

## まえがき

本書は、一般逆行列の理論とその構造工学への応用についてできるだけ平易に解説したものです。一般逆行列は、その有用性の割には、なぜかあまり広く知られていません。そこで本書はなるべく多くの人に一般逆行列の有用性に触れてもらうために、わかりやすいテキストを目指してまとめました。

行列に対する一般化逆演算子は E.H. Moore が最初に定義したといわれています。Moore はすべての行列に唯一に存在する逆演算子を定義し、これを generalized reciprocal (一般化逆元) と呼んでいました。Moore の初期の文献は 1920 年の講演アブストラクトだけだったので、この業績はあまり知られませんでした。その後、1951 年に A. Bjerhammar が一般逆行列の工学的な性質に着目して最小二乗法などの解法に応用した過程で Moore の業績が発見されました。続いて、1955 年に R. Penrose が一般逆行列の定義として四つの式を提示しました。Penrose の論文は特によく整理されていたため、Moore と Penrose の業績にちなんで、この一般逆行列を Moore-Penrose 一般逆行列と呼ぶようになりました。日本でも 1960 年代には数学系の読み物などに紹介されるようになりました。応用に関しては Bjerhammar が測量学の専門家であったため、測量学や統計学などの多変量解析の分野では一般逆行列が活発に応用されています。ところが、計算機と行列演算の導入によって発展してきた構造工学分野への応用はなぜか世界的にも遅れていました。これについては 1982 年に半谷裕彦 (はんがいうすひこ) 先生が発表した論文がごく初期のものとして知られています<sup>†1</sup>。その後 1985 年に半谷研究室に加わった私も半谷先生と一緒に一般逆行列の構造工学への応用について研究し、1991 年に二人で一緒に日本語の本を書きました<sup>†2</sup>。この本は、売行きはよかったです。現在は品切れ絶版になっています。

本書を含む5巻からなるコロナ社の計算工学シリーズは、故・半谷裕彦先生が日本計算工学会の黎明期から学会設立期まで先頭を切って運営されていた研究グループの総まとめとして構想されました。この研究会には半谷先生の暖かい人柄に惹かれて多くの若手研究者が集まりました。半谷先生が56歳にして急逝してしまわれた後も、研究グループのメンバーで出版企画を進め、全5巻の出版にこぎつけることができました。

このシリーズ第1巻である本書は、前述の本の続編として、私から生前の半谷先生に提案したものです。しかし、内容の相談すらしないうちに半谷先生は彼岸の人となり、私一人で稿をおこすことになりました。新しい内容を入れて書きましたが、できればえに関しては読者と雲の上の半谷先生の寛容を願うばかりです。

本書の出版をもって本シリーズは全巻完了します。最後に、本シリーズの執筆に協力をいただき、本書の刊行を温かく見守っていただいた日本計算工学会第1研究分科会「形態非線形問題の調査・研究」の元メンバー各位、また、練習問題や例題などを手伝ってくれた東京大学川口研究室の学生諸君、そして、本シリーズのよき理解者として、発刊まで辛抱強く支えていただいたコロナ社の各位に深く感謝します。

2011年8月

川口 健一

---

<sup>†1</sup> Y. Hangai : "Application of the Generalized Inverse to the Geometrically Nonlinear Problem", Solid Mechanics Archives, vol.6, No.1 (1981.3).

<sup>†2</sup> 半谷裕彦, 川口健一: "形態解析—一般逆行列とその応用—", 培風館 (1991).

半谷 裕彦 (はながい やすひこ) (1942-1998)

東京大学生産技術研究所教授。東京大学大学院建築学専攻で建築構造の教鞭をとる。一般逆行列の構造工学への導入や、建築構造物の形態創生分野の開拓を行った。

Hastings Eliakim Moore (1862-1932)

Yale 大学を卒業後、Northwestern 大と Chicago 大で教鞭をとる。米国数学学会設立 (1888) の功労者で 1898 ~ 1900 年副会長, 1901 ~ 1902 年会長

Arne Bjerhammar (ビヤハマー) (1917-)

スウェーデンの測地学者。測量学への行列理論の応用、地理測地学の分野での業績が多い。スウェーデン王立工科大で教鞭をとる。

Roger Penrose (1931-)

非周期タイル (ペンローズタイル) の提案や宇宙物理の理論などでも知られるイギリスの数学者。一般逆行列は 23 歳のときの論文。

# 目 次

## 1. 不定と不能

1.1 正方行列の場合	1
1.2 長方形行列の場合	6
1.3 一般の場合	11
1.4 フルランクの場合	13

## 2. 最小二乗解・ノルム最小解・一般逆行列

2.1 フルランクの横長行列の場合	18
2.2 フルランクの縦長行列の場合	20
2.3 階数分解	22
2.4 一般逆行列	23
2.5 解の存在条件と一般解	26
2.6 一般逆行列の定義	29

## 3. 線形写像と一般逆行列

3.1 行列と線形空間	33
3.2 行列と線形写像	35
3.3 逆写像 $X$	39
3.4 一般逆行列と線形写像	45
3.5 一般逆行列の数学的性質	46

## 4. 特異値分解と一般逆行列

4.1 特異値分解	48
-----------	----

4.2	特異値分解の幾何学的意味	51
4.3	正規直交基底による成分表示	53
4.4	スペクトル分解	54
4.5	特異値分解とベクトルの成分表示	57
4.6	特異値とベクトルのノルム	58
4.7	特異値分解と線形方程式の解	59

## 5. 一般逆行列の数値解析法

5.1	階数分解による方法	63
5.1.1	前進消去を用いたLU分解による方法	64
5.1.2	ハウスホルダー法を用いたQR分解による方法	66
5.1.3	グラム・シュミット直交化法を用いたQR分解による方法	66
5.2	特異値分解による方法	68
5.2.1	特異値分解法を用いる方法	68
5.2.2	固有値分解法を用いる方法	69
5.3	繰返し計算による方法	70
5.3.1	ペンローズの方法	70
5.3.2	ベン・イスラエルの収束計算法	72
5.4	その他の方法	72
5.4.1	グレヴィーユの方法	72
5.4.2	近似計算法	73
5.4.3	誤差なし計算法	74
5.5	フルランクの場合	77
5.6	ベクトルの一般逆行列	77

## 6. 線形構造解析への直接導入

6.1	線形解析への直接導入	79
6.2	境界条件が不足している場合	83
6.3	伸びなし変位の生じない形態不安定構造	88

6.4	解の存在条件によるチェック	91
-----	---------------	----

## 7. 伸びなし変位を生じる問題への応用

7.1	零空間の導入	98
7.2	伸びなし変位の追跡	104
7.3	幾何学的非線形解析への応用	109
7.4	幾何学的伸び変形の解消	112

## 8. 一般化ニュートン・ラプソン法

8.1	ニュートン・ラプソン法	121
8.2	一般化ニュートン・ラプソン法	123

## 9. 応力法への応用

9.1	応力法の概要	130
9.2	変位と応力増分を指定する線形逆解析	135
9.3	ひずみエネルギー	137

## 10. 最適化問題への応用

10.1	最急降下法	151
10.2	付帯条件付最適化問題	157

## 付 録

A.1	ベクトルと行列	164
A.1.1	ベクトル	164
A.1.2	行列	164
A.1.3	行列およびベクトルの演算	166
A.1.4	線形独立と線形従属	166
A.2	行列式と逆行列	166

A.2.1	行 列 式	166
A.2.2	2 次の正方行列	167
A.2.3	3 次の正方行列	167
A.2.4	行列式の基本性質	168
A.2.5	余 因 子	168
A.2.6	逆 行 列	169
A.2.7	消去法による逆行列の求め方	170
A.2.8	基 本 操 作	170
A.2.9	消去法による正則行列の逆行列の求め方	170
A.2.10	階 数 分 解	172
A.3	ノ ル ム	174
A.4	線形空間と線形写像	176
A.4.1	線 形 空 間	176
A.4.2	線 形 写 像	177
A.5	固有値分解	178
A.5.1	実対称行列の固有値分解	178
A.5.2	一般の行列の固有値分解	181
A.6	射 影 行 列	181
A.7	数 値 計 算 補 遺	184
A.7.1	ハウスホルダー変換	184
A.7.2	ヤコビ法とギブンス変換	186
A.7.3	中国人剰余定理	187
A.8	トラスのマトリクス解法	188
A.8.1	釣 合 式	188
A.8.2	伸び変位関係式	188
A.8.3	伸び軸力関係式	189
A.8.4	部材剛性マトリクス	189
A.9	例 6.3 の詳細	190
A.10	トラスの非線形解析の接線剛性行列	193
	<b>引用・参考文献</b>	195
	<b>問 の 解 答 例</b>	200
	<b>索 引</b>	212

# 1 不定と不能

高校の数学で習ったように、正方行列の逆行列を求めるには、まず、行列式の値が零でないことを調べる必要がある。行列式が零の場合とそうでない場合、いったいなにが違うのだろうか。行列には、長方形の行列もあるが、長方形行列には逆行列はあるのだろうか。本章では、これらについて例題を通して解説し、行列の世界を一挙に広げていく。

## 1.1 正方行列の場合

つぎの連立1次方程式を解いてみよう。

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

しばらく両辺を眺め、比べたりしていると、そのうち

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

が解 (solution) だとわかる。行同士を足し引きして解を知ることできるが、もう少し確実にやるなら、**逆行列** (inverse) を使う方法がある。逆行列を求めるには、まず係数行列の**行列式** (determinant)  $D$  を

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (\text{行列} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{に対する公式}) \quad (1.3)$$

から求めて、 $D = -2 (\neq 0)$  を確認し、これを使ってさらに逆行列を

2 1. 不定と不能

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

の公式に従って求める。この場合の逆行列は、つぎのようになる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

これを式 (1.1) の両辺に左から掛けて

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

と計算すれば、解が得られる<sup>†</sup>。

逆行列は元の係数行列について唯一に決まるので、右辺の列ベクトルの値に関係なしに使うことができる。任意の

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

の形をした式の両辺に左からこの逆行列を掛ければ

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

と解  $[x, y]$  を得ることができる。

式 (1.7) の左辺の係数行列を  $\mathbf{A}$ 、未知ベクトルを  $\mathbf{x}$ 、右辺のベクトルを  $\mathbf{y}$  とおけば、式 (1.7) は

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad (1.9)$$

と書ける。 $\mathbf{A}$  の逆行列を  $\mathbf{A}^{-1}$  と書けば、 $\mathbf{A}^{-1}$  が存在するときは式 (1.9) はつねに

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} \quad (1.10)$$

と解くことができる。右辺のベクトル  $\mathbf{y}$  は何であっても構わない。例えば式 (1.7) の右辺  $[a, b]$  に  $[5, 6]$  を代入すれば簡単に解  $[-1, 2]$  が得られるし、右辺に  $[3, 6]$  がきて

<sup>†</sup> ベクトルと行列、行列式と逆行列については付録 A.1, A.2 を参照。



$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

となっても、同様に両辺に逆行列を掛けて

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

という解が簡単に得られる（行列式と逆行列の求め方については付録 A.2 参照）。

式 (1.7) の右辺  $[a, b]$  に零ベクトル  $[0, 0]$  を代入したものを**斉次方程式**（または**同次方程式**, homogeneous equation）というが、逆行列が求められる場合 ( $D \neq 0$ ) の斉次方程式の解は、左から逆行列を掛ければ、明らかに零ベクトル  $[0, 0]$  であり、それ以外にない。

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{Ax} = \mathbf{o}) \quad (1.13)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{o} = \mathbf{o})$$

こんどはつぎの連立方程式を考えて見よう。

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

じっと見ても解が見当たらないので行列式  $D$  を計算してみると、 $D = 0$  であることがわかる。「 $D = 0$  のときは、逆行列が存在しない。」と高校の数学で習った。もう少しよく見てみよう。上式は

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

という意味だ。ところが、最初の列ベクトル  $[1, 2]$  とつぎの列ベクトル  $[3, 6]$  は大きさは3倍になっているけれど、実は同じ列ベクトル  $[1, 2]$  の実数倍である。つまり、左辺には実質的に一つの方向のベクトルしかなく、右辺にはこれと方向の違うベクトル  $[5, 6]$  があるので、いくら左辺のベクトルを足し引きしても右辺のベクトルにはならない（図 1.1 (b)）。このような場合を**不能**

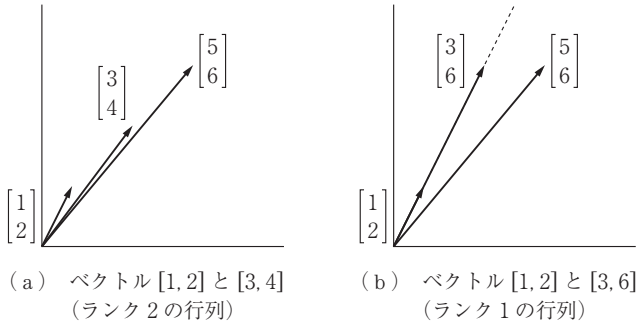


図 1.1 係数行列のベクトルとランク

(inconsistent) という。

では、右辺の列ベクトルを  $[3, 6]$  に変えてみよう。

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

こんどは、列ベクトル  $[3, 6]$  は係数行列の第 2 列目そのものだから

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

という解があることがわかる。つまり、 $D = 0$  でも解があることがわかる。ところが、容易に気づくように、この他にも

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{3}{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \dots \quad (1.18)$$

などが解となる。つまり、解が唯一に決まらず、複数存在するのである。このような場合を**不定** (indefinite) という。なぜ解が唯一に決まらないのだろうか。それは  $D = 0$  のときは、逆行列が存在しない、つまり、斉次方程式が式 (1.13) のように解けない、すなわち

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

に零ベクトル  $[x, y] = [0, 0]$  以外の解が存在する、からである。式 (1.18) は、ベクトル  $[x, y]$  と係数ベクトルのすべての行ベクトルとの内積が零になる (直

交する) という意味もあるから

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

の任意の実数倍がすべて斉次方程式の解となることがわかる。このように、ある行列に掛けて零ベクトルになるようなベクトルの集まりを、その行列の**零空間** (null space) と呼ぶ。零空間ベクトルはその行列のすべての行ベクトルと直交しているのである。

結局、式 (1.16) の解は次式の第 1 式を満たすベクトルと第 2 式を満たすベクトルの和であればすべて解になることがわかる。

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

したがって、式 (1.16) の**一般解** (general solution) は、例えば

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

や

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{3}{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

という形に書ける。右辺の第 1 項は式 (1.16) を満たす解であれば何でもよい。この部分を**特解**あるいは**特殊解** (particular solution) と呼ぶ。第 2 項の列ベクトル  $[3, -1]$  は斉次方程式の解、すなわち零空間ベクトルである。この部分を**余解** (complementary solution) と呼ぶ。 $\alpha$  は任意の実数であり、零空間ベクトル  $[3, -1]$  は、特解に何倍して加えても、解としての資格に影響しない。式 (1.22) と式 (1.23) はどちらも元の式の一般解を表しているので、両式の差をとってみると余解分しか変わらないことがわかる。すなわち、両式は実は同じ解を表しているのである。第 1 項 (特解) が第 2 項 (余解) の成分を含まないように (直交するように) 選ぶこともできる。実は式 (1.23) のほうはそのよ

うに選んである。

上記の例のように、行列式が  $D = 0$  となって逆行列が存在しないようなとき、その行列は**非正則** (non-regular) あるいは**特異** (singular) であるという。 $D \neq 0$  で逆行列が存在する場合には、右辺のベクトルに関係なく連立方程式を解くことができたが、係数行列が非正則の場合、式 (1.14) と式 (1.16) のように右辺の列ベクトルによって連立方程式が不能になる場合と不定になる場合がある。

上の例では  $D = 0$  となる場合  $2 \times 2$  の係数行列に実質的に一つのベクトルしかなかった。一般に  $n \times n$  の行列の中の  $n$  個のベクトルがすべて線形独立な場合は  $D \neq 0$  で逆行列が存在し、一つでも線形従属なベクトルがある場合には  $D = 0$  で逆行列は存在しなくなる。与えられた行列の中にいくつの線形独立なベクトルがあるかという数をその行列の**階数**あるいは**ランク** (rank) という。階数は行列の行ベクトルで考えても列ベクトルで考えても変わらない<sup>†</sup>。

## 1.2 長方形列の場合

では、つぎの  $3 \times 2$  の長方形列の場合について考えてみよう。

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

長方形列には行列式  $D$  の定義や逆行列の定義もない。お手上げかと思っればらく眺めていると、どうやら

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

が解になっていることに気がつく。式 (1.24) は

<sup>†</sup> **線形独立** (linearly independent) と **線形従属** (linearly dependent) については付録 A.1 参照。

# 索 引

<b>【あ】</b>	ギブンス変換	186	コンプリメンタリー	
アイソパラメトリック膜	基本操作	170	エネルギー	133
要素	逆行列	1, 14, 169	<b>【さ】</b>	
悪条件	逆写像	39, 178	最急降下法	151, 152, 153
<b>【い】</b>	鏡映変換	66	最小二乗解	20
一般解	鏡映変換行列	185	最大勾配方向	151
一般化逆元	境界条件	190	最適化問題	151
一般化最急降下法	行フルランク	13	最適傾斜法	152
一般化ニュートン・ラブ	行ベクトル	164	残差ノルム	22
ソン法	行列	164	残差ベクトル	20, 122
一般逆行列	行列式	1, 166	<b>【し】</b>	
	極小曲面問題	153	軸力	188
<b>【う】</b>	<b>【く】</b>		次元	164
上台形行列	空気膜構造	116	自己釣合力	131
上への写像	グラム・シュミット直交		自己釣合力モード	131
	化法	66	下台形行列	174
<b>【お】</b>	<b>【け】</b>		射影行列	181
応力法	形態不安定	126	写像	177
	形態不安定構造	88	修正ニュートン・ラブ	
<b>【か】</b>	懸垂線	158	ソン法	123
解	<b>【こ】</b>		主応力	181
階数	交換法則	166	主応力方向	181
階数分解	更新型ラグランジュ法	111	準静的	82
解の存在条件	更新ラグランジュ型	193	準静的な	109
外力ベクトル	剛性行列	79	小行列式	168
仮想仕事の原理	剛体変位	81	条件数	59
片側応力	恒等写像	178	初期応力	131
カテナイド	勾配	151	初期軸力	194
<b>【き】</b>	固有値	179, 186	<b>【す】</b>	
幾何学的非線形問題	固有値分解	180	スペクトル分解	55
幾何剛性行列	固有ベクトル	179, 186		
擬逆行列				

**【せ】**

正規化 175  
 正規直交化 131  
 正規直交基底 18, 183  
 斉次方程式 3, 13  
 正射影行列 42, 182  
 正則 12, 13  
 静的解析 82  
 成分 164  
 正方行列 11, 165  
 接線剛性行列 110, 194  
 節点変位 188  
 切頭四面体 127  
 切頭四面体テンセグリティ 127  
 線形空間 176  
 線形結合 164  
 線形写像 34, 178  
 線形従属 6, 164, 166  
 線形独立 6, 164, 166  
 線形部分空間 176  
 線形変換 33  
 全射 177  
 全体剛性行列 81  
 全体剛性マトリクス 190  
 全単射 178

**【そ】**

相似変換 186  
 増分型解法 193

**【た】**

対角化 180  
 対角行列 165  
 対角要素 165  
 退化次数 13  
 対称行列 165  
 縦長行列 12  
 単位行列 165, 169  
 単射 178  
 弾性剛性行列 111, 194  
 弾性変形 93

弾性変形を伴う変位 93  
 弾性変形を伴わない変位 93

**【ち】**

値域 177  
 チェビシェフノルム 176  
 中国人剰余定理 76, 187  
 長方形列 11, 165  
 張力安定トラス 143  
 直和 176  
 直和分解 176  
 直交直和分解 35, 176  
 直交補空間 34, 176

**【つ】**

釣合行列 131

**【て】**

定義域 177  
 定値写像 178  
 適合部材長変化 136  
 テンセグリティ 148  
 テンセグリティ構造 118, 126  
 テンソル積 55, 183  
 転置 7, 12, 165

**【と】**

同次方程式 3, 13  
 等張力曲面 156  
 動的解析 82  
 特異 6  
 特異値 49  
 特異値分解 48  
 特殊解 5  
 特解 5, 27, 131  
 トラス 188  
 トレース 165

**【に】**

二次形式 178  
 ニュートン・ラブソン法 121

**【の】**

伸びなし変位 88  
 伸びなし変位空間 93  
 伸び変位行列 132  
 伸び変位空間 93  
 伸び変形 93  
 ノルム 174  
 ——の公準 175  
 ノルム最小解 19

**【は】**

ハウスホルダー変換 66  
 ハウスホルダー変換行列 185  
 反傾原理 132, 189  
 反対称行列 165  
 反力 158

**【ひ】**

微小変位 109  
 非正則 6  
 非線形連立方程式 121  
 非特異 13

**【ふ】**

部材剛性マトリクス 189  
 部材の伸び 188  
 付帯条件 160  
 付帯条件付きの最適化問題 157  
 フックの法則 189  
 不定 4, 12  
 不適合な部材長変化 136  
 不能 3, 12  
 部分空間 34  
 プラトー 154  
 プラトー問題 154  
 フルランク 11, 13  
 プレストレス 131  
 フロベニウスノルム 176

<b>【へ】</b>		<b>【み】</b>		要素	164
べき等	47, 181	未知反力	190	余解	5, 27, 131
ベクトル	164			横長行列	12
ベクトル空間	176	<b>【む】</b>		<b>【ら】</b>	
変位法	79, 130	ムーア・ペンローズ一般		ランク	6, 12
変分法	153	逆行列	25	<b>【り】</b>	
<b>【ほ】</b>		<b>【や】</b>		良条件	59
法	187	ヤコビ法	186	<b>【れ】</b>	
補エネルギー	133	<b>【ゆ】</b>		零行列	165
補空間	34, 176, 182	有限変位	109	零空間	5, 13
<b>【ま】</b>		有限要素法	80	零空間ベクトル	13
膜構造	145	ユークリッドノルム	175	零ベクトル	164
マトリクス	164	ユニタリ行列	180, 186	レイリー商	58, 179
マトリクス解法	188	<b>【よ】</b>		列	164
マンハッタンノルム	175	余因子	169	列フルランク	13
		余因子行列	169	列ベクトル	164
				連立多法剰余式	187

<b>【Q】</b>		<b>【数字】</b>	
QR 分解	66, 185	1 対 1 写像	178
		1 対 1 対応	38

— 著者略歴 —

1985年 早稲田大学工学部建築学科卒業  
1991年 東京大学大学院博士課程修了（建築学専攻）  
工学博士  
1991年 東京大学生産技術研究所助手  
1991年 東京大学生産技術研究所講師  
1993年 英国インペリアルカレッジ，英国ケンブリッジ大学客員博士  
1995年 東京大学生産技術研究所助教授  
2006年 東京大学生産技術研究所教授  
現在に至る

一般逆行列と構造工学への応用

Generalized Inverse and Its Applications  
to Structural Engineering

© Ken'ichi Kawaguchi 2011

2011年10月28日 初版第1刷発行



検印省略

著者 かわぐちけんいち  
川口健一  
発行者 株式会社 コロナ社  
代表者 牛来真也  
印刷所 新日本印刷株式会社

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844・電話 (03) 3941-3131 (代)

ホームページ <http://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-05701-0

(金)

(製本：愛千製本所)

Printed in Japan



本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられております。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めておりません。

落丁・乱丁本はお取替えいたします