事例・演習でよくわかる水理学

― 基本をイメージして理解しよう ―

篠田　成郎
藤田　一郎
児島　利治
寶　　　馨
共著

コロナ社

ま　え　が　き

日常生活で水を使うことを考えてみましょう。家で水道の蛇口をひねると水が出てきます。何故でしょう。都市水道だと，浄水場から配水施設に水を送りそこから管路で各家庭に上水道が導かれています。あるいは，自分の敷地に井戸を掘ってポンプでくみ上げて家の水道に水を送り込んでいる場合もあることでしょう。水道管の太さは？　水圧は？　使ったあとの水はどこに行くのでしょうか。下水として流し，下水管を通って水質浄化のプロセスを経て下水道へと送られていきます。下水道から下水処理場に送られ，下流の川に放出されます。その時には管路ではなく，水面が大気と触れながら水路を重力で流れ下ります。その場合の水路の大きさ（幅，深さ），形状は？　川に出た水はどのように流れ下って行くのでしょうか。時折起こる洪水は大災害をもたらしますが，どのように防御したら良いのでしょう？　洪水の水位は？　堤防の高さは？

水理学（hydraulics）は，こうした我々の身の回りの水に関する諸問題に答えを与えてくれる学問分野です。上述したことからわかるように土木工学（civil engineering）の大きな一分野を占めます。一方，工業プラントや工場内で水を使う場合もあります。敷地内に管路のネットワークが張り巡らされています。そのような機械工学で水を扱う場合は，水理学は「水力学」と呼ばれることもあります。また，水は流体ですから，油のようなどろりとした密度の高い液体や，空気のような密度の低い気体などとも統一的に取り扱うことができます。この場合は，さらに一般的に流体力学（fluid dynamics）といいます。均質の流体ではなく，水と油が同時に流れ下る場合，水に土砂や流木などが混ざった流れも水理学や流体力学の枠組みで考えることができます。

本書は，教科書として，大学や高等専門学校で学ぶ学生の皆さんを対象に，わかりやすく水理学について説明しています。直観的理解が得やすいように事例や演習をたくさん採用するとともに，図など視覚的要素をなるべく多く取り入れ，頭の中でイメージしやすくしました。また，水理学になじみやすいように関連したエピソードを紹介するコラムも各章に取り入れています。水理学は，土木技術系の公務員試験，入社試験，大学院の入学試験で必修とされる重要科目です。水に関するこの基礎科目をしっかり学んで，皆さんの生活をまさに潤いのあるものしていただきたいというのが私たち著者の願いです。

2015 年 8 月

著者　篠田 成郎
藤田 一郎
児島 利治
寶　　馨

本書の構成と使い方

水理学は土木工学の分野において重要な基礎科目の一つであり，必修科目となっている。しかし，学生にとっては，多くの基礎科目の中で最も難しいとの印象が持たれている。水理学では数式に基づく現象の取り扱いが中心となっており，数学的な展開の難しさが，こうした原因の一つとなっている。また，水理学における流れの解析や理解には基礎的な考え方の積み重ねが欠かせず，途中で躓(つまず)くとつぎの部分がわからなくなってしまう。理解不足のままつぎに進むと，さらにわからないことが増えてしまい，悪循環に陥る。

一方，水理学は土木工学の基礎科目の一つであるものの，土木工学を学んだ卒業生の中で水理学に関わる割合はそれほど高くはない。それでは，なぜ水理学が土木工学の中の必修科目になっているのであろうか。土木工学の技術者は近年の水災害・土砂災害の頻発や様々な環境問題に対応しなければならず，水理学に関わる専門技術者でなくても，水の流れに関する基本的な知識と理解は不可欠である。また，これ以上に重要なことは，水理学の基礎的な理論体系の理解が論理的思考能力を養うことに極めて効果的となる点である。上述のように，水理学における様々なトピックスは相互に関連し合い，こうした理解の積み重ねによって初めて水理学の導入部分を理解できるようになる。また，数式によるそれぞれの理論展開でも，単に数学的な扱いをするだけでなく，現象を説明するために一つずつの数式の意味とその解釈が重要であり，これらを理解しながら論理的に考え積み上げていくことこそが論理的思考のトレーニングになっている。水理学では，覚える（暗記する）べきことはほとんどない。水理学で学ぶことの大部分には必ず「理由」があり，その理由を理解することによって，暗記が不要になるためである。それぞれに理由を持ちながら繋がり合っている知見を論理的に積み重ねることが水理学の理解そのものとなる。

水理学では，質量保存則，運動量保存則およびエネルギー保存則という三つの力学の基本法則を水の流れに適用して，流れの現象を記述することを学習する。その際，数学や力学での考え方を道具として，様々な現象の理解が図られる。水理学の中での数学的理論展開は華麗であり，知的好奇心や興味を満足させるものである。しかし，この部分を重視することは，その難解さゆえに，初学者にとって逆効果になることも少なくない。著者らは30年近く水理学やその演習の授業を担当してきた中で，様々な学生の躓きや理解不足を解消し，興味を持って意欲的に取り組んでもらうためにどうすれば良いかを考え，毎回の授業の中で試行錯誤を続けてきた。こうした経験から，初学者にとっての水理学学習のポイントは流れの現象およびこれを表現する数式のイメージ化にあると考えている。この中には，理論展開の見通しを明確にすることや身近に存在する流れを想定した解析方法の理解も含まれる。

そこで，本書では，つぎの四つの点を重視した解説を試みることにした。

1）力学の基本法則から出発し，流れの様子を頭の中にイメージとして形作れるようにする。

2）流体運動そのものを可視化することに留まらず，流れを支配する基本的な関係を数学的および力学的に把握する考え方を図を用いて視覚的に示すことによって，流れの様子のイメージ化を図る。

3）数学的・力学的な厳密さは追求せず，考え方そのものを頭の中でイメージ化できるように解説する。

4）身近な事例や想像しやすい例えを多用することにより，流れの解析における考え方を論理的につなぎ合わせられるようにする。

こうした解説方針と併せて，理解を助けるために多くの例題や演習問題などを掲載した。原則的に，各章は以下の七つのパーツから構成される。

□確認クイズ：各章の冒頭において，そこで学ぶ要点をクイズ形式で列記したものであり，学習前にこれから学ぶべき目標を明確にするとともに，学習後にその習得状況を確認するために用いる。なお，各クイズの解答は，本文中に記載してある。

□本文：各章の学習内容を解説している。

□例題：代表的または具体的な解析例を解説するだけでなく，本文での学習内容を発展的に理解することを目的とする。

□課題：本文での学習内容の理解を確実にしたり，発展させるために用いる。学習者自らが考えることを期待して，解答は付けていない。

□脚注：より詳細かつ発展的な学習事項について本文での解説を補足している。初学者は読み飛ばしても良い。

□コラム：本文での解説の理解を助けたり，学習者の興味を引き出すために用いる。

□演習問題：各章末において，その章における代表的な問題を掲載する。演習問題の解答は，コロナ社 Web サイトの本書書籍ページ（http://www.coronasha.co.jp/np/isbn/9784339052466/）の関連資料から閲覧・ダウンロードできるようにした（コロナ社 Web サイトのトップページの書名検索からもアクセス可能）。

本書は基礎編と応用編に分かれている。基礎編では，主に粘性を無視した完全流体を対象としており，流れの基礎的な解析法について学ぶ。このため，上述の力学の基本法則に基づく考え方を基礎とした理論展開に重点を置いて解説している。応用編では，現実に存在する粘性流体を対象とした実際的な流れの解析法を学ぶ。特に，管路流れや開水路流れといった水理学における応用範囲について，できるだけ多くの実例を示しながら解説する。また，巻末には，付録として次元解析および水理学で必要となる数学についてまとめている。本編を学習する中で，適宜参照しながら学習すると有用であろう。

目　　　　次

【基礎編】

1　水理学を学ぶ目的　―水理学の対象を理解する―

2　流れの基礎理論　―水理学を構成する理論体系をイメージ化する―

3　静止流体の力学　―流れの基礎式の応用として静水力学の原理を理解する―

4　基本的な流れの解析法　―流れの基礎的な解き方を理解する―

【応用編】

5　粘性流体の運動　―実際の流体における性質を理解する―

6　管路の定常流　―管路流れの性質と解析法を理解する―

7　開水路の定常流　—水路や河川での流れの解析法を理解する—

【付　録】

A　次　元　解　析

B 水理学で必要となる数学

コ ラ ム

【基礎編】

1 水理学を学ぶ目的

水理学の対象を理解する

確認クイズ

1.1　力学の基本法則を三つ挙げよ。

1.2　時間的に状態が変化する流れをなんと呼ぶか。

1.3　1次元流れの連続式を記せ。

1.4　粘性係数 μ を動粘性係数 ν と密度 ρ を用いて記せ。

1.5　水の動粘性係数の値はおよそいくらか。

1.6　粘性流体中のせん断応力を求める法則をなんと呼ぶか。

1.7　粘性係数の単位を記せ。

1.8　速度勾配の次元を記せ。

1.9　せん断応力の単位を記せ。

1.10　風船を追跡して流れの様子を調べるのはオイラーあるいはラグランジュのいずれの方法か。

1.11　流線と流跡線が一致するのはどんな流れか。

1.12　流線の式が満たすべき条件を記せ。

1.13　2次元場の流跡線の方程式を記せ。

1.14　2次元流れにおける流体の加速度を表す式を記せ。

1.15　加速度における移流項が発生しない流れはどんな流れか。

1.16　加速度における非定常項が発生する流れはどんな流れか。

1.1　身近な水の流れ

水理学は水の理（ことわり）の学問と書かれるが，土木系の教育では，おもに水の力学的性質について取り扱われることが多い。河川・海岸の堤防や給排水のパイプ網など，土木工学分野では，水の流れに関係した社会基盤施設の設計・維持管理が重要になるためである。こうした水の流れを制御する構造物のみならず，われわれの身の回りにはいくつもの水の流れが存在する。家庭や学校の中，街の中，自然の中など，気をつけて見回すことで，多くの興味深い現象が発見できるはずである。

課題 1.1

身近に存在する水の流れについて，デジタルカメラなどで写真撮影するとともに，その現象と水理学との関係について簡単に説明せよ。

水理学を学ぶ目的は，一般には，水の流れに関する現象を理解し，実際問題への応用力を習得することにある。水の流れは力学法則に支配される。水理学では，きわめて単純な力学の基本法則（**質量保存則**，**運動量保存則**および**エネルギー保存則**）を基に，さまざまな流れの現象を統一的に解明する方法を学ぶ。こうした解析手法は基本法則の上に論理的に積み上げられており，その考え方を修得することは，現実の諸問題を解決するために必要となる知識だけでなく，論理的思考力や解析・計算能力を身に付けるうえでも効果的と考えられる。このため，水理学の学習は，水に関わる現象を扱う土木技術者に必須となる知的基盤を形成するだけでなく，幅広い分野において欠かせない論理的展開能力の養成に役立つことも期待される。これこそが，水理学を学ぶ最も重要な目的となっている。

このように，水理学では，力学の基本法則に基づく数学的理論展開が重要な手法となる。数学はすべての工学的分野において重要かつ有効なツールとなるが，初学者にとっては，その展開過程そのものに捕らわれるあまり，理論展開の目的や見通しを見失うことが少なくなく，理解そのものを困難にするケースも発生する。初学者がつまずきやすいこうしたケースでは，身近な現象を例としながら，流れのイメージを絶えず思考することにより，数式による理論展開の道筋を理解できるようになることが多い。このため，本書では，具体的な流れを頭の中に思い描きつつ，数式によるイメージ化のポイントを重点的に解説することにより，上述の論理的思考力を養えるようにすることを最大の目標とする。

1.2　流れの具体例と保存則

図 1.1 は，蛇口から水が流れ出る日常的に目にする様子を示している。こうした流出水の表面は，部分的には円筒形となっているが，注意深く観察すると，その断面（円）の直径は下方ほど小

さくなっていることに気がつく。落下とともに流出水が細くなるのはどうしてであろうか？　以下，この身近な現象を例として，水理学における解析の基本的な考え方について説明してみる。

1.2.1　質量保存則

図 1.2 は，図 1.1 の写真における水の流れを模式的に示したものである。まず，蛇口から流れ出る水の様子は，時間的に変化しないと考える。この状態を定常といい，定常な流れを**定常流**（steady flow）と呼ぶ。定常流では，時間経過があっても，流れの速度（流速）などの物理量は特定箇所において変化しない。一方，時間経過とともに流速や圧力などが変化する流れを**非定常流**（unsteady flow）という。

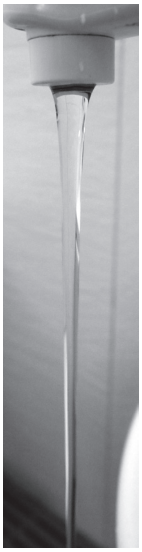


図 1.1　蛇口から流れ出る水の写真

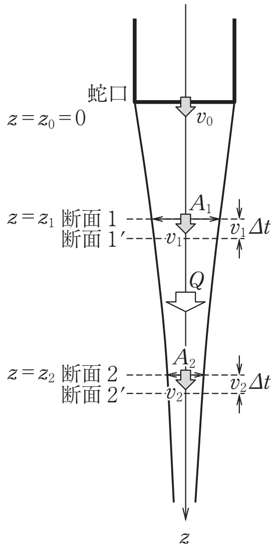


図 1.2　蛇口から流れ出る水の模式図

図 1.2 に示す定常な流れを断面 1 で切り取った箇所の断面積を A_1，流速を v_1 とする。断面 1 を通過した水が，時間 Δt 経過後に断面 1′ を通過するとき，Δt の時間で断面 1 と断面 1′ の間の水が流れたと考えられる。Δt が微小で断面 1′ での断面積が断面 1 と変わらないとみなせば，これらの断面間の水の体積は $A_1 v_1 \Delta t$ で求められる。断面 1 と断面 1′ の間の水の密度（単位体積当りの質量）を ρ_1 とすれば，この間の水の質量は $\rho_1 A_1 v_1 \Delta t$ と表される。一方，断面 2（断面積 A_2，流速 v_2，密度 ρ_2）と断面 2′ の間についても同様に考えることにより，時間 Δt でのこの間の水の質量は $\rho_2 A_2 v_2 \Delta t$ と表される。すなわち，断面 1 と断面 2 で切り取られる水の管に対して，Δt の時間で断面 1 から流入する水の質量が $\rho_1 A_1 v_1 \Delta t$ で，断面 2 から流出する水の質量が $\rho_2 A_2 v_2 \Delta t$ となっていると考えられる。断面 1 と断面 2 との間の水の質量は変わらないため，流入質量と流出質量は同じとなるはずであり

$$\rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t \tag{1.1}$$

が成り立ち，これより，次式の関係を得る。

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \tag{1.2}$$

式（1.2）の左辺および右辺は，それぞれ単位時間内に断面 1 および断面 2 を通過する水の質量を表している。断面 1 および断面 2 は任意の場所に設けられているため，どの断面でも水の質量が変わらないという質量保存則（law of mass conservation）を表すことにほかならない。

1.2.2　流量の定義と連続式

水の密度が各断面で一定のときには，式（1.2）の両辺を $\rho = \rho_1 = \rho_2$ で除すことができる。

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \tag{1.3}$$

式（1.3）の両辺は，単位時間内に各断面を通過する水の体積を表し，**流量**（discharge）と呼ばれ

コラム

水　道　橋

古くから「ローマは一日にしてならず」，「すべての道はローマに通ず」，「水を治める者は天下を治む」といわれる。いずれも国を治めてきた為政者をたたえる言葉である。

ローマ帝国が栄えたのは，BC 27 年から AD 330 年ごろである。帝国内の大都市には水供給施設が必要であり，遠く離れた水源から水を運んでいた。じつはさらに前の BC 4 世紀くらいから，そのような水道が存在したことが知られている。現代は，水をポンプを使って高いところに上げ，重力を用いて水道管で各家庭に配水しているが，2000 年以上も前のローマ時代にはそのような電動式のポンプはもちろんない。したがって，何十 km も離れた標高の高い水源からローマに水を引くことになる。**ローマ水道**と呼ばれるこの水道事業は，土木史の中で最も偉大な業績である。世界に冠たるローマの人口が欲する水を満足するために 11 のローマ水道があったという。

数十 km も離れた水源から水を引く場合，途中に，山や谷や盆地が存在する。山ではトンネルを掘らねばならない。低いところでは水を持ち上げてやらねばならないし，川を横切る水路を作らねばならない箇所もある。そのような場所では，橋を作り，橋の上を水が流れるようにしなければならない。これが水道橋（すいどうきょう）である。

ローマ水道の技術はすばらしく，水源の水量・水質を調べ，トンネルや水道橋で水を運ぶ場合，その勾配は周到に測量された。例えば，1/3 000 の勾配で数十 km もの距離を運んだ。また，政敵に破壊されないように，あるいは，水が汚れないように，地下を通したり，地表や水道橋の上を流す場合は，覆いをかぶせたりしていた。現代のような金属製の水道管のない時代であるから，石づくりの水路であった。自然水源，自然重力を利用した巨大な土木構造物である。

こうしたローマ水道の遺構は，現在も残っていて世界遺産になっている。例えば，フランス南部のポン・デュ・ガール，スペインの都市セゴビアのローマ水道がある。そして，わが国にも水道橋は存在する。有名なのは，熊本の通潤橋，京都・南禅寺の水路閣である。通潤橋は長さ 78 m であり，江戸時代（1854 年）に作られた。肥後の石工の技術力の高さを示すものとして土木遺産にも指定されている。水路閣は，長さ 93.2 m で琵琶湖疏水を京都市街の北部に分水するために 1890 年に田辺朔郎（たなべさくろう）の設計で作られた。東京にも神田上水を引く水路に水道橋があった。これが，現在の水道橋（すいどうばし）という地名の由来となっているそうである。

る。任意断面での流量を Q，断面積を A，流速を v とすれば

$$Q = Av = 一定 \quad ：連続式 \tag{1.4}$$

と表現でき，質量保存則から導かれるこの関係を，水理学では，**連続式**（continuity equation；正確には，1 次元流れの連続式）と呼ぶ。

1.2.3　エネルギー保存則

図 1.1 のように，蛇口から出た水は自由落下している。そこで，質点系の力学と同様に，エネルギー保存則を用いて，各断面での流速を求めてみる。

図 1.2 に示すように，蛇口の先端に原点をとり，鉛直下向きに z 軸を設ける。原点（$z = z_0 = 0$）での流速を v_0，位置エネルギーをゼロとし，断面 1 および断面 2 の座標をそれぞれ z_1 および z_2 とする。このとき，原点，断面 1 および断面 2 における位置エネルギー，運動エネルギーおよび全エネルギーは**表 1.1** のように表される。表中，m は水の質量，g は重力加速度を表す。エネルギー保存則より，全エネルギーは各断面で変わらないため，つぎの関係が成り立つ。

$$\frac{mv_0^2}{2} = -mgz_1 + \frac{mv_1^2}{2} = -mgz_2 + \frac{mv_2^2}{2} \tag{1.5}$$

上式の各辺を m で除して整理すると，各断面の流速がつぎのように求められる。

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gz_1}, \quad v_2 = \sqrt{v_0^2 + 2gz_2} \tag{1.6}$$

これより，任意座標 z における流速 v は次式で表され，蛇口から流出した水は，その落下とともに流速が大きくなることがわかる。

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gz} \tag{1.7}$$

表1.1　各断面における位置エネルギー，運動エネルギーおよび全エネルギー

	位置エネルギー	運動エネルギー	全エネルギー
原点（$z = z_0 = 0$）	$mgz_0 = 0$	$\frac{mv_0^2}{2}$	$\frac{mv_0^2}{2}$
断面 1（$z = z_1$）	$mg(-z_1) = -mgz_1$	$\frac{mv_1^2}{2}$	$-mgz_1 + \frac{mv_1^2}{2}$
断面 2（$z = z_2$）	$mg(-z_2) = -mgz_2$	$\frac{mv_2^2}{2}$	$-mgz_2 + \frac{mv_2^2}{2}$

1.2.4　質量保存則とエネルギー保存則の連立

質量保存則から得られる連続式（1.4）とエネルギー保存則から得られる式（1.7）を連立することにより，任意座標 z における断面積 A を求めてみる。

式（1.4）に式（1.7）を代入すれば

$$Q = Av = A\sqrt{v_0^2 + 2gz} \tag{1.8}$$

が得られる。この式を A について整理すれば，断面積 A が次式で表される。

$$A=\frac{Q}{\sqrt{v_0^{\,2}+2gz}} \tag{1.9}$$

連続式（1.4）より流量 Q は一定であるため，断面積 A は鉛直座標 z だけの関数となり，z の増加とともに単調減少することがわかる。図 1.1 で観察された蛇口からの流出水が落下とともに細くなる現象は，このように，質量保存則とエネルギー保存則によって説明することができる。

課題 1.2

図 1.1 のように観察される蛇口からの流出水が落下とともに細くなる現象を，式を用いずに，言葉だけで説明せよ（数式で表される現象を言葉で説明することにより，数式を具体的なイメージとして捉える訓練となる）。

蛇口から流れ出る水の例のように，水理学では，基本となる法則によって水の流れを解析することが本質となっている。本項の例では質量保存則とエネルギー保存則の二つが連立されたが，これらに加えて，運動量保存則が適用されることも多く，基本的には質量保存則，運動量保存則およびエネルギー保存則の三つの保存則を用いることによる解析が行われる。

1.3 水の性質

水分子は H_2O で表され，水素イオン H^+ と酸素イオン O^{2-} が**共有結合**で強固に結ばれている。また，O に対する二つの H の結合位置が偏っているため，電子的な極性が生じ，水分子同士が強く結合する擬似的な結晶構造を持つことになる。この結合を水素結合と呼ぶ。こうした水分子の連続的な結合構造が，水の持つ性質を形作っている。液体では，水と同様に，一般にこうした結合構造が存在するため，以下で説明する非圧縮性や粘性といった特徴的な性質を示すことになる。

1.3.1 圧縮性

図 1.3 に示すように，ピストンの付いたシリンダー内に流体を入れ，ピストンに力を与えることにより，内部の流体に圧力を加えてみる。この流体が気体の場合には流体を容易に圧縮することができるが，液体の場合にはなかなか圧縮することはできない。こうした圧縮の程度は，流体の体

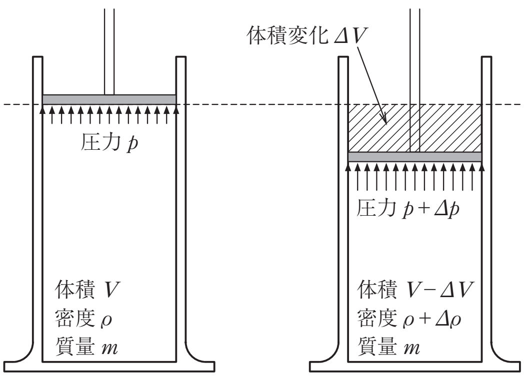


図 1.3　シリンダー内の流体の圧縮

積変化の割合（体積ひずみ）$\Delta V/V$ と加圧量 Δp の比として定義される**圧縮率** α（compressibility）で評価される。

$$\alpha = -\frac{\Delta V/V}{\Delta p} = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp} \tag{1.10}$$

シリンダー内の流体の質量 m は変化せず，流体の密度 ρ は

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{1.11}$$

で表されるので，流体の体積 V は，密度 ρ の関数として，次式で求められる。

$$V = \frac{m}{\rho} \tag{1.12}$$

この式を　微分すれば

$$dV = -\frac{m}{\rho^2}d\rho \tag{1.13}$$

となり，式（1.12）および式（1.13）を式（1.10）に代入すれば，次式を得る。

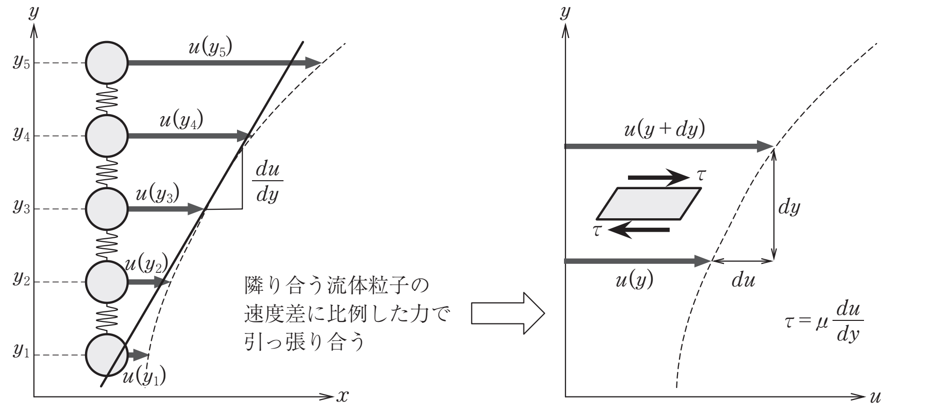
$$\alpha = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp} \tag{1.14}$$

20℃，1 気圧において，空気の圧縮率が 10^{-2} m^2/kN 程度であるのに対し，水は上述のような擬似的な結晶構造を有するため，その圧縮率は 0.46×10^{-6} m^2/kN ときわめて小さく，ほとんど圧縮されない。このように，圧縮率をゼロと扱える流体を**非圧縮性流体**（incompressible fluid）という。非圧縮性流体では，式（1.14）より，圧力変化に対して密度は一定とみなせる。パイプ内での弾性波（圧力波）の現象などを除き，水理学では水の流れを非圧縮性流体として扱うことが一般的であるため，本書では，流体の密度 ρ を一定と扱う。

1.3.2　粘　　性

上述のように，液体を構成する分子には，分子の連続的結合構造に伴い，相互に引き合う**分子間力**が作用している。また，その移動時にはこの分子間力に伴う速度変化が発生する。**図 1.4**（a）は，無数の液体分子からなる仮想的な流体粒子の運動の様子を模式的に表したものである。各流体粒子の速度が異なる場合，流体粒子相互に引き合う力によって，その移動には抵抗が生じる。図 1.4（a）に示す流体粒子を人と考え，隣り合う人同士が手をつなぎながら，異なる速度で歩いている場合をイメージするとわかりやすい。速度の遅い人は速い人から手を引っ張られるため，速度を上げることになる。逆に，速度の速い人は遅い人の手を引っ張りながらも，その速度を下げることになる。このように，それぞれの人の移動に対する抵抗を**粘性**（viscosity）と呼ぶ。

粘性の存在により，人の移動方向に対して平行な方向に力（つないでいる手を引き離そうとする力または引き留めようとする力）が発生する。これをせん断力といい，この力は手をつないでいる人の速度差に比例すると考えられる。図 1.4（b）に示すように，人の歩く速度を u として，歩く方向に対して垂直に y 軸を設けると，速度差は y 方向の速度勾配 du/dy で表されるため，両者の



（a）　粘性が作用する流体粒子の運動　　　（b）　速度差に起因したせん断応力の発生

図 1.4　流速の空間変化率とせん断応力との関係

間の単位断面積当りに作用するせん断力，すなわち，せん断応力 τ は比例係数 μ を用いて，次式のように表せることになる。

$$\tau=\mu\frac{du}{dy}\quad \text{：ニュートンの粘性法則} \tag{1.15}$$

比例係数 μ を**粘性係数**（coefficient of viscosity）と呼び，流体の種類および温度によって異なる値となる。式（1.15）は**ニュートンの粘性法則**（Newton's law of viscosity）と呼ばれる。粘性係数を，次式のように，流体の密度 ρ で割ったものを**動粘性係数** ν（coefficient of kinematic viscosity）という。

$$\nu=\frac{\mu}{\rho} \tag{1.16}$$

質量，長さおよび時間の次元をそれぞれ［M］，［L］および［T］と表すとき，式（1.15）より粘性係数 μ の次元は［$ML^{-1}T^{-1}$］となる。一方，動粘性係数 ν の次元は式（1.16）より［L^2T^{-1}］となることがわかる。**図 1.5** に水の場合の温度 T と密度 ρ，粘性係数 μ および動粘性係数 ν の関係を示す。水の密度は水温 4℃で最大となる，上に凸のグラフを描くが，粘性係数は水温の増大に

コラム

ニュートン流体と非ニュートン流体

式（1.15）で示されるニュートンの粘性法則は，せん断応力が速度勾配に比例することを表している。しかし，現実の流体では，こうした比例関係が成り立たないものも存在する。蜂蜜やペンキなどは，これらの液体が入った容器をある程度傾けなければ流出してこない。下水汚泥や川底に堆積しているヘドロも同様な性質を持つ。このようにある一定以上の力を加えることで流動する流体を**ビンガム流体**と呼ぶ。また，マヨネーズや溶かしたチーズなどは，大きな力を加えることで流動性を増し，速度勾配とせん断応力が比例するようになる性質を持っている。こうした流体を**擬塑性流体**と呼ぶ。このように，ニュートンの粘性法則に従う流体を**ニュートン流体**，従わない流体を**非ニュートン流体**と呼んで区別される。

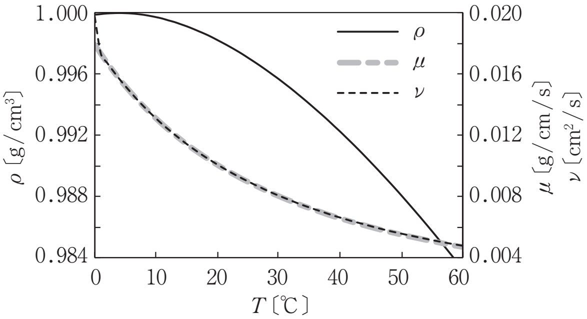


図 1.5　水温 T に対する水の密度 ρ，粘性係数 μ および動粘性係数 ν の関係

伴って単調に減少する。しかし，水温に対する粘性係数の変化率に比べて密度の変化率はきわめて小さいため，式（1.16）で定義される動粘性係数も粘性係数と同様に単調減少となる。

一般に，実在する流体は粘性を持っている。しかし，粘性の影響がそれほど大きくなく，これを無視して扱うことにより，流れを数学的に比較的容易に解析できるようになるケースがある。また，その解析結果は多くの現象を説明できることが知られている。こうした粘性を無視した流体を**完全流体**（perfect fluid）と呼ぶ。完全流体は実際には存在せず，理想的な流体といえるため，**理想流体**（ideal fluid）とも呼ばれる。これに対して，粘性を考慮した実在する流体を**粘性流体**（viscous fluid）あるいは**実在流体**（real fluid）という。本書では，まず最初は完全流体を対象とした流れの解析法について述べ，5 章以降で粘性流体を扱う。

1.4　流れの表現方法

1.4.1　連続体の運動

図 1.4 に示したように，流体の運動を扱う場合には，ブラウン運動を伴う分子の動きではなく，無数の分子の集合からなる仮想的な流体粒子の運動に着目する。水理学では，膨大な数の水分子から構成される**水粒子**を仮定し，これに力学法則を適用する。こうした流体粒子または水粒子は，流れの中で隙間なく埋め尽くされており，連続体として取り扱うことができる。

流体粒子の運動は質点の運動と同様に扱うことができるが，その集合である連続体としての運動を記述する場合には，どの流体粒子に着目するべきなのかということや，場所・時間で変化する流体粒子の動きをどの場所・どの時間で評価するべきかという点において，工夫が必要になる。特定の流体粒子に着目してその運動を表現することを**ラグランジュ表示**（Lagrangian description）と呼び，特定の時間（ある瞬間）における流れの中の各流体粒子の運動を表現することを**オイラー表示**（Eulerian description）と呼ぶ。これら 2 種類の表示方法は，それぞれ**ラグランジュの方法**および**オイラーの方法**と呼ばれ，流れの解析目的に応じて使い分けられる。両者の違いをイメージとして掴(つか)むために，自動車の速度取り締まりを例として，**図 1.6** に示す。

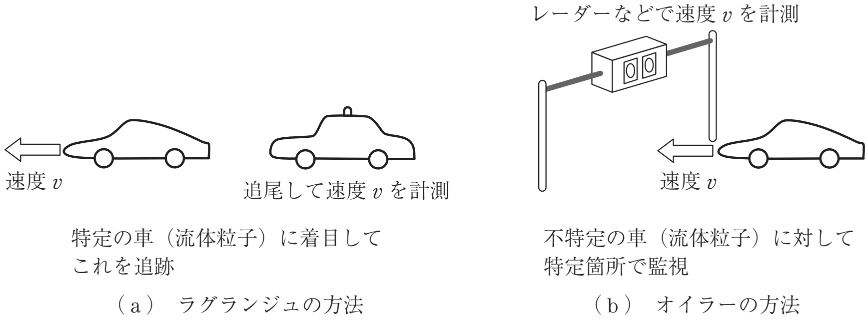


図 1.6 ラグランジュ表示とオイラー表示の違い

1.4.2 ラグランジュ表示と流跡線

ラグランジュ表示では，質点運動の考え方と同様に，特定の流体粒子の位置，時間および速度の関係を記述する（**図 1.7**）。まず，時刻 $t=t_0$ において位置 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ にある流体粒子に着目する。時刻 $t=t_0+\Delta t$ におけるこの流体粒子の位置 $(x,\ y,\ z)$ は，初期位置 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ と時刻 t から求めることができる。つまり，位置 $(x,\ y,\ z)$ は

$$x=x(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0),\quad y=y(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0),\quad z=z(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0) \tag{1.17}$$

のように，x_0，y_0，z_0 および t の関数として表すことができる。この位置での力学量は $(x,\ y,\ z)$ の関数として表されるので，結果的には，$(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0)$ の関数となる。

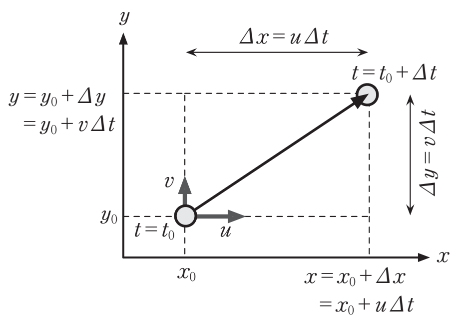


図 1.7 xy 平面上でのラグランジュ表示による流体粒子の運動の表現

例えば，x 方向の速度 u は

$$u(x,\ y,\ z)=u(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0) \tag{1.18}$$

と関数表現され，具体的には次式で求められる。

$$u=\frac{x-x_0}{\Delta t} \tag{1.19}$$

上式において，$\Delta t\to 0$ の極限をとれば，質点系力学と同様に，次式を得る。

$$u=\frac{dx}{dt} \tag{1.20}$$

y および z 方向の速度 v および w も同様に，$v=dy/dt$ および $w=dz/dt$ と表せるので

$$dt=\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}\qquad ：流跡線の方程式 \tag{1.21}$$

索　　　引

── 著者略歴 ──

篠田　成郎（しのだ　せいろう）

1982 年　岐阜大学工学部土木工学科卒業
1984 年　岐阜大学大学院工学研究科修士課程修了
　　　　（土木工学専攻）
1986 年　京都大学大学院工学研究科博士後期課程
　　　　中退（土木工学専攻）
1986 年　岐阜大学助手
1993 年　博士（工学）（京都大学）
1994 年　岐阜大学助教授
1995 年　米国コーネル大学客員研究員
2003 年　岐阜大学教授
　　　　現在に至る

藤田　一郎（ふじた　いちろう）

1977 年　神戸大学工学部土木工学科卒業
1979 年　神戸大学大学院工学研究科修士課程修了
　　　　（土木工学専攻）
1979 年　神戸大学助手
1990 年　学術博士（神戸大学）
1990 年　岐阜大学助教授
1995 年　米国アイオワ大学水理研究所客員助教授
～96 年
1999 年　神戸大学助教授
2003 年　神戸大学教授
　　　　現在に至る

児島　利治（こじま　としはる）

1993 年　岐阜大学工学部土木工学科卒業
1995 年　岐阜大学大学院工学研究科修士課程修了
　　　　（土木工学専攻）
1998 年　京都大学大学院工学研究科博士後期課程
　　　　修了（土木工学専攻）
　　　　博士（工学）
1998 年　株式会社パスコ勤務
2002 年　京都大学助手
2004 年　岐阜大学助教授
2007 年　岐阜大学准教授
　　　　現在に至る

寶　　馨（たから　かおる）

1979 年　京都大学工学部土木工学科卒業
1981 年　京都大学大学院工学研究科修士課程修了
　　　　（土木工学専攻）
1981 年　京都大学助手
1990 年　工学博士（京都大学）
1990 年　岐阜大学助教授
1992 年　米国コーネル大学客員研究員
～93 年
1994 年　京都大学助教授
1998 年　京都大学教授
2015 年　京都大学防災研究所長
　　　　現在に至る

事例・演習でよくわかる水理学
― 基本をイメージして理解しよう ―

Comprehensible Hydraulics through Examples and Exercises
－Let's Build up Fundamental Ideas by Imaging－

2015 年 10 月 13 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略

著　者　篠　田　成　郎
　　　　藤　田　一　郎
　　　　児　島　利　治
　　　　寶　　　　　馨
発行者　株式会社　コロナ社
　　　　代表者　牛来真也
印刷所　萩原印刷株式会社

112-0011　東京都文京区千石 4-46-10
発行所　株式会社　**コ　ロ　ナ　社**
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)
ホームページ　http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978-4-339-05246-6　（鈴木）　（製本：愛千製本所）
Printed in Japan