待ち行列理論

工学博士　大石　進一　著

コロナ社

まえがき

本書は，待ち行列理論の基礎的事柄について，丁寧に解説したものである。理工系の学部生 (2 年生から) を対象とし，線形代数と微積分の初歩的知識のみを前提とした。著者は，待ち行列理論，トラヒック理論の講義をこの 10 年来行ってきた。この教科書はその経験に基づいて，半期の講義用テキスト (90 分の講義 12～14 回分の分量) としてデザインした。内容は，待ち行列理論の基礎を丁寧に論じることに重点をおき，応用への導入的解説も行った。基礎的な事項の理解を重視して本書を著したので，一つの定理について何種類もの証明が述べられていることがある。これにより，重要な定理や概念をさまざまな角度から掘り下げて理解を深めることができる。

さて，本書の特徴であるが，待ち行列の理論をできるだけ，標本過程に対する直感的な議論から解説した点である。最近の欧米や日本の優れた研究成果にこのような方向性の根拠がある。標本過程は実際に起こる現象の一つの見本であり，それから待ち行列を性格づけるならば，公式や定理の本質を直感的に理解できるからある。

もう一つの本書の特徴は，フリーな数値計算ツールの利用である。現在では，高度な数値計算インタプリタを無料でダウンロードして利用できる。このようなツールを大学の教育・研究に積極的に利用しようというのが著者の願いであるが，本書でも，Scilab と呼ばれる MATLAB クローンの数値計算ツールを利用している。このような数値計算ツールを利用すると，従来の待ち行列理論で必携であった図表を用いることなく，必要な量を簡単に計算することができる。そのために，待ち行列理論で必要となる諸量の計算アルゴリズムに関する議論も少なからず展開されている。

本書による半期 (90 分で 12～14 回) の講義を考えると，1 回に 10 ページ前

後の内容を説明する (理解する) ことが必要になる。本書では，基礎的な事項を丁寧に説明してあるので，この中からさらに基本的な事項を抜き出して講義し，残りは本書に任せるというような使い方ができるものと思われる。特に，基礎的な講座の場合，1 章を 1 回で講義し，2 章から 7 章までの 6 章分を 2 回ずつ講義すると 13 回の講義となる。残りを，トピックスとして学生に読んでもらうことにすれば，本書 1 冊を，教科書 (1 章から 7 章) と副読本 (8 章から 10 章) として使うこともできる。

以上のような利用法により，本書が，待ち行列理論の講義展開に役に立つことがあれば著者の望外の幸せである。

なお，本書を著すにあたって，内外の多くの文献のお世話になっている。巻末に参考文献を掲げて，それらの著者に深く謝意を表する。

また，出版に当たり，いろいろお世話いただいた，コロナ社の各位に感謝する。

最後に，本書を父に捧げる。

2003 年 3 月

旧花畑の上に立つ父母の家にて

大石　進一

本書に記載された会社名，商品名，製品名は一般に各社の登録商標，商標または商品名です。なお，本文中では，TM，©，®マークは省略しています。

目　　次

1. 確　　率

2. ポアソン過程

3. リトルの公式

4. マルコフ連鎖

5. 待 ち 行 列

6. M/M/S/S

7. M/M/S

8. 出生死滅過程

9. ポラチェック–ヒンチンの公式

10. 待ち行列ネットワーク

1 確　　率

本章のねらい　待ち行列理論は確率の考え方を使って，システムを有効に利用しようという学問である。例えば,「1日に平均1000人の客が来店する銀行に，最低いくつの窓口を用意すれば客をあまり待たせずに良いサービスを提供できるか」ということを解析するのが待ち行列理論である。確率の概念を使うと，とても役に立つ，面白い理論ができることを皆さんは学習するであろう。本章では，本書全体の準備として確率について学習する。

1.1 確 率 空 間

まず，確率の基礎概念となる確率空間の学習からスタートしよう。

1.1.1 標本空間

サイコロ投げを例にして考える。目が1, 2, 3, 4, 5, 6であるサイコロを投げたとき，目3が出たとする。サイコロ投げを確率現象であると考えたとき，その現れる得る結果である目を標本という。いまの場合，標本は3である。標本が取りうる値の集合を標本空間 (sample space) という。標本空間を記号Ωで表すと，いまの例では

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \tag{1.1}$$

である。また，電池の寿命であれば，正の実数の集合で表され

$$\Omega = \{\text{ 正の実数 }\} \tag{1.2}$$

である。

さて，確率は標本空間の部分集合に対して割り当てられる。例えばサイコロ投げの例において，丁を

$$丁 = \{2, 4, 6\} \tag{1.3}$$

と定義する。丁は標本空間 Ω の部分集合である。このとき，丁が出る確率を例えば

$$P(丁) = \frac{1}{2} \tag{1.4}$$

とする。このように標本空間の部分集合に確率を割り当てることで，確率モデルが定まる。これを抽象化して確率空間という概念が定義される。以下，確率空間について学習しよう。

1.1.2　事　　　象

まず，事象を定義する。上の例で，丁が出るというような確率的な現象が事象である。数学的には，標本空間 Ω の部分集合が事象である。例えば丁という事象は，式 (1.3) のように，丁 $= \{2, 4, 6\}$ で表される。確率論では，どのような確率で事象が現れるかはあらかじめ決まっているとして解析を始める。科学や工学では，事象がどのような確率的性質を持つかはきわめて重要な興味の対象であり，モデリングの問題として議論される。ここでは，そのようなモデリングの問題はいったん置いておき数学的な確率の定義に戻ろう。S を事象の集合とする。S はつぎの性質を満たしていると仮定する。

(σ1)　Ω 自身は事象である ($\Omega \in S$)

(σ2)　A が事象ならば，その補集合 A^c も事象である ($A \in S \Rightarrow A^c \in S$)

(σ3)　$A_k \in S$, $(k = 1, 2, \cdots)$ が事象ならば，その和集合も事象である ($A_k \in S$, $(k = 1, 2, \cdots) \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in S$)

Ω が事象となることから，(σ2) により，空集合 $\emptyset$ も事象となる。また，(σ3) から，A, B が事象ならば，$A \bigcup B$ も事象となることがわかる。$A \bigcup B$ を和事象という。和事象は事象 A または B のいずれかが起きるという事象を表して

いる。この結果と $(\sigma 2)$ より

$$A \bigcap B = (A^c \bigcup B^c)^c \in S \tag{1.5}$$

となり，$A \bigcap B$ も事象となる。$A \bigcap B$ を積事象という。積事象は，事象 A および B が同時に起きるという事象を表している。

1.1.3 確　率

こうして，標本空間と事象が定義されたので，事象に確率を割り当てよう。確率 P は事象 (標本空間 Ω の部分集合) の集合である S から実数への関数で，つぎの性質をもつものをいう。

(p1) $P(A) \geqq 0, \quad (\forall A \in S)$

(p2) $P(\Omega) = 1$

(p3) $A_k \in S(k = 1, 2, \cdots)$，かつ $A_k \cap A_j = \emptyset$ $(k \neq j$ のとき$)$ ならば

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \tag{1.6}$$

こうして，確率論を展開する枠組みがそろった。標本空間 Ω，事象 (確率が定義される Ω の部分集合) の集合 S，および事象に確率を割り当てる関数 (これを確率測度という)P の三つ組 (Ω, S, P) を確率空間という。

コーヒーブレイク

電気，電子，情報系の学科では，待ち行列理論ではなくトラヒック理論という言葉で待ち行列理論について講義することが多い。これは，1900 年代の初頭，アーランによって，待ち行列理論のほぼ最初の応用として，電話の回線交換網の設計に採り入れられ，それが大成功を収めたからである。待ち行列理論の応用は，このほか，オペレーションズリサーチ，機械修理などと幅広く，情報通信系でもパケット交換では待ち行列理論の用語のほうが多く用いられることもある。待ち行列理論とトラヒック理論が存在することの注意点は，同じ概念に対する用語が異なる場合があることである。しかし，両者の用語はそれぞれに自然で，学習が進むにつれて，違和感なく理解されるので心配しなくてもよい。

1.1.4　条件付き確率

三つ組 (Ω, S, P) を確率空間とする。事象 $A \in S$ の出現確率が零でないとする $(P(A) > 0)$。このとき任意の $B \in S$ に対して

$$P(B|A) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(A)} \tag{1.7}$$

を定義する。これは，A が起きたという条件下で事象 B が起きる確率であると考えられる。これを，事象 A が起きたときの事象 B の条件付き (出現) 確率という。$P(B|A)$ は A を固定して S 上の関数とみると，確率測度の性質 (p1) から (p3) を満たしていることがわかる。二つの事象 $A, B \in S$ が

$$P(A \bigcap B) = P(A)\,P(B) \tag{1.8}$$

を満たすとき，事象 A と B は独立であると呼ばれる。事象 A と B が独立で $P(A) > 0$ とすると，式 (1.7) から，$P(B|A) = P(B)$ となる。すなわち，事象 A と B が独立であるときは，事象 A が起きても事象 B の出現確率に影響を与えない。$P(B) > 0$ のときには逆もいえる。こうして，事象 A と B が独立とは，たがいに出現確率に影響を与えない事象と事象の間の関係であることと理解される。

1.2　確　率　分　布

1.2.1　確 率 変 数

三つ組 (Ω, S, P) を確率空間とする。X を Ω から実数の集合 (以下，これを $\boldsymbol{R}$ と表す) への関数とする。X を確率変数という。

1.2.2　確率分布関数

確率変数 X が実数 x 以下の値を取る確率を

$$F(x) = P(X \leq x) \tag{1.9}$$

と書き，F を X の確率分布関数または単に分布関数という。X がものの数や出来事の起きた回数など，$x_1, x_2, \cdots$ というように離散的な値を取るとき，X を離散的な確率変数であるという。X が離散的な確率変数であるとき

$$p_j = P(X = x_j) \tag{1.10}$$

とすると

$$F(x) = \sum_{\{j|x_j \leqq x\}} p_j \tag{1.11}$$

が成り立つ。$\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ は確率分布と呼ばれる。

X が水の量や粒子の位置など連続的な値を取るとき，X を連続的な確率変数であるという。X が連続的な確率変数であるとき

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds \tag{1.12}$$

となる非負な関数 f が存在したとき，f を F の確率密度関数という。式 (*1.12*) から，分布関数 F が微分可能ならば確率密度関数 f が存在して

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \tag{1.13}$$

となる。

分布関数 $F(x)$ はつぎの性質を満たす。

(d1) $F(x) \to 0, \quad (x \to -\infty)$

(d2) $F(x)$ は単調非減少で，右連続（*3.1.1* 節参照）。

(d3) $F(x) \to 1, \quad (x \to \infty)$

さらに，$a < b$ に対して

$$P(a < X \leqq b) = F(b) - F(a) \tag{1.14}$$

が成り立つ。X が連続的で確率密度関数をもつとき，$B \subset \boldsymbol{R}$ に対して

$$P(X \in B) = \int_B f(s)\,ds \tag{1.15}$$

で与えられる。確率変数 Y を

$$Y = g(X) \tag{1.16}$$

とすると，Y の分布関数 $F_Y(x)$ は

索　　引

―― 著 者 略 歴 ――

1976 年　早稲田大学理工学部電子通信学科卒業
1981 年　早稲田大学大学院博士後期課程修了（電子通信学専攻）
　　　　工学博士（早稲田大学）
1984 年　早稲田大学助教授
1989 年　早稲田大学教授
　　　　現在に至る

待ち行列理論
Queueing Theory

© Shin'ichi Oishi 2003

2003 年 5 月 12 日　初版第 1 刷発行
2013 年 6 月 25 日　初版第 4 刷発行

検印省略

著　者　大石進一
発 行 者　株式会社　コロナ社
　　　　代表者　牛来真也
印 刷 所　壮光舎印刷株式会社

112-0011　東京都文京区千石 4-46-10
発行所　株式会社　**コ　ロ　ナ　社**
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo　Japan
振替 00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)
ホームページ　http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978-4-339-06073-7　（大井）　（製本：グリーン）
Printed in Japan

本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられております。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めておりません。

落丁・乱丁本はお取替えいたします