ま え が き

本書は，一般逆行列の理論とその構造工学への応用についてできるだけ平易に解説したものです。一般逆行列は，その有用性の割には，なぜかあまり広く知られていません。そこで本書はなるべく多くの人に一般逆行列の有用性に触れてもらうために，わかりやすいテキストを目指してまとめました。

行列に対する一般化逆演算子は E.H. Moore が最初に定義したといわれています。Moore はすべての行列に唯一に存在する逆演算子を定義し，これを generalized reciprocal（一般化逆元）と呼んでいました。Moore の初期の文献は 1920 年の講演アブストラクトだけだったので，この業績はあまり知られませんでした。その後，1951 年に A. Bjerhammar が一般逆行列の工学的な性質に着目して最小二乗法などの解法に応用した過程で Moore の業績が発見されました。続いて，1955 年に R. Penrose が一般逆行列の定義として四つの式を提示しました。Penrose の論文は特によく整理されていたため，Moore と Penrose の業績にちなんで，この一般逆行列を Moore–Penrose 一般逆行列と呼ぶようになりました。日本でも 1960 年代には数学系の読み物などに紹介されるようになりました。応用に関しては Bjerhammar が測量学の専門家であったため，測量学や統計学などの多変量解析の分野では一般逆行列が活発に応用されています。ところが，計算機と行列演算の導入によって発展してきた構造工学分野への応用はなぜか世界的にも遅れていました。これについては 1982 年に半谷裕彦（はんがいやすひこ）先生が発表した論文がごく初期のものとして知られています[†1]。その後 1985 年に半谷研究室に加わった私も半谷先生と一緒に一般逆行列の構造工学への応用について研究し，1991 年に二人で一緒に日本語の本を書きました[†2]。この本は，売行きはよかったのですが，現在は品切れ絶版になっています。

本書を含む5巻からなるコロナ社の計算工学シリーズは，故・半谷裕彦先生が日本計算工学会の黎明期から学会設立期まで先頭を切って運営されていた研究グループの総まとめとして構想されました。この研究会には半谷先生の暖かい人柄に惹かれて多くの若手研究者が集まりました。半谷先生が56歳にして急逝してしまわれた後も，研究グループのメンバーで出版企画を進め，全5巻の出版にこぎつけることができました。

このシリーズ第1巻である本書は，前述の本の続編として，私から生前の半谷先生に提案したものです。しかし，内容の相談すらしないうちに半谷先生は彼岸の人となり，私一人で稿をおこすことになりました。新しい内容を入れて書きましたが，できばえに関しては読者と雲の上の半谷先生の寛容を願うばかりです。

本書の出版をもって本シリーズは全巻完了します。最後に，本シリーズの執筆に協力をいただき，本書の刊行を温かく見守っていただいた日本計算工学会第1研究分科会「形態非線形問題の調査・研究」の元メンバー各位，また，練習問題や例題などを手伝ってくれた東京大学川口研究室の学生諸君，そして，本シリーズのよき理解者として，発刊まで辛抱強く支えていただいたコロナ社の各位に深く感謝します。

2011年8月　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　川口　健一

---

†1　Y. Hangai："Application of the Generalized Inverse to the Geometrically Nonlinear Problem"，Solid Mechanics Archives，vol.6，No.1（1981. 3）.

†2　半谷裕彦，川口健一："形態解析——一般逆行列とその応用—"，培風館（1991）.

半谷　裕彦（はんがい　やすひこ）（1942-1998）
東京大学生産技術研究所教授。東京大学大学院建築学専攻で建築構造の教鞭をとる。一般逆行列の構造工学への導入や，建築構造物の形態創生分野の開拓を行った。

Hastings Eliakim Moore（1862-1932）
Yale大学を卒業後，Northwestern大とChicago大で教鞭をとる。米国数学学会設立（1888）の功労者で1898～1900年副会長，1901～1902年会長

Arne Bjerhammar（ビヤハマー）（1917-）
スウェーデンの測地学者。測量学への行列理論の応用，地理測地学の分野での業績が多い。スウェーデン王立工科大で教鞭をとる。

Roger Penrose（1931-）
非周期タイル（ペンローズタイル）の提案や宇宙物理の理論などでも知られるイギリスの数学者。一般逆行列は23歳のときの論文。

目　　　　次

1. 不 定 と 不 能

2. 最小二乗解・ノルム最小解・一般逆行列

3. 線形写像と一般逆行列

4. 特異値分解と一般逆行列

5.　一般逆行列の数値解析法

6.　線形構造解析への直接導入

7.　伸びなし変位を生じる問題への応用

8.　一般化ニュートン・ラプソン法

9.　応力法への応用

10.　最適化問題への応用

付　　　　録

1 不定と不能

高校の数学で習ったように，正方行列の逆行列を求めるには，まず，行列式の値が零でないことを調べる必要がある。行列式が零の場合とそうでない場合，いったいなにが違うのだろうか。行列には，長方形の行列もあるが，長方行列には逆行列はあるのだろうか。本章では，これらについて例題を通して解説し，行列の世界を一挙に広げていく。

1.1 正方行列の場合

つぎの連立1次方程式を解いてみよう。

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

しばらく両辺を眺め，比べたりしていると，そのうち

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

が**解**（solution）だとわかる。行同士を足し引きして解を知ることもできるが，もう少し確実にやるなら，**逆行列**（inverse）を使う方法がある。逆行列を求めるには，まず係数行列の**行列式**（determinant）D を

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad \left(行列\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}に対する公式\right) \tag{1.3}$$

から求めて，$D = -2\ (\neq 0)$ を確認し，これを使ってさらに逆行列を

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

の公式に従って求める。この場合の逆行列は，つぎのようになる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

これを式 (1.1) の両辺に左から掛けて

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

と計算すれば，解が得られる[†]。

逆行列は元の係数行列について唯一に決まるので，右辺の列ベクトルの値に関係なしに使うことができる。任意の

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

の形をした式の両辺に左からこの逆行列を掛ければ

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

と解 $[x, y]$ を得ることができる。

式 (1.7) の左辺の係数行列を $\boldsymbol{A}$，未知ベクトルを $\boldsymbol{x}$，右辺のベクトルを $\boldsymbol{y}$ とおけば，式 (1.7) は

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \tag{1.9}$$

と書ける。$\boldsymbol{A}$ の逆行列を $\boldsymbol{A}^{-1}$ と書けば，$\boldsymbol{A}^{-1}$ が存在するときは式 (1.9) はつねに

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y} \tag{1.10}$$

と解くことができる。右辺のベクトル $\boldsymbol{y}$ は何であっても構わない。例えば式 (1.7) の右辺 $[a, b]$ に $[5, 6]$ を代入すれば簡単に解 $[-1, 2]$ が得られるし，右辺に $[3, 6]$ がきて

† ベクトルと行列，行列式と逆行列については付録 A.1，A.2 を参照。

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

となっても，同様に両辺に逆行列を掛けて

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

という解が簡単に得られる（行列式と逆行列の求め方については付録 A.2 参照）。

式 (1.7) の右辺 $[a, b]$ に零ベクトル $[0, 0]$ を代入したものを**斉次方程式**（または**同次方程式**，homogeneous equation）というが，逆行列が求められる場合 $(D \neq 0)$ の斉次方程式の解は，左から逆行列を掛ければ，明らかに零ベクトル $[0, 0]$ であり，それ以外にない。

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} && (\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{o}) \\ &\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} && (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}) \end{aligned} \tag{1.13}$$

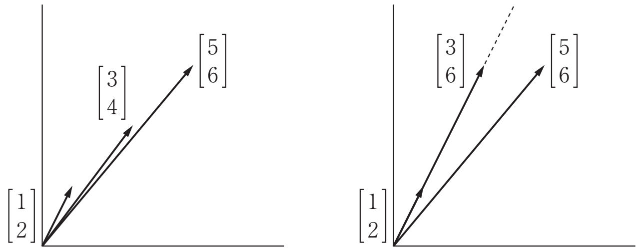
こんどはつぎの連立方程式を考えて見よう。

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

じっと見ていても解が見当たらないので行列式 D を計算してみると，$D = 0$ であることがわかる。「$D = 0$ のときは，逆行列が存在しない。」と高校の数学で習った。もう少しよく見てみよう。上式は

$$x\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

という意味だ。ところが，最初の列ベクトル $[1, 2]$ とつぎの列ベクトル $[3, 6]$ は大きさは 3 倍になっているけれど，実は同じ列ベクトル $[1, 2]$ の実数倍である。つまり，左辺には実質的に一つの方向のベクトルしかなく，右辺にはこれと方向の違うベクトル $[5, 6]$ があるので，いくら左辺のベクトルを足し引きしても右辺のベクトルにはならない（**図 1.1**（b））。このような場合を**不能**



（a） ベクトル [1, 2] と [3, 4]（ランク 2 の行列）　（b） ベクトル [1, 2] と [3, 6]（ランク 1 の行列）

図 1.1　係数行列のベクトルとランク

(inconsistent）という。

では，右辺の列ベクトルを [3, 6] に変えてみよう。

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix} \tag{1.16}$$

こんどは，列ベクトル [3, 6] は係数行列の第 2 列目そのものだから

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \tag{1.17}$$

という解があることがわかる。つまり，$D=0$ でも解があることがわかる。ところが，容易に気づくように，この他にも

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2/3\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2\\1/3\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}6\\-1\end{bmatrix},\ \frac{3}{10}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},\ \cdots \tag{1.18}$$

などが解となる。つまり，解が唯一に決まらず，複数存在するのである。このような場合を**不定**（indefinite）という。なぜ解が唯一に決まらないのだろうか。それは $D=0$ のときは，逆行列が存在しない，つまり，斉次方程式が式(1.13)のように解けない，すなわち

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \tag{1.19}$$

に零ベクトル $[x, y]=[0, 0]$ 以外の解が存在する，からである。式 (1.18) は，ベクトル $[x, y]$ と係数ベクトルのすべての行ベクトルとの内積が零になる（直

交する）という意味もあるから

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

の任意の実数倍がすべて斉次方程式の解となることがわかる。このように，ある行列に掛けて零ベクトルになるようなベクトルの集まりを，その行列の**零空間**（null space）と呼ぶ。零空間ベクトルはその行列のすべての行ベクトルと直交しているのである。

結局，式 (1.16) の解は次式の第 1 式を満たすベクトルと第 2 式を満たすベクトルの和であればすべて解になることがわかる。

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

したがって，式 (1.16) の**一般解**（general solution）は，例えば

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

や

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{3}{10}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

という形に書ける。右辺の第 1 項は式 (1.16) を満たす解であれば何でもよい。この部分を**特解**あるいは**特殊解**（particular solution）と呼ぶ。第 2 項の列ベクトル [3, − 1] は斉次方程式の解，すなわち零空間ベクトルである。この部分を**余解**（complementary solution）と呼ぶ。α は任意の実数であり，零空間ベクトル [3, − 1] は，特解に何倍して加えても，解としての資格に影響しない。式 (1.22) と式 (1.23) はどちらも元の式の一般解を表しているので，両式の差をとってみると余解分しか違わないことがわかる。すなわち，両式は実は同じ解を表しているのである。第 1 項（特解）が第 2 項（余解）の成分を含まないように（直交するように）選ぶこともできる。実は式 (1.23) のほうはそのよ

うに選んである。

上記の例のように，行列式が $D=0$ となって逆行列が存在しないようなとき，その行列は**非正則**（non-regular）あるいは**特異**（singular）であるという。$D \neq 0$ で逆行列が存在する場合には，右辺のベクトルに関係なく連立方程式を解くことができたが，係数行列が非正則の場合，式 (1.14) と式 (1.16) のように右辺の列ベクトルによって連立方程式が不能になる場合と不定になる場合がある。

上の例では $D=0$ となる場合 2×2 の係数行列に実質的に一つのベクトルしかなかった。一般に $n \times n$ の行列の中の n 個のベクトルがすべて線形独立な場合は $D \neq 0$ で逆行列が存在し，一つでも線形従属なベクトルがある場合には $D=0$ で逆行列は存在しなくなる。与えられた行列の中にいくつの線形独立なベクトルがあるかという数をその行列の**階数**あるいは**ランク**（rank）という。階数は行列の行ベクトルで考えても列ベクトルで考えても変わらない†。

1.2　長方行列の場合

では，つぎの 3×2 の長方行列の場合について考えてみよう。

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \tag{1.24}$$

長方行列には行列式 D の定義や逆行列の定義もない。お手上げかと思ってしばらく眺めていると，どうやら

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{1.25}$$

が解になっていることに気がつく。式 (1.24) は

† **線形独立**（linearly independent）と**線形従属**（linearly dependent）については付録 A.1 参照。

索　　引

―― 著 者 略 歴 ――

1985 年　早稲田大学理工学部建築学科卒業
1991 年　東京大学大学院博士課程修了（建築学専攻）
　　　　　工学博士
1991 年　東京大学生産技術研究所助手
1991 年　東京大学生産技術研究所講師
1993 年　英国インペリアルカレッジ，英国ケンブリッジ大学客員博士
1995 年　東京大学生産技術研究所助教授
2006 年　東京大学生産技術研究所教授
　　　　　現在に至る

一般逆行列と構造工学への応用
Generalized Inverse and Its Applications
to Structural Engineering

2011 年 10 月 28 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略

著　　者	川　口　健　一（かわ ぐち けん いち）
発 行 者	株式会社　コ ロ ナ 社
	代 表 者　牛 来 真 也
印 刷 所	新日本印刷株式会社

112-0011　東京都文京区千石 4-46-10
発行所　株式会社　**コ　ロ　ナ　社**
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo　Japan
振替 00140-8-14844・電話（03）3941-3131（代）
ホームページ　http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978-4-339-05701-0　　（金）　　（製本：愛千製本所）
Printed in Japan