

構造解析のための材料力学

博士(工学) 舘石 和雄 著

コロナ社

ま え が き

橋や高層ビルなどの大きな構造物から、住宅や家具などの身近な構造物まで、私たちの生活はさまざまな構造物に支えられている。構造物は、金属、コンクリート、プラスチックなど、いろいろな材料を使って製作される。それぞれの材料が持つ特徴を生かし、安全で長持ちする構造物を造るには、材料や構造物の力学的な挙動に関する深い究明と理解が必要である。これを担う工学分野が構造工学である。材料力学は構造工学の一部であり、構造物が力を受けた際に、それを構成する部材の内部にどのような力や変形が生じるかという問題を取り扱う。

構造物を対象とした工学分野、例えば土木工学、建築学、機械工学などの履修コースでは、構造工学に関する多くの科目がカリキュラムに組み込まれている。その中で、材料力学あるいはそれに類する科目は、構造工学の最も基礎的な内容を取り扱う入門科目として、比較的低学年時に履修機会が設けられることが多い。よって、材料力学は、構造工学の基礎固めのために重要であると同時に、構造工学への第一印象を左右するという意味でも重要な科目であるといえる。構造工学に少しでもよい印象を持ってもらえるよう、できるだけ平易な材料力学の解説書を提供したい、本書はそのような動機から執筆、出版に至ったものである。

本書は、名古屋大学で土木工学を学ぶ2年生向けに開講している講義の講義ノートを基に、内容の選別、章立ての見直しなどを行って全9章に編集した。章の順番どおりに学習してもらうことを想定している。1章では、はりなどの単純な部材を対象に、力のつり合いと断面力の求め方について解説している。2章では応力、ひずみの概念を紹介し、これ以降の部材の力学・変形解析への導入とした。3章以降、軸力、曲げ、せん断、ねじりの四つの作用を受ける部

材の応力・変形挙動についてそれぞれ解説している。4種の作用を受ける部材を同列に万遍なく解説している点は本書の特徴の一つである。7章では、一般的な応力・ひずみの取扱いについて述べている。その際、3次元での説明は煩雑となることから、解説は2次元で行い、3次元表現は紹介のみにとどめる工夫をした。8章では、初学者にとっては難解であると思われる主応力・主ひずみの概念とその求め方について詳述した。9章では、後続科目への橋渡しとなる発展的な話題について解説している。

「材料力学」を題する成書は非常に多く、ロングセラーになっている名著も多いが、上記のような単元構成は他書にはあまり見られないのではないかと考えている。また、入門科目として位置づけられる材料力学の解説書として使われることを念頭におき、内容は厳選に厳選を重ね、コンパクトな書籍に仕上げた。話が込み入った箇所や重要な箇所では適当な区切りをつけ、例題とその解説を示している。各章末には演習問題をつけ、巻末にその解答を示した。ぜひ、自己学習に役立てていただきたい。

構造工学は非常に洗練された奥の深い学問である。本書が初学者の理解の助けとなり、構造工学の道へ入り込むきっかけになれば深甚なる喜びである。なお、演習問題のいくつかは名古屋大学工学部の清水優氏による。ここに記して感謝します。

2019年12月

館石 和雄

目 次

1. 外力と内力（断面力）

1.1 力とモーメントのつり合い	1
1.2 合力と合モーメント	4
1.3 反 力	5
1.4 内力（断面力）	9
1.5 断面力の種類と正負	10
1.6 断面力の求め方	12
1.7 分布荷重の取扱い	14
1.8 荷重，せん断力，曲げモーメントの関係	15
章 末 問 題	19

2. 応力とひずみ

2.1 応 力 と は	20
2.2 応 力 の 種 類	22
2.3 応力と断面力の関係	23
2.4 ひ ず み と は	25
2.5 応力とひずみの関係（その1）	26
2.6 強 度 と 設 計	27
章 末 問 題	28

3. 軸力部材の力学

3.1 軸力部材とは	30
3.2 軸力部材の応力と変形	30
3.2.1 棒の自重が無視できる場合	31
3.2.2 棒の自重が無視できない場合	32
3.3 残留応力と温度応力	35
章 末 問 題	39

4. 曲げ部材の力学

4.1 曲げ部材とは	41
4.2 はりの曲げ応力	41
4.2.1 はりの変形	41
4.2.2 曲げ応力	43
4.3 断面諸量	44
4.3.1 図心	44
4.3.2 断面1次モーメント	45
4.3.3 断面2次モーメント	49
4.4 中立軸まわりの断面2次モーメント	51
4.4.1 長方形断面の断面2次モーメント	51
4.4.2 T形断面の断面2次モーメント	53
4.4.3 I形断面の断面2次モーメント	56
4.4.4 円形断面の断面2次モーメント	57
4.5 断面係数	58
4.6 はりのたわみ	61
4.6.1 片持ちばりのたわみ	62
4.6.2 単純ばりのたわみ	63

章 末 問 題	66
---------	----

5. せん断を受ける部材の力学

5.1 せん断力を受けるはり	68
5.2 せん断力によるはりのせん断応力	69
5.2.1 長方形断面はりのせん断応力分布	71
5.2.2 円形断面はりのせん断応力分布	72
5.3 せん断力によるたわみ	74
章 末 問 題	75

6. ねじりを受ける部材の力学

6.1 ねじりを受ける部材	77
6.2 ねじりモーメントによるせん断応力	78
6.2.1 円形断面部材のせん断応力分布	81
6.2.2 開断面部材のせん断応力分布	82
6.2.3 閉断面部材のせん断応力分布	85
章 末 問 題	86

7. 一般的な応力とひずみ

7.1 任意形状の物体の応力とひずみ	88
7.2 一般的な応力の表示法	88
7.3 微小長方形の力のつり合い	91
7.4 ひずみと変位の関係	92
7.5 応力とひずみの関係 (その2)	94
7.6 3次元における応力とひずみ	96
7.7 平面応力と平面ひずみ	98

章 末 問 題	101
---------	-----

8. 平面応力問題

8.1 応力成分の座標変換	103
8.2 主 応 力	107
8.3 主せん断応力	109
8.4 モ ー ル 円	110
8.5 特別な応力状態のときのモール円	114
8.6 弾性係数間の関係	116
8.7 主 ひ ず み	117
8.8 主ひずみと主応力の計測	119
章 末 問 題	122

9. いくつかの発展的課題

9.1 組合せ外力を受ける部材	125
9.2 合 成 部 材	129
9.3 柱 の 座 屈	133
9.4 応力テンソル (2次元)	137
9.5 ひずみテンソル (2次元)	140
9.6 断 面 の 主 軸	143
9.7 非 対 称 曲 げ	145
章 末 問 題	147

章末問題解答	150
--------	-----

索 引	157
-----	-----

外力と内力（断面力）

1.1 力とモーメントのつり合い

ある物体に対して、その外部から作用する力を外力（external force）という。物体が静止している場合、それに作用している外力はつり合っている。例えば図 1.1 のように質点に力が作用しており、質点が静止している場合

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$$

でなければならない。ただし、 \mathbf{F}_i は力を表すベクトルである。

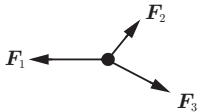


図 1.1 質点に作用する力のつり合い

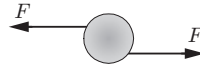


図 1.2 球に作用する力

しかし、現実の物体には体積がある。例えば、図 1.2 に示すように球にひもを取り付け、それを左右に引っ張った場合、左右の力が同じであっても球が回転運動を起こしてしまうことは明らかであろう。このように、大きさのある物体の静止状態、すなわち力のつり合いを考える際には、回転に関する考察が必要となる。

物を回転させようとする駆動力をモーメント（moment）という。例えば図 1.3 に示すように物体の点 P に力 \mathbf{F} が作用しているとする。また、力の

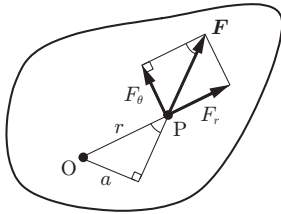


図 1.3 基準点と力の位置関係

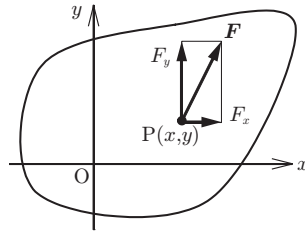


図 1.4 直交座標系による表現

大きさを F とする。このとき、点 O まわりのモーメント M は、力の大きさとその作用線までの距離の積として

$$M = Fa$$

で定義される。あるいは、基準点 O と力の作用点 P とを結んだ方向と、それに直交する方向に力を分解し、その成分を F_r 、 F_θ とすると、 F_r は回転には寄与しないので考慮しなくてよく、モーメントは

$$M = F_\theta r$$

とも表現できる。両者が等しいことは三角形の相似条件から明らかである。また、図 1.4 に示すように、基準点を原点にして x - y 座標系を設定し、力を x 軸、 y 軸方向成分 F_x 、 F_y で表し、力の作用点を $P(x, y)$ とすれば、原点まわりのモーメントは

$$M = -F_x y + F_y x$$

とも表される。ただし、基準点 (原点) からみて反時計回りに回転させようとするモーメントを正とした。先ほどモーメントは力と距離の積だと述べたが、上式の場合、 x や y に座標値そのもの (負値でもかまわない) を入れれば、モーメントの正負が自動的に表現できるので便利である。

図 1.2 に戻ろう。図に示されるような状態、つまり、一對の等値逆方向きの力が生じているときのモーメントは偶力 (couple) と呼ばれる。図 1.5 のように二つの力の作用線間の距離を a とすると、偶力の大きさは

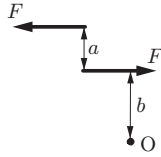


図 1.5 偶力

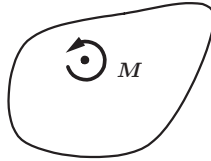


図 1.6 集中モーメント

$$M = Fa$$

である。この大きさはどの点を基準として考えても変わらない。なぜならば、図 1.5 中に示す点 O がどこにあったとしても、点 O まわりのモーメントは

$$M = F(a + b) - Fb = Fa$$

となるためである。偶力において、2本の力の作用線を非常に近づけ、 a を非常に小さくとれば、あたかもある1点にモーメントが作用しているようにみなすことができる。これを**集中モーメント** (moment load) と呼ぶ。非常に細い径のドライバーで小さなねじを回すイメージである。集中モーメントは図 1.6 のような回転を表す矢印で表現することとする。集中モーメントの大きさと向きは、どのような座標系でみても、またどの点を基準として考えても変わらない。

物体に力や集中モーメントが作用したとき、物体が静止するためには、力のつり合いに加えて、モーメントもつり合っていないなければならない。図 1.7 のように複数の力 F_i と集中モーメント M_j を受ける物体を考えてみよう。力のつり合い式は、それぞれの力を x 方向成分 $F_{x,i}$ と y 方向成分 $F_{y,i}$ に分解して表

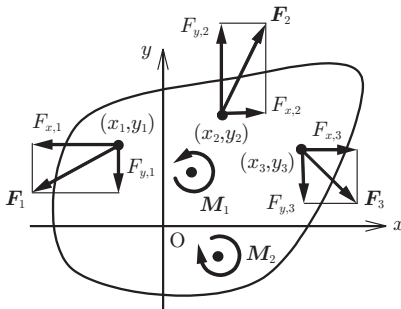


図 1.7 任意の力と集中モーメントを受ける物体

現すると

$$\sum_i F_{x,i} = 0, \quad \sum_i F_{y,i} = 0 \quad (1.1)$$

である。つぎにモーメントのつり合いについて考える。原点まわりのモーメントのつり合い式は、それぞれの力の作用点の座標を (x_i, y_i) 、集中モーメントの大きさを M_j とすると

$$-\sum_i F_{x,i} y_i + \sum_i F_{y,i} x_i + \sum_j M_j = 0 \quad (1.2)$$

となる。静止している物体においては、上の3式が満足されていなければならない。

式(1.2)は原点まわりで考えたモーメントのつり合い式であるが、上記の3式が満足されていれば、他のどの点まわりのモーメントのつり合いも自動的に満足される。なぜならば、例えば原点を (x_0, y_0) だけ移動したとすると、新しい原点まわりのモーメントは

$$\begin{aligned} & -\sum_i F_{x,i} (y_i - y_0) + \sum_i F_{y,i} (x_i - x_0) + \sum_j M_j = \\ & -\sum_i F_{x,i} y_i + \sum_i F_{y,i} x_i + \sum_j M_j + y_0 \sum_i F_{x,i} - x_0 \sum_i F_{y,i} \end{aligned}$$

となるが、式(1.1)、(1.2)によりこれが0となるためである。言い換えれば、モーメントのつり合い式はどの点のまわりで立ててもかまわない。

1.2 合力と合モーメント

複数の力は、それと同じ作用をする一つの力に合成することができる。これを合力 (resultant force) という。また、複数の力によるモーメントを合成したものを合モーメント (resultant moment) という。

図1.8のような複数の力 \mathbf{F}_i を考える。それぞれの力の大きさを F_i とする。この場合、力の向きは同一なので、合力を \mathbf{F} とすると、その大きさは単純に

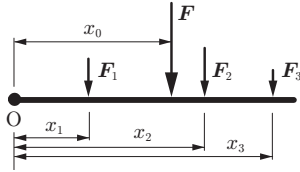


図 1.8 合力とその作用位置

$F = \sum_i F_i$ となる。

つぎにモーメントについて考えてみる。複数の力 F_i による点 O まわりの合モーメントは $\sum_i F_i x_i$ で表される。一方、合力の作用位置を x_0 とすると、合力によるモーメントは $F x_0$ となる。両者が等しいとおくと

$$F x_0 = \sum_i F_i x_i \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{\sum_i F_i x_i}{F} = \frac{\sum_i F_i x_i}{\sum_i F_i}$$

が得られる。よって、この位置に合力を作用させれば、複数の力 F_i による作用（力とモーメント）を一つの力で与えることができる。上記は点 O まわりのモーメントで考えたが、どの点まわりで考えても結果は同じになる。また、任意の方向を向く力の合力とその作用位置を求めたい場合には、力を x 方向成分と y 方向成分に分けた後、それぞれの方向について上記の計算をすればよい。

なお、図 1.5 に示す偶力の場合には、複数の力の合力が 0 となっても、それによる合モーメントは 0 にならない点には注意が必要である。

1.3 反 力

図 1.7 のような状態においても力とモーメントがつり合っていれば物体は静止するが、このように空中に浮いたような物体のつり合いを取り扱う問題はまれである。実際には、物体を何らかの方法で支持した上で、力やモーメントを作用させる。力学では、物体を支持することを、自由度を拘束するともいう。自由度 (degree of freedom) とは物体が動き得る方向や角度のことであり、並進 (平行移動) と回転とがある。3 次元空間においては、3 方向への並進と、三つの軸まわりの回転が可能であるので、計六つの自由度がある。

索引

【あ】	【く】	
圧縮応力 22	偶力 2	純せん断 114
圧縮ひずみ 25		純曲げ 68
圧縮力 11	【こ】	【す】
安全率 28	工学ひずみ 119	垂直応力 22
【い】	合成部材 129	垂直ひずみ 25
一様応力 21	剛体 27	図心 44
異方性材料 120	合モーメント 4	【せ】
【お】	合力 4	静定構造 38
オイラーの座屈荷重 136	コーシーの公式 138	線形弾性体 26
応答 9	【さ】	せん断応力 22
応力 20	座屈 133	せん断剛性 75
応力集中 22	3軸ひずみゲージ 120	せん断弾性係数 27
応力成分 89	サン・ブナンのねじり 77	せん断ひずみ 26
応力テンソル 138	残留応力 36	せん断流 86
応力度 20	【し】	せん断力 11
応力-ひずみ関係 26, 96, 98, 99	軸力 11	せん断力図 13
応力分布 21	軸力図 13	線膨張係数 36
応力ベクトル 89	軸力部材 30	【そ】
温度応力 37	支点 6	塑性 26
【か】	集中荷重 14	そり 77
開断面 82	集中モーメント 3	そり関数 79
外力 1	自由度 5	そり拘束ねじり 77
片持ちばり 8	自由表面 92, 98	【た】
換算断面 130	自由物体 10	縦弾性係数 26
【き】	主応力 107	縦ひずみ 94
強度 27	主応力図 108	たわみ 61
	主応力方向 107	たわみ角 61
	主応力面 107	たわみ曲線 61
	主軸 107, 144	単純ねじり 77
	主せん断応力 109	単純ばり 7
	主ひずみ 119	弾性 26

弾性係数	26	ねじりモーメント	11	閉断面	85
弾性座屈荷重	136	ねじり率	78	平面応力	99
断面1次モーメント	45			平面ひずみ	99
断面係数	59	【の】		平面保持の仮定	42
断面相乗モーメント	143	伸び	25	ベルヌーイ・オイラーの	
断面2次極モーメント	57	伸び剛性	31	仮定	42
断面2次モーメント	49			変位ベクトル	92
断面力	10	【は】			
【ち】		柱	30, 133	【ほ】	
中立軸	42, 45	はり	7	ポアソン比	95
中立面	42	反力	6		
直応力	22	反力モーメント	6	【ま】	
直ひずみ	25			曲げ応力	44
直交異方性材料	120	【ひ】		曲げ剛性	62
		ひずみゲージ	120	曲げ部材	41
		ひずみ成分	92	曲げモーメント	11
		ひずみテンソル	141	曲げモーメント図	13
【て】		非線形弾性体	26	【も】	
適合条件式	94, 97	非対称曲げ	145	モーメント	1
【と】		引張応力	22	モール円	110
等方応力状態	114	引張ひずみ	25	【や】	
等方性材料	119	引張力	11	ヤング係数(率)	26
【な】		表面力	89	【ゆ】	
内力	9	ヒンジ	7	有効座屈長	136
【に】		【ふ】		【よ】	
2階のテンソル	137	不静定構造	38	横ひずみ	94
【ね】		フック則	27, 96		
ねじり角	78	分布荷重	14		
ねじり剛性	80	【へ】			
ねじり定数	80	平均せん断応力	71		
		平衡方程式	91, 97		

— 著者略歴 —

1986年 東京工業大学工学部土木工学科卒業
1988年 東京工業大学大学院総合理工学研究科修士課程修了（社会開発工学専攻）
1988年 東日本旅客鉄道株式会社勤務
1990年 東京工業大学助手
1994年 博士（工学）（東京工業大学）
1995年 東京工業大学講師
1997年 東京工業大学助教授
1997年 東京大学助教授
2000年 名古屋大学助教授
2003年 名古屋大学教授
現在に至る

構造解析のための材料力学

Mechanics of Materials for Structural Analysis

© Kazuo Tateishi 2020

2020年2月28日 初版第1刷発行



検印省略

著者 たち 石 かず お 雄
発行者 株式会社 コロナ社
代表者 牛来 真也
印刷所 三美印刷株式会社
製本所 有限会社 愛千製本所

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844 ・ 電話 (03) 3941-3131(代)

ホームページ <https://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-05270-1 C3051 Printed in Japan

(横尾)



< 出版者著作権管理機構 委託出版物 >

本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつと事前に、出版者著作権管理機構（電話 03-5244-5088, FAX 03-5244-5089, e-mail: info@jcopy.or.jp）の許諾を得てください。

本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めていません。落丁・乱丁はお取替えいたします。