例題で学ぶ 構造力学 Ⅱ

―― 不静定編 ――

工学博士　青木 徹彦 著

コロナ社

ま　え　が　き

「構造力学」（土木系大学講義シリーズ）は，1986 年の初版刊行以来，非常に多くの大学，高専等で教科書として使用していただき，若い世代に文化の伝承ができたと感謝している。この間，多くの大学で土木工学科から都市環境学科などへの名称変更があったが，構造力学そのものは，建設系学科の中心的基礎科目としてその重要性は変わっていない。とはいえ授業時間の短縮や，構造設計示方書における使用単位が重力単位系から国際単位系（SI）へ変更されたこと，また構造物の設計が限界状態や性能照査型設計法へ移行しつつあることなど，新しい時代への流れもある。

本書は，当初から力学の基礎的事項を述べるにとどまらず，構造物の実際の挙動や破壊状態，限界状態を意識して書かれたため，いま読みなおしても古いという感じは持たないが，同書の中で学習効果が少ないと思われる，1）第 4 章の静定ばりのモールの定理（共役ばり法），2）第 8 章の内的不静定トラス，3）第 9 章アーチのランガー桁の解法を削除した。代わりに，1）はりの内部応力状態の説明，2）はりの曲げモーメント，せん断力をロープ法により簡単に求める方法，3）トラスの部材力をはりの M，Q 図から一括して求める方法，4）単位荷重法の物理的意味，5）単位荷重法の簡単積分公式による解法，6）傾斜部材を有するラーメンの解法などを新しく追加ないし書き直しを行い，「静定編」と「不静定編」の 2 分冊とした。1）～ 5）は著者の知る限り，類書に見られない新しい内容であると思われる。例題や問題で与えた荷重等の単位の国際単位系（SI）への変更も行った。今まで多くの方からいただいた貴重な御意見は，その都度参考にして部分的書き直しを行ってきたが，今後も読者と著者が身近に意見交換できることを期待している。

構造力学は土木技術者にとって最も重要な基礎的教科である。本書は学生諸君が実社会に入ってからも利用できるように書かれている。社会経済活動や人々の生活を支える構造物が，地震や津波，その他の外力によって破壊されないように，また機能的，経済的かつ美しい構造物を実現するために，ゆっくりとよく考えて，力学的センスを磨いていただきたい。本書がその契機になれば幸いである。

2015 年　9 月

青木　徹彦

国際単位系（SI）と重力単位系

土木工学を初めとするわが国の工学分野では，従来から一般に重力単位系（荷重や力では kgf や tf）が用いられてきた。日常生活では，食料品，体重，乗用車などで，g，kg，ton が普通に用いられている（正確には“f”または“重”を付ける）。4℃の水の 1 cm^3 が 1 g，1 l で 1 kg，1 m^3 では 1 ton というのは明確でわかりやすい。しかし現在では，さまざまな基準の世界的な共通化の動きに対応して科学，工学の各分野で国際単位系（SI：Le Système International d'Unités）が採用されてきている。

わが国の構造物の標準的な設計基準として用いられる道路橋設計示方書（平成 24 年版）でも，力や応力の単位がすでに SI 単位になっており，SI 単位を理解しておかないと構造物の設計もできない状況になった。そこで従来の重力単位系との違いを理解しておく必要がある。

SI 単位の基本単位は一部に独自の名称をもつ単位はあるものの，ほとんどのものは従来の単位系と同じで，長さを m（メートル），時間を s（秒）とする（**表 1**，**表 2**）。両者のおもな違いは，重力単位系では**重量**〔kgf〕を基本単位に含めているのに対し，SI 単位では**質量**〔kg〕を基本単位として用いることである。重量は質量などを組み合わせた単位として表す（重量＝質量×重力の加速度）。

表 1　おもな SI 基本単位

量	単位記号（名称）
長　さ	m（メートル）
質　量	kg（キログラム）
時　間	s（秒）
角　度	rad（ラジアン）

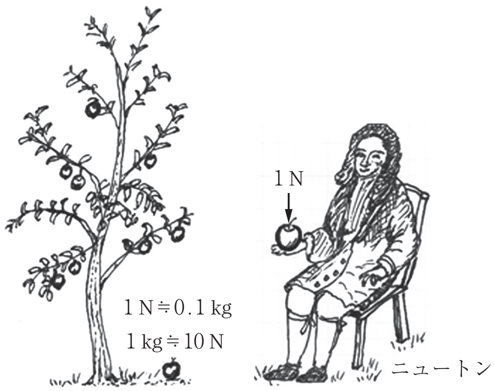
表 2　おもな SI 接頭語

記　号（名称）	倍　数
G（ギガ）	10^9
M（メガ）	10^6
K（キロ）	10^3
c（センチ）	10^{-2}
m（ミリ）	10^{-3}
μ（マイクロ）	10^{-6}

物体の重量とは，その物体に働く重力の大きさであり，感覚的に質量よりもとらえやすい重量を基本単位に選んだのが重力単位系の考え方である。しかし，実用上ほとんど無視しうる差とはいえ，地球上では場所によって重力の大きさは異なり，また，無重力状態では物体が及ぼす力を表すには質量を考えざるを得ない。よって，宇宙ステーション構造物の設計では重力単位系は役に立たない。また地震工学などでは，構造物の質量 M を基本量とし，これに加速度 α を乗じた量 $M\alpha$ を力として用いるし，車が物体に衝突するときも車の質量と減速度（－加速度）の積が作用力となる。

SI 固有の名称をもつ単位のうち力学に関係したものには，力を表すニュートン〔N〕や，応力

〔N/mm^2〕・圧力を表すパスカル〔Pa〕がある。**1 N とは“質量 1 kg の物体に 1 m/s^2 の加速度運動を生じさせる力”**のことで，1 N＝1 kg・m/s^2 となる。地球上では重力の加速度は 9.8 m/s^2 であるから，1 N は 0.102 kg の質量の物体に地球の引力が作用するときの力である。ニュートン（英）はリンゴが落ちるのを見て，万有引力を発見したといわれるが，約 0.1 kg のリンゴを手の上において感じられる力が 1 N である。



逆に重力単位系で 1 kgf の荷重（作用力）は，SI 単位では 1 kg×9.8 m/s^2＝9.8 kg・m/s^2＝9.8 N ≒10 N となる。同様に積載量 20 tf の荷重とは，20×10^3 kgf≒200×10^3 N＝200 kN である。圧力の単位には，圧力に関するパスカル（仏）の原理で有名な科学者の名を用いているが（1 Pa＝1 N/m^2），力学分野では，**応力**に対しては Pa を用いるよりも，cm^2，mm^2 などの単位面積当たりの力（N, kN）を用いたほうが理解しやすく，部材断面積に応じた力の計算にも便利であるので，一般には N/mm^2 や kN/cm^2 が用いられる（**表 3**）。

鋼の弾性係数は E＝2.1×10^6 kgf/cm^2 が長い間用いられてきたが，これを N/mm^2 で表すと 1 kgf → 9.8 N，1 cm^2 → 10^2 mm^2 とおいて，E＝2.1×10^6×9.8/10^2 N/mm^2＝2.058×10^5 N/mm^2 となる。ここで 3%の誤差を許せば $\boldsymbol{E=2.0\times10^5\ N/mm^2}$ でよい。一般に，設計などで 2%の誤差が問題とされなければ 1 tf＝9.8 kN≒10 kN で計算してよい。

表 3　固有の名称をもつ SI 単位（N，Pa）と重力単位

量	単位記号（名称）	重力単位
力 応力 圧力	1 N（＝1 kg・m/s^2） 1 N/mm^2 1 Pa（1 N/m^2＝1 $\mu N/mm^2$）	0.102 kgf（≒0.1 kgf） 10.2 kgf/cm^2 0.102 kgf/m^2
鋼の弾性係数	2.06×10^5 N/mm^2（≒$\mathbf{2.0\times10^5\ N/mm^2}$）	2.1×10^6 kgf/cm^2
単位換算 （重力単位→ SI 単位）	**1 kgf**＝9.806 N（≒**10 N**） **1 tf**＝9.8 kN（≒**10 kN**） 1 kgf/cm^2＝9.806×10^{-2} N/mm^2 （≒0.1 N/mm^2）	

目　　次

第7章　構造解析の基本原理

7.1　線形構造と非線形構造……1
7.1.1　線形構造と重ね合わせの原理　1
7.1.2　非線形構造　2
7.2　エネルギー保存の法則……4
7.3　外力仕事とひずみエネルギー……5
7.3.1　外 力 仕 事　5
7.3.2　ひずみエネルギー　6
7.4　仮想仕事の原理……11
7.4.1　基 本 概 念　11
7.4.2　仮想変位の原理　12
7.4.3　仮想力の原理　16
7.5　単 位 荷 重 法……18
7.5.1　単位荷重公式　18
7.5.2　温度変化による弾性変位　22
7.5.3　積 分 公 式　23
7.5.4　単位荷重法（仮想荷重）の物理的意味　31
7.6　カスチリアノの定理……34
7.7　相　反　定　理……38
7.8　最小エネルギーの原理……41
7.9　エネルギー原理による近似解法……45
7.9.1　リッツの方法　45
7.9.2　ガラーキン法　48
7.9.3　はりの有限要素法　49
7.10　エネルギー原理のまとめ……54

第8章　不静定ばりおよび不静定トラス

8.1　不静定構造の解法……56
8.1.1　不静定力法　56
8.1.2　変　形　法　57
8.2　不静定力法の基本原理……58
8.2.1　1次不静定ばり　58
8.2.2　2次不静定ばり　63
8.2.3　高次不静定構造の変形条件式　65
8.3　不静定力法の応用……66
8.3.1　複数部材からなる構造　66
8.3.2　ばね支持されたはり　69
8.3.3　変断面連続ばり　70
8.4　不 静 定 ト ラ ス……71
8.4.1　連続トラス（外的不静定トラス）　71
8.4.2　内的不静定トラス　72

8.5　影　　響　　線 ………… 73
8.5.1　ミューラー・ブレスラウの原理　73
8.5.2　重ね合わせの原理による不静定ばりの影響線の決定　75
8.5.3　変断面連続ばりの影響線　77
8.5.4　トラスの影響線　77

第9章　ア　ー　チ

9.1　アーチの特性と種類 ………… 79
9.2　アーチの形状と基本力学 ………… 81
9.3　アーチの変位 ………… 84
9.4　3ヒンジアーチ ………… 85
9.5　2ヒンジアーチ ………… 86
9.6　固定アーチ ………… 89
9.7　タイド・アーチおよび補剛アーチ ………… 90

第10章　ラーメン構造

10.1　概　　説 ………… 92
10.2　たわみ角法 ………… 93
10.3　たわみ角法によるラーメンの解法 ………… 98
10.3.1　節点方程式（モーメントのつりあい条件式）　98
10.3.2　層方程式（せん断力のつりあい条件式）　100
10.3.3　各種のラーメン　104
10.3.4　全体変形条件式（角方程式）　108
10.3.5　傾斜部材のあるラーメンの部材角式　110
10.4　3連モーメントの定理 ………… 112

第11章　柱の座屈

11.1　座屈現象 ………… 114
11.2　中心軸圧縮柱 ………… 115
11.3　初期不整のある弾性柱 ………… 121
11.4　エネルギー法の応用 ………… 124
11.5　非弾性柱 ………… 126

第12章　板　構　造

12.1　概　　説 ………… 128
12.2　等方性平板 ………… 129
12.2.1　基礎方程式　129
12.2.2　境界条件　133
12.2.3　平板の解法　135

12.3　直交異方性平板 …… 139
12.3.1　基礎方程式　140 ｜ 12.3.2　格子構造としての解法　141

付　　　録 …… 144
参　考　文　献 …… 147
問　の　略　解 …… 148
索　　　引 …… 156

「例題で学ぶ 構造力学Ⅰ　── 静定編 ──」

主 要 目 次

第1章　序　　　論
1.1　構造力学の内容
1.2　構造物の理想化
1.3　構　造　形　式
1.4　作用力と荷重
1.5　構造物の製作過程と構造力学の役割
1.6　構造物に要求される条件
1.7　構造物の破壊形式
1.8　生物に学ぶ構造力学
Coffee Break ─ 構造力学の基礎をつくった人々

第2章　構造力学の基礎
2.1　力　の　性　質
2.2　力のつりあい
2.3　支　点　反　力
2.4　断　　面　　力
2.5　構造物の支持形式
2.6　応力とひずみ

第3章　静定トラス
3.1　トラス構造の特性と形式
3.2　トラスの解法

第4章　静　定　ば　り
4.1　静定ばりの形式
4.2　支　点　反　力
4.3　断面力（曲げモーメントとせん断力）
4.4　断面力と荷重の相互関係
4.5　ロープ法による曲げモーメント図の描き方（早い，簡単，きれい）
4.6　はりの内部応力
4.7　断面図形の性質
4.8　は　り　の　変　形

第5章　影　　響　　線
5.1　移動荷重と影響線
5.2　静定ばりの影響線
5.3　移動荷重と最大曲げモーメント
5.4　間　接　載　荷
5.5　単純トラス部材力の影響線
5.6　トラスの全部材力をはりの M 図，Q 図から一括して求める
Coffee Break ─ 工学的近似の話

第6章　構造物の安定および静定・不静定
6.1　単一構造の安定性と静定性
6.2　複数部材からなる構造およびトラスの安定性と静定性
6.3　アーチの静定性
6.4　ラーメンの不静定次数
6.5　不静定構造物の特性

（本文中の♠マークはⅠ巻 ── 静定編 ── を参照している箇所を表す。）

第７章

構造解析の基本原理

構造解析の基本は，ある与えられた荷重のもとで構造物の各部分の断面力と変形量を求めることである。静定構造物の支点反力や断面力は，力のつりあい条件式から容易に求められるが，不静定構造物では，未知の支点反力や断面力を含んだ変形量を求める必要がある。静定構造物でも，設計においては必要な変形量をあらかじめ計算しておかねばならない。このような構造物の変形解析にはエネルギー原理に基礎をおく方法が最も一般性があり，また応用範囲も著しく広げられる。構造物の変形に関する諸性質を調べるときにもエネルギー原理が有効に役立てられる。

今日では，構造力学の問題のみならず，ほかの力学分野や，より一般的な物理現象の解析にもコンピュータが用いられているが，エネルギー原理はこれらのコンピュータ解析の基本原理ともなっている。よって，本章ではこれらが十分理解できるよう，基本的な考え方をやや詳しく学ぶ[1)]。

7.1　線形構造と非線形構造

7.1.1　線形構造と重ね合わせの原理

いくつかの荷重が作用する物体の反力や断面力の値を求めるとき，いままで個々の荷重によって得られた値を重ね合わせて求めることができた。剛体や弾性体の変形についても，材料の応力-ひずみ関係がフックの法則に従うときには，このような重ね合わせができる。例えば，**図 7.1**（a）に示す長さ l，断面積 A，ヤング係数 E の１本の棒に荷重 P_1 および P_2 がおのおの独立に作用しているとき，この棒の伸び δ_1，δ_2 は式 (2.22 a)♠[2)] より

$$\delta_1 = \frac{l}{EA}P_1, \quad \delta_2 = \frac{l}{EA}P_2 \qquad \cdots\text{（a）}$$

つぎに，荷重 $P = P_1 + P_2$ を作用させたときの伸び δ は

$$\delta = \frac{l}{EA}P = \frac{l}{EA}\left(P_1 + P_2\right) = \delta_1 + \delta_2 \qquad \cdots\text{（b）}$$

となり，P_1 と P_2 の個々の伸び δ_1，δ_2 を加え合わせたものとなる。これを図示すると図（b）のようになる。P と δ との間の直線の傾き $k = EA/l$ が P の大きさにかかわらず一定であると

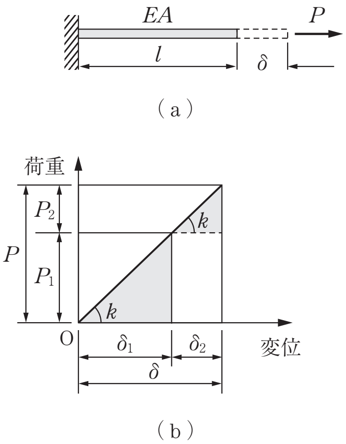


図 7.1　線形構造物と重ね合わせの原理

1）　この章は，本書の中で最も想像力を要するところであり，理解しにくい内容であるが，十分時間をかけてよく考え，その意味をつかんでいただきたい。
2）　本文中の♠はⅠ巻，― 静定編 ―を参照する箇所を表す。

きこれが成立する。このとき，P と δ は線形関係にあるという。

このように“**構造物にいくつかの荷重を同時に作用させたときのある点の変位は，個々の荷重による変位を加え合わせた量に等しい**”。これを**重ね合わせの原理**（**principle of superposition**）といい，これが成り立つ構造を**線形**（**linear**）**構造**という。われわれが実際の設計で考えている構造物のほとんどのものは線形構造であり，本書の第 8 章以下で取り扱う不静定構造物の解析にも，重ね合わせの原理が重要な役割を果たしている。

図 7.2 のはりの例は，分布荷重 q と部材端に外力モーメント M_1，M_2 の合計三つの作用力により生じた支点 A のたわみ角 θ_A を求める問題である。これを図のように三つの荷重状態〔0〕,〔1〕,〔2〕に分けて，それぞれの単一荷重状態での支点 A のたわみ角 θ_{A0}，θ_{A1}，θ_{A2} を求めたうえで，次のような重ね合わせを行うと変位の計算が簡単となる。

$$\theta_A = \theta_{A0} + \theta_{A1} + \theta_{A2} \qquad \cdots(\mathrm{c})$$

また，不静定構造物を解くとき，**図 7.3**（a）に示すように，未知外力 X による変位 v_x を求める場合があるが，このときにも，図（b）のように，$X=1$ とおいて変位 v_1 を具体的に求めておき，これを次式のように X 倍して v_x を表すという方法も，図（c）に示す荷重-変形の線形性を利用したもので，不静定構造の解析（8.2 節参照）にしばしば用いられる。

$$v_X = \underbrace{v_1}_{\text{荷重 } X=1 \text{ によるたわみ}} X \qquad \cdots(\mathrm{d})$$

このように変形すると図（a）の未知外力 X が既知変位量 v_1 の倍数として分離でき，X を式の上で取り扱うのに好都合となる。

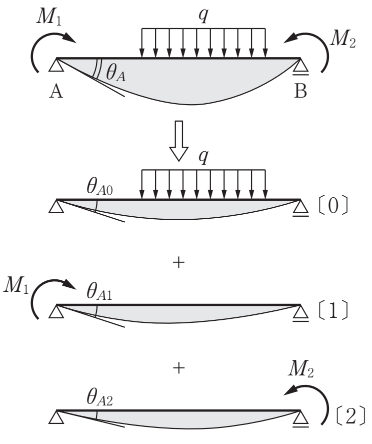


図 7.2　たわみ角の重ね合わせ

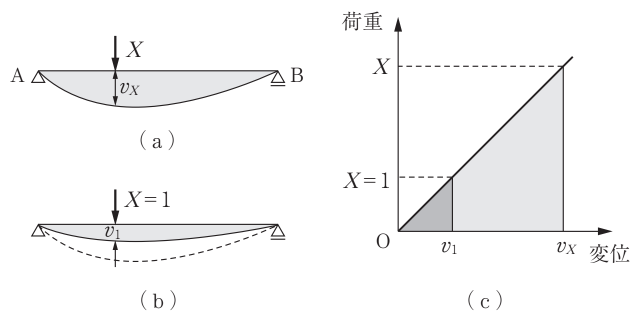


図 7.3　変位 v の比例的増幅

7.1.2　非 線 形 構 造

構造材料の応力-ひずみ関係の例は図 2.33♠および図 2.34♠に示されているが，応力とひずみの関係がフックの法則に従わない場合[1]には，構造物の荷重と変形の間に，もはや比例関係がなくな

1）　材料が初めから弾性材料ではない場合（図 7.11）や塑性域に入った場合（2.6.5 項♠参照）。

り，したがって，重ね合わせの原理が成り立たなくなる。このような構造を**非線形**（**non-linear**）**構造**といい，特に，材料の非線形性によるものを**材料非線形**（**material nonlinear**）という。

ある構造の荷重 P と変位 δ とが**図 7.4** に示すように，$\delta = CP^2$（C＝定数）なる関係にあったとすると，荷重 P_1 または P_2 による変位はそれぞれ

$$\delta_1 CP_1^2, \quad \delta_2 = CP_2^2 \qquad \cdots(\mathrm{e})$$

であり，$P = P_1 + P_2$ による変位 δ は

$$\delta = CP^2 = C(P_1 + P_2)^2 = CP_1^2 + 2CP_1P_2 + CP_2^2$$
$$= \delta_1 + 2\sqrt{\delta_1\delta_2} + \delta_2 \qquad \cdots(\mathrm{f})$$

すなわち，$\delta \neq \delta_1 + \delta_2$ であって，式（b）で得られたような重ね合わせによって，δ は求められないことがわかる。

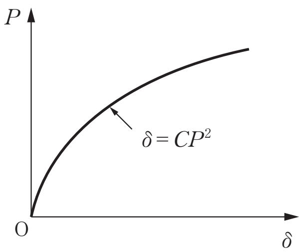
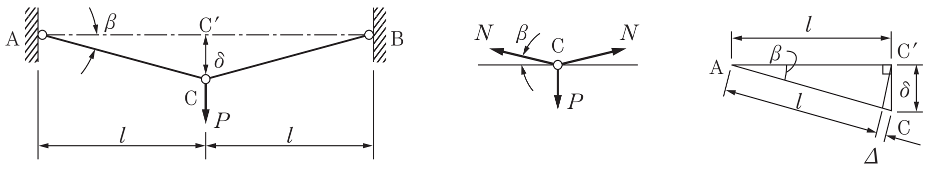


図 7.4　非線形材料による荷重-変位関係

構造材料にフックの法則が成り立つときでも，荷重と変形とが線形にならない場合がある。例として，**図 7.5**（a）に示す構造の荷重 P と変位 δ との関係を調べてみよう。部材は弾性材料からなり，断面積は A とする。荷重方向のたわみ δ を求めるには部材の伸び Δ を知る必要があるから，初めに（1）で P と部材力 N との関係，次いで（2）で Δ と δ との関係，（3）で N と Δ との関係を調べる。図（a）で∠C′AC を β とおく。



（a）　（b）　（c）

図 7.5　幾何学的非線形構造

（1）図（b）の点 C での力のつりあいより，β が微小であるとき $\sin\beta = \delta/l$ とおけるから

$$N = \frac{P}{2} \cdot \frac{1}{\sin\beta} \fallingdotseq \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{\delta} \qquad \cdots(\mathrm{g})$$

（2）図（c）の幾何学的関係より（第 5 章 Coffee Break♠，式（b）参照）

$$\Delta = \sqrt{l^2 + \delta^2} - l = l\left\{1 + \left(\frac{\delta}{l}\right)^2\right\}^{1/2} - l = l\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{l}\right)^2 + \cdots\right\} - l \fallingdotseq \frac{\delta^2}{2l} \qquad \cdots(\mathrm{h})$$

（3）フックの法則 $\sigma = E\varepsilon$ より（$\sigma = N/A,\ \varepsilon = \Delta/l$）

$$\frac{N}{A} = E\frac{\Delta}{l} \qquad \cdots(\mathrm{i})$$

式（g），（h）を式（i）に代入して整理すると結局，次式を得る。

$$P = \frac{EA}{l^3}\delta^3 \qquad \cdots(\mathrm{j})$$

上式から，図 7.5（a）の構造では荷重 P と変位 δ とは比例しないことがわかる。したがって，これも非線形構造であり，構造の幾何学的状態によって生じるので，このような非線形性を特に，

幾何学的非線形（geometrically nonlinear）という。この種のほかの構造例として，軸方向圧縮力を受ける棒の横方向変形の例があり，変形の影響を力のつりあい式の中に考慮しなければならない（その詳細は第 11 章“柱の座屈”で学ぶ）。

以上，重ね合わせの法則が成り立つためには

（1）構造材料がフックの法則に従うこと，のみならず

（2）断面力や変形が作用力に比例する線形構造であることが必要となる。

実際の構造物では，部材の一部が降伏し始めたときから材料非線形となり，また変形も増大するから，幾何学的にも材料学的にも非線形となって，図 1.10♠に示したような最終崩壊に至る。このような非線形挙動は今日では実験やコンピュータ解析によって追跡可能となっている。

7.2　エネルギー保存の法則

静定ばりや静定トラスでは，力のつりあい式のみを取り扱えばよかったが，力と変位の両者を同時に考える必要があるときには，力と変位の積，すなわち，**仕事**（**work**）という量を用いると非常に便利になる。物体に力が作用して変形すると，外力によって仕事がなされると同時に，物体中にも変形によってこの仕事と同じ大きさのエネルギーが蓄えられる。

エネルギー（energy）とは，ある物体の物理的あるいは化学的状態の変化によって仕事に変換できる量であり，仕事そのものではなく，“仕事をする能力”である。われわれが知っているエネルギーの中には，熱エネルギー，運動エネルギー，位置エネルギーなどがあるが，静力学で取り扱うエネルギーは，主として外力や内力のなす仕事およびばねや弾性体が変形したときに蓄えられるひずみエネルギーのみを考え，物体の運動や熱の発生，損失は考えない。自然界におけるエネルギー保存の法則[1]とは，すでに物理学で学んだように“**エネルギーの出入りのない，ある系の中で，エネルギーの総和は常に一定である**”というものである。

図 7.6（a）の片持ばりを例にエネルギー保存の法則を考えてみよう。このはりは長さ l，曲げ剛性 EI で自由端 A に荷重 P が作用し，変位 v が生じているとする。このような変形を生じさせるためにはなんらかのエネルギーを消費したはずであり，それが外力のなした仕事に相当する。エネルギー保存の法則により，いま考えている系の，外力により消費されたエネルギーに等しい量のエ

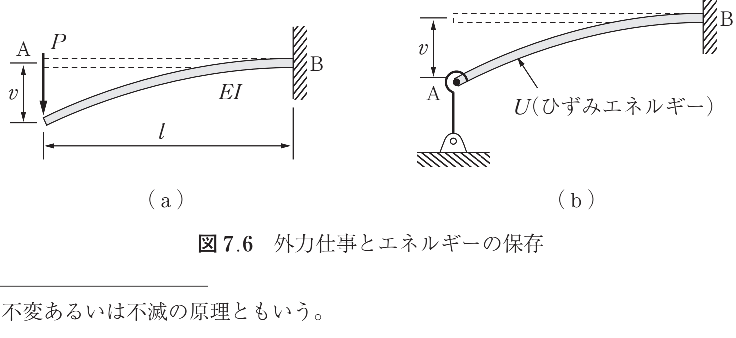


図 7.6　外力仕事とエネルギーの保存

1）　エネルギー不変あるいは不滅の原理ともいう。

ネルギーが変形後のはりの中に蓄えられることになる。したがって，もし図（a）のたわんだはりの自由端を，図（b）に示すようにフックにより固定して荷重を取り除き，後日，必要なときにフックをはずすと，このエネルギーを取り出すことができる。すなわち，初めに与えた外力仕事と同じ大きさの仕事を逆向きに行わせることができる。この逆向きの仕事は，はりの内力による仕事であり，これを V とおくと外力仕事 W と大きさが等しく，向きが逆であるから

$$V=-W \quad \text{あるいは} \quad W+V=0 \tag{7.1}$$

となる。すなわち“内力仕事と外力仕事の総和は 0 である”というエネルギー保存の法則が成り立つ。

図 7.6 の変形したはりの中に蓄えられたエネルギーは弾性体がひずむことによって蓄えられるので**弾性ひずみエネルギー**[1)]，または単に**ひずみエネルギー**（**strain energy**）という。また仕事をしていないが仕事をする潜在能力（ポテンシャル）を有しているので，これを**ポテンシャルエネルギー**[2)]（potential energy）ともいう。図（b）に示したように物体内に蓄えられたひずみエネルギーを U とおくと，これが外力のなした仕事に等しいから，エネルギー保存則は次のように書くこともできる。

$$W=U \tag{7.2}$$

上式は“**外力によってなされた仕事は物体内のひずみエネルギーとして蓄えられる**”ということを意味している。式（7.1），（7.2）より $U=-V$ の関係がある。外力仕事 W は，与えられた外力とその方向の未知の変位 v との積で表されるから，もし，物体に蓄えられるひずみエネルギー U が計算できれば，これが W の大きさと等しくなり，変位 v が求められるはずである。このような方法がエネルギー保存則（エネルギー原理）によって構造物の変位を求める基本的な考え方である。

7.3 外力仕事とひずみエネルギー

7.3.1 外 力 仕 事

仕事とは物体に作用する**力**の大きさと，力の作用点における**作用方向の変位**との積で表されるから，ある変位点における力を P_x，力の方向の微小変位量を dv とすると，この微小変位の間になされる仕事 dW は次式で与えられる。

$$dW=P_x dv \tag{7.3}$$

これは**図 7.7** の斜線で示した柱状部分の面積を表している。

弾性体では作用荷重 P_x と変位 v_x との間に比例関係が成り立つので，この比例定数を k とおけ

1） 外力によって生じた構造物内の応力が材料の弾性限度以内である場合のひずみエネルギーを考えている。この場合は外力を取り去るとひずみエネルギーも消失する。もし弾性限度以上のひずみが生じたときには塑性ひずみエネルギーとなり，その大部分は材料の塑性変形のために費やされてしまう。

2） ポテンシャルとは本来，潜在能力をいう。ポテンシャルエネルギーは仕事をする能力であって仕事そのものではない。このほか，ダムに蓄えられた水などの位置エネルギーもある。また，外力の位置エネルギーを含めていう場合もある。

索　　引

【あ】

アーチ
　arch　79
アーチクラウン　80
アーチ軸線　80
アーチリブ
　arch rib　80
圧力線
　pressure line　82
安定なつりあい
　stable equilibrium　115

【い】

板のねじり剛性
　torsional rigidity of plate　131
一端がヒンジの部材
　のたわみ角式　98
一端自由，他端固定の柱　117
一端単純支持，他端固定の柱　118

【え】

エネルギー原理
　energy principle　43
エラスティカ
　elastica　123

【お】

オイラー曲線
　Euler curve　121
応力法　56
温度変化　22
　――のあるラーメン　106

【か】

外的不静定トラス　71
回転半径
　radius of gyration　120
角方程式　108, 109
重ね合わせの原理
　principle of superposition　2
荷重項
　load term　65, 96
カスチリアノの第一定理　35
カスチリアノの第二定理　36, 61
カスチリアノの定理　34
仮想仕事　11
　――の原理　11
仮想ひずみ　11
仮想ひずみエネルギー　11
仮想力の原理　11
ガラーキン法　48
関数の直交性　47

【き】

起拱線　80
基　線　24
級数解法　135
ギヨン・マソネー
　Guyon-Massonnet　141
近似解法　61

【く，け】

クラペイロンの定理　113
傾斜部材のあるラーメン　110
形状関数
　shape function　52
限界荷重
　critical load　114
限界細長比
　limit slenderness ratio　121

【こ】

格子構造　141
高次不静定構造　65
剛　比
　stiffness ratio　97
固定アーチ　89
固定端モーメント
　fixed end moment　96
固有値問題
　eigenvalue problem　115

【さ】

最小仕事の原理
　principle of least work　43
最小ひずみエネルギーの原理
　principle of minimum strain
　energy　43, 61
最小ポテンシャルエネルギー
　の原理
　principle of minimum
　potential energy　42
材端モーメント
　end moment　94
材料非線形
　material nonlinear　3
座　屈
　buckling　114
座屈荷重
　buckling load　114
サン・ブナンのねじり定数　144
残留応力　126

【し】

仕事
　work　4
実荷重　60
支点移動のあるラーメン　106
支点変位の影響　76
初期たわみ
　initial deflection　123
初期変形　123
　――のある柱　123

【す】

水平反力　79
スパン　81
スパンドレル・ブレースド・
　リブアーチ　80
スプリングライン
　spring line　80

【せ】

静定基本系　58
静定基本構造　58
セカント式
　secant formula　123
積分公式　23
接線係数　127
接線係数理論
　tangent modulus theory　127
節点
　nodal point,　joint　93
節点回転角
　angle of nodal rotation　93
節点角　93
節点変位
　nodal displacement　50
節点方程式
　nodal equation　99
節点力
　nodal force　50
線形（linear）構造　2
全体変形条件式　109
せん断力の影響線　75, 76

【そ】

層回転方程式　111
相対荷重系　73
相対構造　73
相反定理　39

層方程式
　shear equation　100

【た】

対称アーチ　80
タイド・アーチ　80, 90
たわみ角式
　equation of slope deflection　94
　――の基本式　95
たわみ角法
　slope deflection method　93, 94
　――の一般式　97
単位荷重法
　unit-load method　19, 61
弾性ひずみエネルギー　5
弾性方程式
　elastic equation　60, 61
弾性方程式法　61
断面 2 次極モーメント
　polar moment of inertia of area　144
断面 2 次半径　120

【ち】

中立なつりあい
　neutral equilibrium　115
中立面
　neutral plane　129
超越方程式
　transcendent equation　119
直交異方性平板
　rectangular anisotropic plate　129, 139

【て，と】

伝達モーメント　103
等価静定構造　59
等方性平板
　isotropic plate　129
　――の基礎方程式　133
　――の曲げ剛性
　flexural rigidity of isotropic plate　131
トラス・アーチ
　trussed arch　80
トラスの影響線　77
トルク
　torque　144

【な，に】

内的不静定トラス　72
ニールセン橋
　Nielsen bridge　91

【ね】

ねじり剛性
　torsional rigidity　144
ねじり定数　144
ねじりモーメント
　torsional moment　144
ねじり率
　torsional ratio, angle of twist per unit length　144

【は】

ばね支持されたはり　69
反力の影響線　76

【ひ】

ひずみエネルギー
　strain energy　5
非線形（non-linear）構造　3
非対称アーチ　80
微分方程式　61

【ふ】

不安定なつりあい
　unstable equilibrium　115
フィーレンディール橋　92
複数部材からなる構造　66
部材回転角　94
部材角　94
不静定力　59
不静定力（反力）の影響線　75
不静定力法
　statically indeterminate force method　56
不等脚ラーメン　104
フーリエ級数　47
ブレース・ドリブ・アーチ　80

【へ】

平板の解法　135
ベッティ（Betti）の相反定理　39
変形条件式　60
変形法
　displacement method　57
偏心圧縮柱　121
変断面連続ばり　70
　――の影響線　77
変分原理
　variational principle　43

【ほ】

補仮想外力仕事　17
補間関数
　interpolation function　52
補剛アーチ　80, 91
細長比
　slenderness ratio　121
ポテンシャルエネルギー　5

【ま，み，も】

曲げモーメントの影響線　74, 76
ミューラー・ブレスラウの原理　74
モールの定理　61

【ゆ】

有限要素法
　finite element method, FEM　49
有効座屈長
　effective buckling length　118
有効ねじり剛性
　effective torsional rigidity　141

【よ】

要素剛性行列　54
要素剛性マトリックス
　element stiffness matrix　54

【ら】

ライズ比　81
ランガー桁
　Langer girder　91

【り】

リッツ（Ritz）の方法　45
両端単純支持柱　115

【れ】

レイリー・リッツの方法
　Rayleigh-Ritz method　45
連続トラス　71

【ろ】

ローゼ桁
　Lohse girder　91

1 次不静定ばり　58
2 次不静定ばり　63
2 ヒンジアーチ　86
3 ヒンジアーチ　85
3 連モーメント定理　113
Π 形橋　92

── 著者略歴 ──

1966年　防衛大学校土木工学科卒業
1972年　名古屋大学大学院博士課程修了
1974年　工学博士（名古屋大学）
　　　　愛知工業大学講師（土木工学科）
　　　　カナダ・アルバータ州立大学研究員
1976年　愛知工業大学助教授
1989年　愛知工業大学教授
　　　　（1998年　耐震実験センター設立，センター長）
2013年　愛知工業大学名誉教授
2013年　青木工学研究所所長
　　　　現在に至る

例題で学ぶ 構造力学Ⅱ
── 不静定編 ──
Structural Mechanics ── Learning from Exercise ──
── Statically Indeterminate Structure ──
Ⓒ Tetsuhiko Aoki　2015

2015年12月17日　初版第1刷発行　★

検印省略

著　者　青(あお)　木(き)　徹(てつ)　彦(ひこ)
発行者　株式会社　コロナ社
　　　　代表者　牛来真也
印刷所　新日本印刷株式会社

112-0011　東京都文京区千石4-46-10
発行所　株式会社　**コ　ロ　ナ　社**
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo　Japan
振替00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)
ホームページ　http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978-4-339-05248-0　（森岡）　（製本：SBC）
Printed in Japan

本書のコピー，スキャン，デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられております。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は，いかなる場合も認めておりません。

落丁・乱丁本はお取替えいたします