



# 構造力学演習

野村 卓史  
長谷部 寛  
共著



コロナ社

# まえがき

## 【演習書の役割と必要性】

構造力学（応用力学）の学習は、講義を聴くだけでは不十分で、学生が自ら演習問題を解くことが不可欠である。学生は演習問題を解くことによって初めて、講義で聴いた理論や例題の解き方の要点を理解し、また理解不十分だったところを認識し補うことができる。

実際、日本の多くの大学・高等専門学校の土木工学課程において、構造力学（応用力学）の授業は講義と演習とで構成されている。筆者らが勤務する日本大学理工学部土木工学科の学部専門課程でも講義と演習が併設され、現在の時間割では、午前中に聴いた講義の内容に関する演習問題をその日の午後の演習時間に解くように時間割を組んでいる。また数年前から、演習時間の冒頭に穴埋め問題形式の「小テスト」を短時間（10～15分）実施し、午前の講義で聴いた内容の要点を学生が自ら確認してから演習問題に着手する、という流れにして学習効果を向上させることに成功している。

従来の演習の授業では、演習問題をプリントで配布し、学生が解答を提出した後に詳細な解答例を紙あるいはウェブで配布する、という方式が多い。しかし、この方式では演習の授業に対する予習が十分にできない。

演習問題を豊富に揃えた演習書があれば、演習の授業に対する予習を的確かつ効率よく行うことができ、講義を聴講するときに要点をより明確に把握することができる。

また、教育課程によっては必ずしも演習の時間を十分とれないことがある。大学院入試や公務員試験の受験対策には、教科書よりも、焦点を絞った実践的な演習書のほうが有効である。

アクティブラーニングや反転授業など、学生の自主性を重んじ、それにより

より高い学習効果を得る流れもますます盛んになってきている現在、構造力学の演習書の役割と必要性はたいへん高いといえる。

### 【本演習書の利用の仕方】

本書の内容は、土木工学の専門課程で最初に学ぶ構造力学（応用力学）を対象としている。静定ばり，トラス，ラーメン，アーチから簡単な不静定構造を解けるところまでを扱っており，セメスター2学期分程度の分量を想定している。

#### 《本書の構成》

- 章：1つあるいは複数のテーマで構成
- 各テーマ：理論や定理の説明（例題を含む）と演習問題で構成
  - ・理論や定理の説明：演習問題を解くために直接必要となる式やその使い方に焦点を当てた簡潔な記述
  - ・演習問題：3つの形式の演習問題で構成し，章末に解答例を掲載

#### 《演習問題の構成と特色》

- 穴埋め形式の問題：理論や定理，あるいは解き方のポイントがわかるように，要所を「穴埋め」する方式の問題
- 詳しい解答例付きの問題：解き方の流れ，注意点などがわかるような解説付きの問題
- 解答のみ付いた問題：学生が自ら解いて実力をつける問題

#### 《理論や定理の説明について》

- 本書の内容と構成は，拙著『土木・環境系コアテキストシリーズ B-1：構造力学』（2011年，コロナ社刊）に準拠している。理論や定理の詳しい説明はそちらを参照していただきたい。『構造力学』に含まれていない一部のテーマについては，本書の付録に解説を加えた。

『構造力学』で理論を学び，本書『構造力学演習』で具体的な問題の解き方を理解しスキルを磨く。そのうえで再度『構造力学』を読むと理解がより深く広くなる。2つの本を相互に活用して真の実力をつけていただきたい。

2020年3月

野村 卓史，長谷部 寛

# 目 次

## 1. 静 定 ば り

|                           |    |
|---------------------------|----|
| 1.1 はりの支点反力と断面力           | 1  |
| 1.1.1 力のつり合い              | 1  |
| 1.1.2 荷重と支点反力             | 1  |
| 1.1.3 静定構造と不静定構造          | 2  |
| 1.1.4 はり                  | 3  |
| 1.1.5 はりの断面力              | 3  |
| 1.1.6 支点反力と断面力の求め方        | 4  |
| 1.1.7 演習問題                | 7  |
| 1.2 片持ちばり，集中モーメント，および分布荷重 | 11 |
| 1.2.1 片持ちばり               | 11 |
| 1.2.2 集中モーメント             | 12 |
| 1.2.3 分布荷重                | 12 |
| 1.2.4 演習問題                | 14 |
| 1.3 ゲルバーばりと間接荷重           | 18 |
| 1.3.1 ゲルバーばり              | 18 |
| 1.3.2 間接荷重                | 19 |
| 1.3.3 演習問題                | 20 |
| 1章の演習問題解答例                | 23 |

## 2. 応力とひずみ

|                       |    |
|-----------------------|----|
| 2.1 直応力と直ひずみ          | 33 |
| 2.1.1 直 応 力           | 33 |
| 2.1.2 直 ひ ず み         | 34 |
| 2.1.3 ポアソン効果          | 34 |
| 2.1.4 応力とひずみの関係       | 35 |
| 2.1.5 演 習 問 題         | 36 |
| 2.2 せん断応力とせん断ひずみ      | 37 |
| 2.2.1 せん断応力           | 37 |
| 2.2.2 せん断ひずみ          | 38 |
| 2.2.3 せん断応力とせん断ひずみの関係 | 38 |
| 2.2.4 組 合 せ 応 力       | 39 |
| 2.2.5 平 面 応 力         | 39 |
| 2.2.6 演 習 問 題         | 40 |
| 2章の演習問題解答例            | 41 |

## 3. 断面の諸量

|                        |    |
|------------------------|----|
| 3.1 はりの断面の諸量           | 43 |
| 3.1.1 はりの断面形の特徴を表す諸量   | 43 |
| 3.1.2 断面1次モーメントと図心     | 44 |
| 3.1.3 断面2次モーメント        | 45 |
| 3.1.4 基本的な図形を組み合わせた断面形 | 46 |
| 3.1.5 演 習 問 題          | 47 |
| 3章の演習問題解答例             | 50 |

## 4. はりの応力

|                     |    |
|---------------------|----|
| 4.1 曲げによる直応力        | 52 |
| 4.1.1 曲げによるひずみの分布   | 52 |
| 4.1.2 曲げによる直応力の分布   | 53 |
| 4.1.3 縁応力と断面係数      | 54 |
| 4.1.4 演習問題          | 55 |
| 4.2 曲げによるせん断応力      | 57 |
| 4.2.1 曲げによるせん断応力分布  | 57 |
| 4.2.2 長方形断面のせん断応力分布 | 58 |
| 4.2.3 演習問題          | 59 |
| 4章の演習問題解答例          | 61 |

## 5. はりのたわみ

|                         |    |
|-------------------------|----|
| 5.1 曲げモーメントとたわみの関係      | 64 |
| 5.1.1 はりのたわみに関する仮定と変形   | 64 |
| 5.1.2 たわみと曲げモーメントの微分方程式 | 66 |
| 5.1.3 微分方程式の境界条件        | 66 |
| 5.1.4 微分方程式の解           | 67 |
| 5.2 ゲルバーばりのたわみ          | 67 |
| 5.2.1 ゲルバーばりの境界条件       | 67 |
| 5.2.2 演習問題              | 68 |
| 5章の演習問題解答例              | 71 |

## 6. 影響線とその応用

|                        |    |
|------------------------|----|
| 6.1 影 響 線 .....        | 75 |
| 6.1.1 単純ばりの影響線 .....   | 75 |
| 6.1.2 片持ちばりの影響線 .....  | 77 |
| 6.2 最大曲げモーメント .....    | 78 |
| 6.2.1 移動荷重が1つの場合 ..... | 78 |
| 6.2.2 連行荷重の場合 .....    | 78 |
| 6.2.3 演 習 問 題 .....    | 79 |
| 6章の演習問題解答例 .....       | 81 |

## 7. トラス，ラーメン，およびアーチ

|                                 |    |
|---------------------------------|----|
| 7.1 ト ラ ス .....                 | 85 |
| 7.1.1 トラス構造の特徴 .....            | 85 |
| 7.1.2 静定トラスの部材の軸力の求め方：節点法 ..... | 85 |
| 7.1.3 静定トラスの部材の軸力の求め方：断面法 ..... | 87 |
| 7.1.4 トラスの静定・不静定の判別 .....       | 88 |
| 7.1.5 演 習 問 題 .....             | 88 |
| 7.2 ラ ー メ ン .....               | 92 |
| 7.2.1 ラーメン構造の特徴 .....           | 92 |
| 7.2.2 静定ラーメンの断面力の求め方 .....      | 93 |
| 7.2.3 ラーメンの静定・不静定の判別 .....      | 94 |
| 7.2.4 演 習 問 題 .....             | 96 |
| 7.3 ア ー チ .....                 | 99 |
| 7.3.1 アーチ構造の特徴 .....            | 99 |

|                     |     |
|---------------------|-----|
| 7.3.2 静定アーチの断面力の求め方 | 99  |
| 7.3.3 演習問題          | 101 |
| 7章の演習問題解答例          | 104 |

## 8. エネルギー原理による構造物の変位の求め方

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| 8.1 エネルギー原理                     | 110 |
| 8.1.1 仕事とひずみエネルギー               | 110 |
| 8.1.2 相反定理                      | 113 |
| 8.1.3 演習問題                      | 115 |
| 8.2 カスティリアノの定理                  | 116 |
| 8.2.1 カスティリアノの定理によるトラスの変位の計算    | 117 |
| 8.2.2 曲げを受ける部材の変形への適用           | 119 |
| 8.2.3 カスティリアノの定理によるはりの変位の計算     | 121 |
| 8.2.4 演習問題                      | 122 |
| 8.3 仮想仕事の原理                     | 125 |
| 8.3.1 仮想仕事の原理によるトラスの変位の計算       | 125 |
| 8.3.2 仮想仕事の原理によるはりおよびラーメンの変位の計算 | 126 |
| 8.3.3 温度変化などによるトラスの変形           | 128 |
| 8.3.4 演習問題                      | 130 |
| 8章の演習問題解答例                      | 133 |

## 9. 不静定構造の解法

|                       |     |
|-----------------------|-----|
| 9.1 静定基本系による解き方       | 136 |
| 9.1.1 外的不静定構造と内的不静定構造 | 136 |
| 9.1.2 静定基本系           | 136 |



|       |                            |     |
|-------|----------------------------|-----|
| 9.1.3 | カスティリアノの定理を用いた外的不静定構造の解き方  | 136 |
| 9.1.4 | カスティリアノの定理を用いた外的不静定トラスの解き方 | 137 |
| 9.1.5 | 演習問題                       | 139 |
| 9.1.6 | 仮想仕事の原理を用いた外的不静定構造の解き方     | 141 |
| 9.1.7 | 仮想仕事の原理を用いた外的不静定トラスの解き方    | 142 |
| 9.1.8 | 高次の不静定構造                   | 143 |
| 9.1.9 | 演習問題                       | 145 |
| 9.2   | 内的不静定構造の解き方                | 148 |
| 9.2.1 | 最小仕事の原理                    | 148 |
| 9.2.2 | 最小仕事の原理を用いた内的不静定トラスの解き方    | 148 |
| 9.2.3 | 内的不静定構造の例                  | 150 |
| 9.2.4 | 演習問題                       | 151 |
| 9章    | の演習問題解答例                   | 153 |

## 10. ミューラー–ブレスロウの定理による影響線の求め方

|        |                   |     |
|--------|-------------------|-----|
| 10.1   | ミューラー–ブレスロウの定理    | 162 |
| 10.1.1 | ミューラー–ブレスロウの定理の要点 | 162 |
| 10.1.2 | 単純ばりの影響線への適用      | 163 |
| 10.1.3 | 片持ちばりの影響線への適用     | 165 |
| 10.1.4 | ゲルバーばりの影響線への適用    | 166 |
| 10.1.5 | 演習問題              | 168 |
| 10章    | の演習問題解答例          | 169 |

## 11. 柱

|      |       |     |
|------|-------|-----|
| 11.1 | 長柱の座屈 | 172 |
|------|-------|-----|

|        |                  |     |
|--------|------------------|-----|
| 11.1.1 | 軸圧縮力を受ける両端回転支持の柱 | 172 |
| 11.1.2 | 支持条件による座屈荷重の違い   | 174 |
| 11.1.3 | 強 軸 と 弱 軸        | 174 |
| 11.1.4 | 演 習 問 題          | 175 |
| 11.2   | 短柱と断面の核          | 177 |
| 11.2.1 | 偏心圧縮荷重による応力      | 177 |
| 11.2.2 | 断 面 の 核          | 178 |
| 11.2.3 | 演 習 問 題          | 179 |
| 11 章   | の演習問題解答例         | 181 |

## 付 録

### A. 連行荷重による最大曲げモーメントの求め方の根拠

|       |                            |     |
|-------|----------------------------|-----|
| A.1   | 影響線による最大曲げモーメントの検討         | 183 |
| A.1.1 | 連行荷重に関する設定                 | 183 |
| A.1.2 | 連行荷重の移動による断面 C の曲げモーメントの変化 | 184 |
| A.1.3 | 最大曲げモーメント                  | 184 |

### B. ミューラー－ブレスロウの定理の証明

|       |                        |     |
|-------|------------------------|-----|
| B.1   | 仮想仕事の原理とミューラー－ブレスロウの定理 | 186 |
| B.1.1 | 定理の証明：支点反力 $R_A$ の影響線  | 186 |
| B.1.2 | 仮想仕事の原理に関する補足          | 187 |
| B.1.3 | 定理の証明：断面力の影響線          | 187 |

## C. 長柱の座屈理論（長柱の座屈荷重）

|                 |     |
|-----------------|-----|
| C.1 微分方程式の解     | 190 |
| C.2 他の支持条件の座屈荷重 | 191 |

### 土木・環境系コアテキストシリーズ：B-1

#### 『構造力学』の章立て

1. 力のつり合い
2. 静定はり
3. 応力とひずみ
4. 断面の諸量
5. はりの応力とたわみ
6. トラスとラーメン
7. エネルギー原理
8. 不静定構造の解法

# 1 | 静定ばり

## 1.1 はりの支点反力と断面力

### 1.1.1 力のつり合い

つり合い状態：複数の力が物体に作用しているながら力の作用が互いに打ち消し合って物体が静止しているとき、作用している力は「つり合い状態」にあるという。

力のつり合い条件：つり合い状態にある力が満足しなければならない条件のこと。力およびモーメントの作用を鉛直平面内に限定する場合、力がつり合うためには、つぎの3つの式で表される条件を同時に満足する必要がある。

$$[\text{水平方向の力のつり合い}] \quad \sum_i F_i^x = 0 \quad (1.1)$$

$$[\text{鉛直方向の力のつり合い}] \quad \sum_i F_i^y = 0 \quad (1.2)$$

$$[\text{モーメントのつり合い}] \quad \sum_i M_i = 0 \quad (1.3)$$

ここで、 $F_i^x, F_i^y$  は力  $i$  の水平成分および鉛直成分、 $M_i$  はモーメントである。

### 1.1.2 荷重と支点反力

荷重：橋や建物などの構造物は、上にものを載せ、これを支えることを主たる役割としている。載せたものの重さや構造物自体の重さが構造物に作用する主要な力であり、これを「荷重」という。荷重には地震や風によって水平方

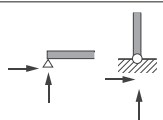
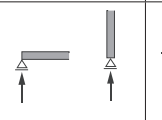
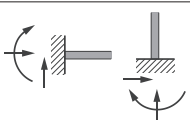
## 2 1. 静 定 ば り

向に作用するものもある。荷重は大きさや作用方向がわかっている力である。

**反 力**：構造物は地盤や他の構造物に支えられて静止している。支えるために生じる力を「反力」という。反力は、荷重の作用を打ち消して構造物に作用する力をつり合い状態にする力であるが、その大きさや作用方向はあらかじめ与えられない。

**支点反力**：「支点」は、構造物を支える地盤や構造物を力学モデルとして単純化したものである。構造物を支える基本的な3種類の支点とその機能を表1.1にまとめる。

表 1.1 基本的な3種類の支点とその機能

| 名 称    | 単純支持<br>ヒンジ支持   | ローラー支持  | 固 定 端<br>固定支点   |
|--------|---|---|---|
| 記 号    |  |  |  |
| 生じる反力  | 水平反力<br>鉛直反力  | 鉛直反力  | 水平反力<br>鉛直反力<br>反力モーメント   |
| 拘束する変位 | 水平変位<br>鉛直変位  | 鉛直変位  | 水平変位<br>鉛直変位<br>回轉變位  |
| 自由な変位  | 回轉變位  | 水平変位<br>回轉變位  | な し   |

### 1.1.3 静定構造と不静定構造

構造物は種々の荷重の作用のもと、滑ったり転倒したりすることなく安定した状態で静止していることが求められる。このとき、構造物に作用している荷重と反力は「力のつり合い条件」を満たしている。力のつり合い条件の観点から、構造物の安定性はつぎのように分類される。

**不安定構造** (unstable structure)：力の作用のもと、滑ったり転倒したりする可能性がある構造。つり合い条件が成り立っていない。

**安定構造** (stable structure)：力の作用のもと、静止している状態にある構

造。つり合い条件が成り立っている。

**静定構造** (statically determinate structure)：安定な構造のうち、反力や構造内部の力の状態が、つり合い条件だけで決まる構造。

**不静定構造** (statically indeterminate structure)：安定な構造のうち、反力や構造内部の力の状態が、つり合い条件だけでは決まらない構造。変形の条件を考慮しないと力の状態が決まらない。

#### 1.1.4 は り

細長い直線状の**部材** (member) を水平に配置し、その上に荷重をかけてこれを支える構造形式。図 1.1 に基本的な 2 つの静定ばりを示す。静定ばりには、ほかに後述する「ゲルバーばり」がある。

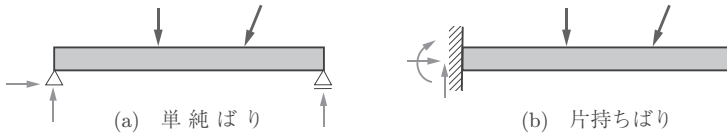


図 1.1 基本的な 2 つの静定ばり

#### 1.1.5 はりの断面力

**外力** (external force)：構造物に外部から作用する力。荷重と支点反力は外力である。

**内力** (internal force)：構造物が荷重を支点に伝えるとき内部に生じる力。

**断面力**：はりの内力は、はりの断面上の集中した力として扱う。これを「断面力」という。

はりの断面力は図 1.2 に示すように 3 つあり、同じ大きさで逆向きの 2 つの力が組み合わさって作用する。

**軸力  $N$** ：引っ張って伸ばす作用の力。あるいは圧縮して縮める作用の力。

**せん断力  $Q$** ：切断しようとする作用の力。

**曲げモーメント  $M$** ：曲げる作用をするモーメント。

4 1. 静 定 ば り

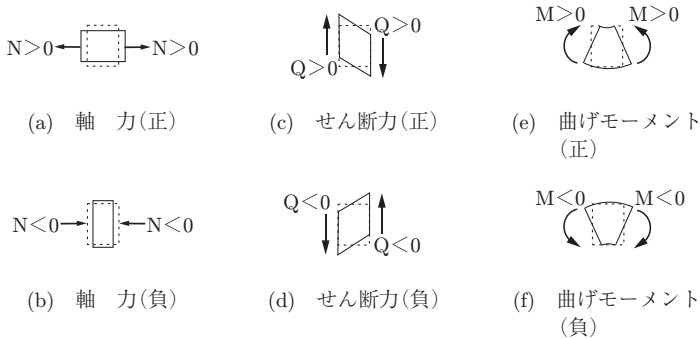


図 1.2 はりの断面力 (破線は力を加える前の形状のイメージ)

1.1.6 支点反力と断面力の求め方

(1) 支点反力の求め方

【例題】 図 1.3(a) のように、水平からの角度  $\theta$  の集中荷重  $P$  が作用している単純ばりの支点反力を求める。

支点反力：左右の支点の種類から支点到に生じる反力は図 1.3(b) のようになる。

斜めの荷重の分解：荷重  $P$  を水平分力  $P_H (= P \cos \theta)$  と鉛直分力  $P_V (= P \sin \theta)$  とに分解する。

はり全体に関する力のつり合い条件：図 1.3(b) に描かれた力の間には、つぎの 3 つのつり合い条件が成り立っていないなければならない。

[水平方向の力のつり合い]       $H_A + P_H = 0$       (1.4)

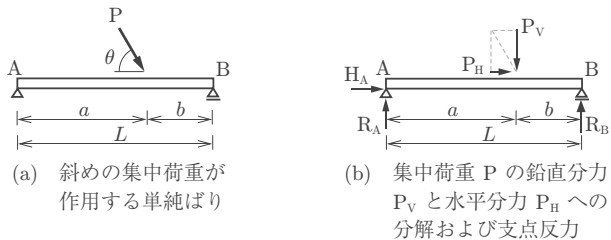


図 1.3 斜めの荷重の分解

[鉛直方向の力のつり合い]  $R_A + R_B - P_V = 0$  (1.5)

[モーメントのつり合い (点 A まわり)]  $R_B \times L - P_V \times a = 0$  (1.6)

支点反力の値：式(1.4)~(1.6)を解いて3つの反力がつぎのように求まる。

$$H_A = -P_H, \quad R_A = \frac{b}{L}P_V, \quad R_B = \frac{a}{L}P_V \quad (1.7)$$

**【解き方のコツ】 斜めの荷重の扱い**

式(1.6)のモーメントのつり合い条件は、図1.4のように、支点Aから力Pの作用線までの距離  $a \sin \theta$  を求めてつぎのように立てることもできる。

$$R_B \times L - P \times a \sin \theta = 0 \quad (1.8)$$

$P \times a \sin \theta = P \sin \theta \times a = P_V \times a$  なので、式(1.8)と式(1.6)は同じ式である。

しかし、垂線を下ろす作図、正弦および余弦の計算は手間であり、間違える可能性もある。

これに対し、図1.3(b)に基づいてモーメントのつり合い条件を立てるとき、支点Aから鉛直分力  $P_V$  までの距離  $a$  はすでに問題図に与えられており、追加の計算は不要である。斜めの荷重の水平分力と鉛直分力は、水平および鉛直のつり合い条件を立てるときにも必要である。したがって、図1.3(b)をそのまま使ってモーメントのつり合い条件を立てるのがよい、といえる。

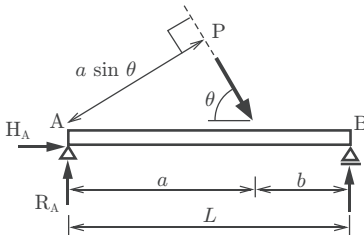


図1.4 支点Aから斜めの集中荷重の作用線までの距離

**(2) 断面力の求め方**

はりの切断：図1.5(a), (b)のように、支点Aから距離  $x$  の位置ではりを仮想的に切断し、内部の力（断面力）を断面に作用させた状態を考える。

作用・反作用の法則：切断された左右の断面に与える3つの断面力  $N, Q,$



—— 著者略歴 ——

野村 卓史 (のむら たかし)  
1977年 東京大学工学部土木工学科卒業  
1979年 東京大学大学院工学系研究科博士前期  
課程修了 (土木工学専攻)  
1979年 東京工業大学助手  
1984年 工学博士 (東京工業大学)  
1985年 東京工業大学助教授  
1989～  
1991年 米国スタンフォード大学客員研究員  
1991年 東京大学助教授  
1994年 日本大学助教授  
1998年 日本大学教授  
2019年 日本大学特任教授  
現在に至る

長谷部 寛 (はせべ ひろし)  
2001年 日本大学理工学部土木工学科卒業  
2003年 日本大学大学院理工学研究科博士前期  
課程修了 (土木工学専攻)  
2003年 日本大学助手  
2010年 博士 (工学) (日本大学)  
2011年 日本大学専任講師  
2017年 日本大学准教授  
現在に至る

## 構造力学演習

Structural Mechanics Exercises

© Takashi Nomura, Hiroshi Hasebe 2020

2020年5月7日 初版第1刷発行



検印省略

著者 野村卓史  
長谷部寛  
発行者 株式会社 コロナ社  
代表者 牛来真也  
印刷所 三美印刷株式会社  
製本所 有限会社 愛千製本所

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社  
CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844 ・ 電話 (03) 3941-3131 (代)

ホームページ <https://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-05271-8 C3051 Printed in Japan

(中原)



< 出版者著作権管理機構 委託出版物 >

本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつど事前に、出版者著作権管理機構 (電話 03-5244-5088, FAX 03-5244-5089, e-mail: info@jcopy.or.jp) の許諾を得てください。

本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めていません。落丁・乱丁はお取替えいたします。