程 44</p> <p>【か】</p> <p>開ジャクソン網 124 概収束 26 確率 3 確率過程 10 確率空間 3 確率測度 3 確率分布関数 4 確率変数 4 確率密度関数 5 過渡状態を記述する方程式 72 関数方程式によるポアソン 分布の導出 15</p>	<p>【き】</p> <p>幾何分布 8 希少性 11 期待値 6 既約 13 極限分布 51 局所平衡方程式 122</p> <p>【け】</p> <p>計数過程 24 ケンドールの記法 64</p> <p>【こ】</p> <p>呼 85 合成積 6 呼損 85 呼損率 85, 86 呼輻輳 80 コールブロック 71</p> <p>【さ】</p> <p>再帰性 44 再生過程 25 再生定理 26, 28 再生—報酬定理 33 最適なサービス時間の 割当て 129 サービス時間分布に対する不 感性 83 サービスの規範 64 サービス窓口の数 64</p> <p>【し】</p> <p>時間定常性 41 時間輻輳 80 事象 2 指数分布 18 —のマルコフ性 20</p>	<p>システムに来る客の数 64 システムの容量 64 ジャクソン 118 —の定理 118, 125 ジャクソン網 124 —の平均的な振舞い 127 ジャンプ率 58 周期 43 周期的 43 出生死滅過程 104 純粹死滅過程 103 純粹出生過程 101 条件付き確率 4 条件付き期待値 8 初等再生定理 28 処理時間分布モデル 63</p> <p>【す】</p> <p>裾野分布 6 スモールオーダ 11 スループットタイムの分布 93</p> <p>【せ】</p> <p>正再帰的 44 積形解 121 積事象 3 遷移確率 42, 58 遷移確率行列 42 漸化式 78 占有率 68, 69</p> <p>【そ】</p> <p>相互到達可能 43 即時式 66 損失 71 損失確率 71</p>
---	---	---

		ニュートン法	81	補分布	6
		【は】		ボラチェック-ヒンチンの 公式	112, 114, 115
【た】		倍精度浮動小数点数	16	【ま】	
大域平衡方程式	121	反復解法	56	マーク付き点過程	25
大群化効果	83	【ひ】		待ち行列	62
待時式	66	非周期的	43	——の解析	68
大数の強法則	28	左極限	25	待ち行列システム	62
タイムブロック	71	微分方程式によるポアソン 分布の導出	14	マルコフ過程	41
多項分布	17	標準偏差	7	マルコフ性	20
単位分布	22	標本	1	マルコフ連鎖のグラフ	42
		標本空間	1	【み】	
【ち】		【ふ】		右連続性	25
チャップマン-コルモゴロフ の方程式	11, 58	負荷曲線	81	【む】	
超指数分布	22	二つの M/M/1 の並列系	123	無記憶	20
直接解法	52, 54	分散	7	【よ】	
		【へ】		呼び	85
【つ】		平均値	7	余命	29
通過した客の数	80	平均値解析	92	【り】	
		平均値解析法	111	離散時間型マルコフ連鎖	41
【て】		平衡方程式	50	離散的な確率変数	5
定常	41	——の解法	60	リトルの公式	35, 38
定常状態での解析	94	ヘビサイドのステップ関数	18	利用率	69, 83
定常状態の分布	73	変動係数	8	【れ】	
出線	85	【ほ】		零再帰的	44
点過程	23	ポアソン	12	連続時間マルコフ過程	57
		——の定理	13	連続的な確率変数	5
【と】		ポアソン過程	10	【わ】	
到達可能	43	ポアソン分布	11, 75	和事象	2
同値関係	43	——のグラフ	19		
到着時間間隔分布モデル	63	——の合流	16		
特性関数	7	——の分流	17		
特性測度	69				
トラヒック輻輳	81				
トラヒックブロック	71				
トラヒック理論	3				
【に】					
二項分布	12, 13				
Burke の定理	118, 119	Flow-in=Flow-out 方程式	51	LCFS	64
Cox 分布	22		51	LCFS-PR	64
FCFS	64	Flow-out=Flow-in 方程式	74	LU 分解	54
Flow-in=Flow-out の関係	104	$H = \lambda G$	36, 38	MATLAB	45
				M/G/1	111

M/G/1/1	84	M/M/S, FCFS の待ち	ROP	66
M/G/s	65	時間分布	RR	64
M/G/s/∞/∞/FCFS	65	M/M/s/∞/∞/FCFS	Scilab	45
M/M/1	88	M/M/s(<i>n</i>)	——の基本機能	46
——の2段直列接続	120	M/M/S/S	——のホームページ	46
——の特性	91	——の解析	——を使ったグラフの	
——の平衡分布	89	M/M/s/s	書き方	48
M/M/1/K	107	M/M/s/s/n	SEPT	64
M/M/1/-/K	107	M/M/s/s+n	SERPT	64
M/M/∞/-/K	110	Palm	SPT	64
M/M/S	94	PASTA	SRPT	64
M/M/s	65	——の証明	T _E X文書	49
M/M/s(0)	65	PS	time blocking	110

— 著 者 略 歴 —

- 1976年 早稲田大学理工学部電子通信学科卒業
1981年 早稲田大学大学院博士後期課程修了（電子通信学専攻）
工学博士（早稲田大学）
1984年 早稲田大学助教授
1989年 早稲田大学教授
現在に至る

待ち行列理論

Queueing Theory

© Shin'ichi Oishi 2003

2003年5月12日 初版第1刷発行

2013年6月25日 初版第4刷発行

検印省略

著 者 おお しい しん いち
大 石 進 一
発 行 者 株式会社 コロナ社
代 表 者 牛来真也
印 刷 所 壮光舎印刷株式会社

112-0011 東京都文京区千石4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)

ホームページ <http://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-06073-7 (大井) (製本：グリーン)

Printed in Japan



本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられております。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めておりません。

落丁・乱丁本はお取替えいたします