

ゼロから学ぶ
実践 マルチボディダイナミクス入門

マルチボディダイナミクス協議会 編
井上剛志 著

コロナ社

はじめに

現在はさまざまな汎用ソフトウェアが開発・普及し、その操作を覚えればさまざまなことがかなり詳細かつ高速に解析できる時代となった。しかし、そのごく基本的・基礎的な理論がわかっていなければ、そのソフトウェアを扱う技術者のレベルは低いままにとどまり、継続的な成長は期待できない。一方、アウトプットがよい技術者はそのソフトウェアの背後にある基本・基礎がわかっている。

著者は2024年10月現在、マルチボディダイナミクス協議会（はじめにの末尾に示す）を通して、マルチボディダイナミクスの啓蒙・啓発と教育活動を行っている。その中で、マルチボディダイナミクス理論の基本・基礎をわかりやすく説明し、簡単なプログラミングを通して実践的にもその内容を体感的に理解できる図書の必要性を感じた。

本書は、大学の工学部機械系卒業レベルの学習経験を有する広い層の方すべてを対象とする。この対象は2023年時点で毎年約20,000人が該当している。所属した研究室が機械力学系でなくても問題はない。本書は、読者がマルチボディダイナミクスに興味をもったときに、最初にそして気楽に手にとれるものであり、学部の力学と数学のごく基礎知識以外はほぼ予備知識なしでマルチボディダイナミクスの基礎を幅広く学べるものであることを心がけて執筆した。そして、本書だけで機械システムの運動学解析や動力学解析のための定式化とそのプログラミングまでを実践的に学び、グラフやアニメーションの出力結果を通じて理解・実感・習得できるようにした。そのために、わかりやすく書くことを最重要視して構成し、説明もできるかぎり丁寧に詳しく記述した。

本書は、この目的に沿って運動は平面運動に絞っている。そして、さまざまな機械要素・状況（多ボディ、接触、ばね・ダンパ要素、拘束、運動と力の評

価、順動力学と運動学など)が網羅されている。本書の内容を一つずつ理解し積み上げていけば、実際の機械の設計・開発・解析にも非常に有用である。

大学の学部教育での利用も意識し、全体を3部に分け、各章は1週で進められる程度の量として全体の構成を15章とした。1章は計算環境の整備を説明しており、実質的には2章から15章である。また、ライブラリ化や消去法などの[発展]内容も加えているが、これらは省略して進めてもよい。

ある程度の経験を有する技術者からも「マルチボディダイナミクスの理論は難しい」とよく聞く。その点については、本書では機械システムの挙動を表すプログラムの考え方の習得やプログラム・アニメーションを用いた機械システムの視覚的な理解を深めることを重視し、ほぼすべての内容について合計68のプログラムを含む例題・演習を準備した。そのプログラム面からの学習も強化し、理論と実践の両面からわかりやすく楽しみつつ学べるように工夫している。したがって、本書を読めば「マルチボディダイナミクスプログラムは意外と簡単に書ける」という感想をもつであろう。そして、より詳しい理論に興味をもつ読者に向けては適切な文献も適宜示している。本書の内容からさらに学習を深めていきたい場合のために、16章で文献を示しつつフレキシブルマルチボディ系や3次元空間マルチボディ系へのつながり・発展の考え方を述べた。読者が本書を通してマルチボディダイナミクスに興味をもち、活用いただければ、著者およびマルチボディダイナミクス協会にとって大きな喜びである。

なお、本書のプログラムは2024年7月時点ではすべてMATLAB(互換フリーソフトウェア Octave にも対応)で記述し、本書の記述と対応する解説も追記した。本書の例題プログラムはコロナ社の本書書籍詳細ページ (<https://www.coronasha.co.jp/np/isbn/9784339046922/>)で配布し、MATLABの1D-CAEツールである Simscape でも同じ例題プログラムを作成して提供する。また、数年以内に全プログラムを Python でも記述して提供予定である。各例題・演習を通して理論的内容の理解を行い、このプログラムを実際に走らせて時刻歴応答やアニメーションを通して解析結果を体感していただきたい。また、具体的な機械システムの解析に対して本書の例題プログラムをベースとして適宜活用い

ただき、対象の挙動をいち早くマルチボディダイナミクス的に捉えることにチャレンジいただきたい。そして、汎用ソフトウェアの背後にある基本・基礎を、実感をもって身につけていただきたい。これらのプログラムが読者の理解と実践应用到に役立つことを期待する。

最後に多数のフィードバックをいただいた名古屋大学機械力学研究グループのOB・OGの皆さん、議論をさせていただいた愛知工業大学の神谷恵輔教授、MATLABプログラムのチェック等で貢献してくれた研究室OBの永野一樹氏、文章チェック等で貢献してくれた現修士課程2年生の江尻晴斗氏、Simscapeプログラム作成で貢献してくれた現博士課程2年生の田博文氏に感謝します。

2024年10月

編・著者一同

マルチボディダイナミクス協議会

会 長：井上 剛志（名古屋大学）
 副会長：清水 信行（株式会社モーシオンラボ）
 役 員（五十音順）
 安藝 雅彦（日本大学）
 安藤 良（株式会社電通総研）
 伊地知勝美（エムエスシーソフトウェア株式会社）
 石塚 真一（サイバネットシステム株式会社）
 神田 元裕（株式会社システムプラス）
 古茂田和馬（株式会社東芝）
 橋本 信之（シーメンス株式会社）
 畠山 英二（株式会社エヌ・エス・ティ）
 原 謙介（横浜国立大学）
 福澤 浩昭（スカイ技術研究所株式会社）
 星野 裕昭（スターダイナ）
 門傳 徳久（ダッソー・システムズ株式会社）

（2024年10月現在）

MATLAB は MathWorks, Inc. の登録商標です。本書では、MATLAB およびその他の製品に™, ®マークは明記しておりません。

目 次

1. 計算環境の準備, 本書の用語について

1.1 Octave (MATLAB 互換フリーソフトウェア) のインストール	1
1.1.1 Octave 本体のインストール	1
1.1.2 video パッケージのインストール	1
1.2 インストール時, 実行時の注意	2
1.3 本書の用語	2

解析実践 第1部

機械システムのモデリングと解析の基礎

2. 質点の並進運動と剛体の回転運動

2.1 質点の並進運動の定式化	6
2.2 数値積分の準備と運動方程式の変形	8
2.2.1 例題1: 重力下の質点の自由運動	9
2.2.2 本書のプログラムの一般的な流れ	11
2.2.3 例題2: ばねで支持された質点の運動	12
2.3 剛体の回転運動	13
2.3.1 剛体の回転運動のみの運動方程式の定式化	13
2.3.2 例題3: 剛体の質量中心まわりの回転運動	15
2.3.3 例題4: 回転ばねで支持された剛体の回転運動	16

3. ボディの平面運動

3.1 ボディの運動方程式の定式化	18
-------------------	----

3.1.1	例題 5: 重力下のボディの自由運動	19
3.1.2	例題 6: 並進と回転のばね・ダンパで支持したボディの運動	21
3.2	並進変位の基準点以外に作用する力の表現	23
3.2.1	力によるモーメント	23
	メモ 幾何ベクトルと代数ベクトル	24
3.2.2	発展 チルダマトリックス (外積オペレータ)	25
3.2.3	例題 7: 力による並進変位基準まわりのモーメント	25
3.3	発展 並進変位基準が質量中心以外の場合の運動方程式	26
	メモ 平行軸の定理	27

4. ばね・ダンパの定式化

4.1	並進ばねダンパ要素 (ボディとグラウンドの接続)	31
4.1.1	並進ばねのベクトル, 並進ばね長さとその時間変化率	31
	メモ 座標変換マトリックス $\mathbf{A}_{\text{Ogi}}(\theta_i)$ の姿勢 θ_i に関する勾配	33
4.1.2	並進ばねダンパ要素による力ベクトルとモーメント	33
4.1.3	例題 8: 端点を並進ばねダンパ要素で支持したボディの運動 (並進変位基準点は質量中心)	33
4.2	発展 並進ばねダンパ要素 (グラウンドとボディの接続) の ライブラリ	36
4.2.1	系全体の一般化外力ベクトル	36
	メモ ライブラリ化について	37
4.2.2	例題 9: 端点を並進ばねダンパ要素で支持したボディの運動 (並進変位基準点は質量中心, ライブラリ)	37
4.2.3	補足 例題 10: 端点を並進ばねダンパ要素で支持されたボディの運動 (並進変位基準点は支持点 A)	38
4.3	並進ばねダンパ要素 (ボディとボディの接続)	40
4.3.1	並進ばねのベクトル, 並進ばね長さとその時間変化率	40
4.3.2	並進ばねダンパ要素による力ベクトルとモーメント	41
4.4	発展 並進ばねダンパ要素のライブラリ (2 ボディ間)	42
4.4.1	系全体の一般化外力ベクトル	42

4.4.2	例題 11：並進ばねダンパ要素で支持された 2 ボディ系の運動 (並進運動基準点は質量中心 G, ライブラリ)	43
4.5	回転ばねダンパ要素 (グラウンドとボディの接続)	46
4.5.1	回転ばねの符号, 伸び量とその時間変化率	46
	☒変形していないときの並進ばね, 回転ばねの長さ, 角度	48
4.5.2	回転ばねダンパ要素によるモーメント	48
4.6	☒発展 回転ばねダンパ要素のライブラリ (グラウンドとボディの接続)	48
4.6.1	系全体の一般化外力ベクトル	48
4.6.2	例題 12：回転ばねダンパ要素で支持されたボディの運動 (回転ばねダンパ要素のライブラリ)	50
4.7	回転ばねダンパ要素 (ボディとボディの接続)	52
4.7.1	回転ばねの符号, 伸び量とその時間変化率	52
4.7.2	回転ばねダンパ要素によるモーメント	53
4.8	☒発展 回転ばねダンパ要素のライブラリ (ボディ間)	53
4.8.1	系全体の一般化外力ベクトル	53
4.8.2	例題 13：回転ばねダンパ要素で支持された 2 ボディ系の運動 (回転ばねダンパ要素のライブラリ)	54

5. 接触の表現

5.1	接触の表現：反発係数	58
5.1.1	ポアソンのモデル	58
5.1.2	ニュートンのモデル	59
5.1.3	例題 14：接触 (反発係数)	59
	☒変形 MATLAB の event 関数	60
5.2	接触の表現：弾性接触力	61
5.2.1	フックの法則	61
5.2.2	エネルギー散逸を伴う線形弾性接触力モデル (Kelvin-Voigt モデル)	61
5.2.3	例題 15：Kelvin-Voigt モデルの接触力	62
5.2.4	例題 16：反発係数と等価減衰係数 (Kelvin-Voigt モデル)	63
5.2.5	例題 17：Kelvin-Voigt モデルの接触力を用いた バウンス運動の解析	64

5.2.6	エネルギー散逸を伴う線形弾性接触力モデル (負の接触力を避けた Kelvin-Voigt モデル)	65
5.2.7	例題 18: 負の接触力を避けた Kelvin-Voigt モデルの接触力	65
5.2.8	Hertz の接触理論	66
5.2.9	エネルギー散逸を伴う非線形弾性接触力モデル (Hunt and Crossley モデル)	67
5.2.10	例題 19: Hunt and Crossley モデルの接触力	68
5.2.11	エネルギー散逸を伴う非線形弾性接触力モデル (その他のモデル)	69
5.2.12	例題 20: Hunt and Crossley モデルの等価減衰係数の評価	70
5.3	ボディの弾性接触力と摩擦力	70
5.3.1	クーロン摩擦	70
	メモ atan 関数やシグモイド関数による近似表現	71
5.3.2	例題 21: ボディの並進運動と回転運動 (滑り運動と摩擦力)	72
5.3.3	例題 22: ボディのバウンスングからの並進運動と回転運動 (滑り運動と転がり運動, 摩擦力)	74

6. 拘束を伴うシステムの運動方程式

6.1	運動方程式と拘束力	77
	メモ ある点に作用する力の別の点における置き換え (力とモーメント)	78
6.2	ペナルティ法	80
6.2.1	例題 23: 剛体振り子の解析 (ペナルティ法)	80
	メモ ペナルティ法の剛性係数の数値の影響	81
6.2.2	例題 24: 剛体 2 重振り子の解析 (ペナルティ法)	82
6.2.3	例題 25: 直方体の頂点で支持する剛体振り子 (ペナルティ法)	85
6.2.4	例題 26: 回転円板に取り付けられたボディ (ペナルティ法)	87
6.3	拘束式 (回転ジョイント拘束の例)	89
6.3.1	グラウンドとボディの回転ジョイント拘束	89
6.3.2	ボディとボディの回転ジョイント拘束	90
6.3.3	例題 27: 2 重振り子系の回転ジョイント拘束	91
6.3.4	例題 28: 回転円板 + ボディ系の拘束式	91
6.4	拘束式の微分と速度方程式・加速度方程式	92
6.4.1	速度方程式	92

6.4.2	加速度方程式	93
6.4.3	例題 29：回転ジョイントで拘束された振り子の加速度方程式	93

7. 拡 大 法

7.1	拘束力とラグランジュの未定乗数法	95
7.1.1	許容仮想変位	95
7.1.2	ラグランジュの未定乗数	96
7.1.3	補足 ラグランジュの未定乗数の定理の説明	98
7.1.4	拡大系の運動方程式	100
	メモ 拘束の別の捉え方	101
7.2	数値積分の安定化	102
7.2.1	バウムガルテの安定化法	102
7.2.2	補足 バウムガルテの安定化法の直観的な説明	103
7.3	数値解析のための運動方程式の変形	105
7.3.1	例題 30：振り子の動力学解析（拡大法）	106
7.3.2	例題 31：回転円板に取り付けられた剛体振り子の動力学解析	108
7.4	発展 消 去 法	110
7.4.1	例題 32：振り子の動力学解析（消去法）	112
7.4.2	例題 33：回転円板に取り付けられた剛体振り子の動力学解析	112

解析実践 第 2 部

回転ジョイント拘束と固定ジョイント拘束を含むシステム

8. 実践例題・演習：グラウンドとボディの回転ジョイント

8.1	モデルと定式化	116
8.2	発展 ジョイント拘束のライブラリ	118
8.2.1	拘束式，ヤコビマトリックスと加速度方程式	119
8.2.2	ライブラリの使い方	120
8.3	発展 動力学解析	121
8.3.1	例題 34：剛体振り子の動力学（拡大法，ライブラリ）	121

8.3.2	例題 35：並進ばねダンパ要素で支持された 2 ボディ系の動力学 (基準点は質量中心, 拡大法, ライブラリ)	123
8.4	運動学解析	125
8.4.1	配位解析	125
	メモ ニュートン-ラプソン法	126
8.4.2	速度解析	127
8.4.3	加速度解析	127
8.4.4	例題 36：剛体振り子の運動学	128
8.5	ジョイント拘束点が時間の関数の場合を学ぶ実践例題： 剛体倒立振り子	130
8.5.1	例題 37：剛体倒立振り子の動力学 (ジョイント拘束点の位置が時間の関数, 拡大法)	130
8.5.2	発展 例題 38：剛体倒立振り子の動力学 (ジョイント拘束点の位置が時間の関数, 拡大法, ライブラリ)	132
8.5.3	発展 演習 1：倒立振り子の動力学 (消去法, ペナルティ法)	133

9. 実践例題・演習：ボディとボディの回転ジョイント

9.1	モデルと定式化	135
9.2	発展 ジョイント拘束のライブラリ	139
9.2.1	拘束式, ヤコビマトリックスと加速度方程式	139
9.2.2	ライブラリの使い方	140
9.3	2重振り子の運動学解析と動力学解析	141
9.3.1	例題 39：運動学 (拡大法)	141
9.3.2	例題 40：動力学 (拡大法)	144
9.3.3	発展 例題 41：動力学 (拡大法, ライブラリ)	146
9.3.4	発展 演習 2：動力学 (消去法, ペナルティ法)	147
9.4	2リンクロボット	148
9.4.1	演習 3：運動学解析	148
9.4.2	演習 4：動力学解析 (ペナルティ法)	150
9.4.3	演習 5：動力学解析 (拡大法)	152
9.4.4	発展 演習 6：動力学解析 (拡大法, ライブラリ)	153

10. 実践例題・演習：固定ジョイント

10.1	グラウンドとボディの固定ジョイントの定式化	154
10.2	発展 グラウンドとボディ間の固定ジョイント拘束のライブラリ	159
10.2.1	拘束式, ヤコビマトリックスと加速度方程式	159
10.2.2	ライブラリの使い方	160
10.2.3	例題 42: 固定されたボディに取り付けられた振り子の動解析 (拡大法, ライブラリ)	161
10.3	ボディ間の固定ジョイントの定式化	163
10.4	発展 ボディ間の固定ジョイント拘束のライブラリ	168
10.4.1	拘束式, ヤコビマトリックスと加速度方程式	168
10.4.2	ライブラリの使い方	169
10.4.3	例題 43: 固定拘束された 2 ボディ振り子の動解析 (拡大法, ライブラリ)	170

11. 実践演習：3 リンク振り子

11.1	モデルと定式化	173
11.2	運動学解析・動力学解析	177
11.2.1	演習 7: 運動学 (拡大法)	177
11.2.2	演習 8: 動力学 (拡大法)	180
11.2.3	発展 演習 9: 動力学 (拡大法, ライブラリ)	181

解析実践 第 3 部

回転ジョイント拘束と並進ジョイント拘束を含むシステム

12. 実践例題・演習：グラウンドとボディの並進ジョイント拘束

12.1	モデルと定式化	184
12.2	グラウンドとボディの並進ジョイント拘束の定式化	186
12.2.1	拘束式, ヤコビマトリックスと加速度方程式	186
12.2.2	例題 44: 動解析 (拡大法, 並進ジョイント拘束の回転拘束表現 1)	190

12.2.3	例題 45：動解析（拡大法，回転拘束の表現 2）	192
12.3	発展 グラウンドとボディ間の並進ジョイント拘束のライブラリ	193
12.3.1	拘束式，ヤコビマトリックスと加速度方程式	193
12.3.2	ライブラリの使い方	197
12.3.3	例題 46：動解析（拡大法，並進ジョイント拘束の回転拘束表現 1，ライブラリ）	197

13. 実践例題・演習：ボディとボディの並進ジョイント拘束

13.1	モデルと定式化	199
13.2	ボディ間の並進ジョイント拘束の定式化	202
13.2.1	拘束式，ヤコビマトリックスと加速度方程式	202
13.2.2	例題 47：動解析（拡大法，並進ジョイント拘束の回転拘束表現 1）	207
13.2.3	例題 48：動解析（拡大法，並進ジョイント拘束の回転拘束表現 2）	209
13.3	発展 ボディ間の並進ジョイント拘束のライブラリ	211
13.3.1	拘束式	211
13.3.2	ヤコビマトリックスと加速度方程式	212
13.3.3	ライブラリの使い方	215
13.3.4	例題 49：動解析（拡大法，並進ジョイント拘束の回転拘束表現 1，ライブラリ）	216

14. 実践演習：ピストンクランク系

14.1	モデルと定式化	217
14.2	拘束	219
14.2.1	回転ジョイント拘束	219
14.2.2	並進ジョイント拘束	220
14.2.3	系全体の拘束式，ヤコビマトリックスと加速度方程式	221
14.3	運動学解析（拡大法）	223
14.3.1	配位解析	224
14.3.2	速度解析	224
14.3.3	加速度解析	225
14.3.4	演習 10：運動学（拡大法）	226

14.3.5	発展 演習 11：運動学（拡大法，ライブラリ）	228
14.4	動力学解析（拡大法）	229
14.4.1	初期条件の設定	229
14.4.2	演習 12：動力学（拡大法）	230
14.4.3	発展 演習 13：動力学（拡大法，ライブラリ）	231

15. 実践演習：平地・坂道を走行する車両

15.1	平地を走行する車両のモデルと定式化	233
15.1.1	車両のモデルと定式化	233
15.1.2	接触力の近似表現（atan 関数，シグモイド関数）	236
15.2	系全体の拘束式，ヤコビマトリックスと加速度方程式	237
15.3	平地を走行する車両の動力学解析（拡大法）	239
15.3.1	初期条件	239
15.3.2	演習 14：動解析（拡大法，一定トルク）	240
15.3.3	演習 15：動解析（拡大法，トルク増大）	242
15.3.4	演習 16：動解析（拡大法，一定トルク，接触力表現の比較）	243
15.4	坂道を運動する車両（拡大法）	244
15.4.1	演習 17：坂道の場合のモデル化	244
15.4.2	演習 18：動解析（拡大法，一定トルク）	245

16. おわりに：本書からの発展について

16.1	ギヤやラック&ピニオンなどの機械要素について	248
16.2	逆動力学について	249
16.3	弾性体について	249
16.4	3次元空間運動への拡張について	251

引用・参考文献	253
---------	-----

索引	256
----	-----

解析実践 第1部

機械システムのモデリングと解析の基礎

第1部では、まずは機械力学的な視点で機械システムのモデリングと解析の基礎を説明する。具体的には、機械システムの動的モデリングの観点で

- ・ ボディの運動
- ・ 力やモーメントの作用の考え方と数式的な表現方法
- ・ 並進ばね・ダンパ要素や回転ばね・ダンパ要素の考え方と数式的な表現方法
- ・ 接触の考え方と数式的な表現方法

を一つひとつ段階的に学び、対象の動的モデリングに習熟することを目的とする。また、2ボディ間やボディとグラウンド間を各種のジョイントにより幾何学的に拘束するための定式化（ペナルティ法，拡大法，消去法）の基礎も学び、第2部，第3部における応用のための準備を行う。

質点の並進運動と剛体の回転運動

本章では、物体の運動を扱う基本的な系として、物体の並進運動のみの系と回転運動のみの系を扱う。そして、本書を通じて用いる運動方程式の1階の微分方程式表現をまとめ、MATLABを用いたサンプルプログラムの基本構成を学ぶ。

2.1 質点の並進運動の定式化

物体の**並進運動** (translational motion) のみを扱う場合、**質点** (particle) で表すのがシンプルである。

図2.1は質点モデルである。まず、**全体基準枠** (global reference frame) O - xy を定める。これは、**原点** (origin) を O とし、水平方向に x 軸、鉛直方向に y 軸をとるもので、質点の運動によらず空間 (平面) に固定されている。なお、以降では全体基準枠 O と表すこともある。この全体基準枠 O で表され

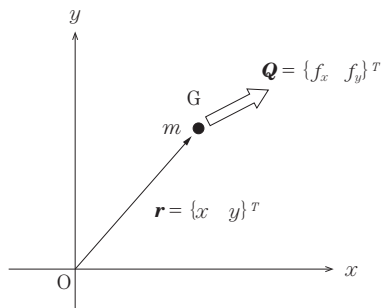


図2.1 質点モデル

る平面内での質点の位置は2変数 x, y で表すことができ、この質点の位置ベクトル \mathbf{r} は次式となる。

$$\mathbf{r} = \{x \ y\}^T \quad (2.1)$$

この質点の質量を m とするとき、全体基準枠 O における質点の**運動方程式** (equation of motion) はつぎのように表される。

$$m\ddot{x} = f_x, \quad m\ddot{y} = f_y \quad (2.2)$$

ここで、 f_x, f_y はそれぞれ**外力** (applied force) の x, y 方向成分である。

系の**配位** (configuration) を決めることができ、自由度と同じ個数の変数の組を**一般化座標** (generalized coordinate) といい、 \mathbf{q} で表すこととする。この質点の場合は、配位は単純に質点の位置 \mathbf{r} であり、一般化座標 \mathbf{q} は次式となる。

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} \quad (2.3)$$

その結果、全体基準枠 O における質点の運動方程式(2.2)は次式で表される。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} \quad (2.4)$$

ここで、 \mathbf{M} は**質量マトリックス** (mass matrix) であり

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = \text{diag}[m \ m] \quad (2.5)$$

と表される。ここで、diag は成分を対角に並べた**対角マトリックス** (diagonal matrix) を示す。

系の運動方程式をある一般化座標 \mathbf{q} で表した際に、対応して得られる外力の表現を**一般化外力** (generalized external force) といい、 \mathbf{Q} で表すこととする。質点の場合の一般化外力は、単純に次式で表される。

$$\mathbf{Q} = \{f_x \ f_y\}^T \quad (2.6)$$

重力が y 軸の負方向に作用する質点系では、一般化外力ベクトル \mathbf{Q} は次式となる。

$$\mathbf{Q} = \{0 \ -mg\}^T \quad (2.7)$$

2.2 数値積分の準備と運動方程式の変形

動的システムの運動方程式の数値積分手法^{1)†}は表 2.1 に示すように大きく分けて二つに分類される。一つは 2 階の微分方程式をそのまま解く手法、もう一つは 1 階の微分方程式に変形して解く手法である。

表 2.1 対象とする微分方程式の形式と数値積分手法の例

扱う微分方程式の階数	数値積分手法
2階の微分方程式をそのまま解く手法	ニューマーク β 法系
1階の微分方程式に変形して解く手法	アダムス法系, ルンゲ-クッタ法系

前者 (2 階の微分方程式をそのまま解く手法) の代表的なものは**ニューマーク β 法** (Newmark β method) 系の数値積分手法である。このニューマーク β 法系の数値積分手法を用いるならば、この運動方程式(2.2)あるいは式(2.4)はそのまま数値積分できる。

一方、後者 (1 階の微分方程式に変形して解く手法) の代表的なものは**アダムス法** (Adams method) 系や**ルンゲ-クッタ法** (Runge-Kutta method) 系の数値積分手法である。本書の例題プログラムで用いる ode45 はこの後者である。後者の手法を用いる場合は、まず、運動方程式(2.4)を 1 階の微分方程式に変換する必要がある。その場合は、新たに変数として速度ベクトル $\mathbf{v} = \{v_x \ v_y\}^T$ を導入し、つぎのように表す。

$$\dot{x} = v_x, \quad \dot{y} = v_y \quad (2.8)$$

この式は、ベクトル表記を用いるとつぎのように表される。

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \quad (2.9)$$

この速度ベクトル \mathbf{v} を用いると、運動方程式(2.4)はつぎのように表される。

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{Q} \quad (2.10)$$

さらに、この配位ベクトル $\mathbf{q} = \{x \ y\}^T$ と速度ベクトル $\mathbf{v} = \{v_x \ v_y\}^T$ をまとめ

† 肩付き数字は巻末の引用・参考文献を示す。

て、この質点モデルの**状態変数** (state space variables) \mathbf{y} を定義する。

$$\mathbf{y} = \{x \quad y \quad v_x \quad v_y\}^T = \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

式(2.9), (2.10)をこの状態変数 \mathbf{y} を用いてまとめる。最終的に、運動方程式(2.4)はつぎのように1階の微分方程式に変換される。

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q} \quad (2.12)$$

式(2.12)を状態変数 \mathbf{y} を用いてまとめると次式となる。

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

あるいは、右辺も状態変数 \mathbf{y} を用いて表すと次式となる。

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

ここで、 \mathbf{I}_2 は 2×2 の単位マトリックスである。質量マトリックス \mathbf{M} の逆マトリックス \mathbf{M}^{-1} があるが、これは \mathbf{M} が定数マトリックスの場合は、**時刻歴解析** (time history analysis, 2.2.2 項参照) を行う前に一度求めれば、時々刻々と更新する必要はない。

2.2.1 例題1：重力下の質点の自由運動

図2.2に示すような、重力 $-mg$ の作用のもとで平面内で運動する質点を考える。質点の質量を $m=2$ [kg] とし、重力加速度は $g=9.81$ [m/s²] とする。初期位置 $(x(0), y(0)) = (0, 1)$ [m]、初期速度 $(\dot{x}(0), \dot{y}(0)) = (3, 1)$ [m/s]

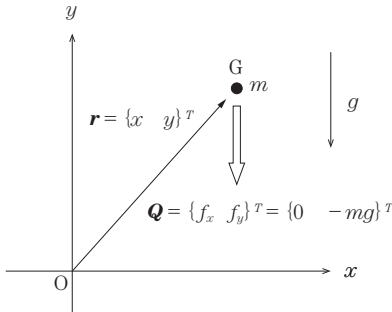


図 2.2 重力下の質点モデル

索引

【あ】	幾何ベクトル	24	【そ】	速度 2 乗慣性力ベクトル	30
アダムス法	8	逆動力学	249	速度方程式	93, 127, 142, 224, 228
圧入	61	許容仮想変位	96	【た】	
【い】	【く】			対角マトリックス	7, 30
一般化外力	7, 36, 42, 48, 53	食い込み量	61, 66	代数ベクトル	24
一般化剛性パラメータ	66	空間運動	251	縦弾性係数	67
一般化座標	7, 117, 136, 155, 163, 174, 185, 200, 218, 234	【け】		弾性体	249
【う】	【こ】			【ち】	
運動学解析	125, 141, 177, 223	拘束	77, 101, 118, 139, 186, 193, 202, 211, 219	チルダマトリックス	25
運動方程式	7, 8, 18, 26, 77, 100, 105	拘束式	79, 89, 92, 237	【と】	
【か】		拘束点	77, 130	倒立振り子	131
外積オペレータ	25	【さ】		【な】	
回転運動	13	材料パラメータ	67	なめらかな拘束	96
回転ジョイント	77, 89, 90, 116, 135	座標変換マトリックス	32, 33	【に】	
回転ばねダンパ要素	46, 48, 52, 53	【し】		ニュートンのモデル	59
外モーメント	14	時刻歴解析	9	ニュートン-ラプソン法	126, 142, 224, 229
外力	7	姿勢	14, 18, 33	ニューマーク β 法	8
拡大法	79, 95, 223, 229, 239, 244	質点	6	【は】	
拡張ラグランジアン	101	質量中心	13, 26	配位	7, 18, 89, 128, 142, 224
加速度方程式	93, 119, 139, 159, 168, 186, 193, 202, 212, 221, 237	質量マトリックス	7	バウムガルテの安定化法	102, 118, 120
完全弾性衝突	58	自由角度	16, 46, 48	反発係数	58, 67
完全非弾性衝突	58	自由長	31, 48	【ひ】	
【き】	【せ】			ヒステリシス (履歴)	
機械要素	248	接触開始時の速度	67	減衰ファクター	67
		全体基準枠	6	非線形指数ファクター	66
		せん断パラメータ	250		

非弾性衝突	58
【ふ】	
符号関数	47, 236
フックの法則	61
【へ】	
平行軸の定理	27
並進運動	6, 18, 43
並進ジョイント拘束	
184, 186, 193, 199, 202, 211,	
220	
並進ばねダンパ要素	
31, 36, 40, 42, 43, 123	
凹み	61
ペナルティ法	
78, 80, 85, 87, 133, 147, 150	

【ほ】	
ポアソンのモデル	58
ポアソン比	67
ボディ	18
—の配位	18
ボディ固定枠	31
【や】	
ヤング率	67
【ゆ】	
有効半径	66
【ら】	
ラグランジュの未定乗数	97, 101, 105, 249

ラグランジュの未定乗数法	100
【り】	
力積	58
臨界減衰	104
【る】	
ルンゲ-クッタ法	8
【欧文】	
Hertz の接触理論	66
Hunt and Crossley の	
非線形接触モデル	67, 70
Kelvin-Voigt モデル	
61, 63, 65, 233	

— 著者略歴 —

1991年 名古屋大学工学部電子機械工学科卒業
1993年 名古屋大学大学院工学研究科修士課程修了（電子機械工学専攻）
1993年 オークマ株式会社勤務
1995年 名古屋大学助手
2000年 博士（工学）（名古屋大学）
2001年 名古屋大学大学院講師
2005年 名古屋大学大学院助教授（2007年から准教授に呼称替え）
2012年 名古屋大学大学院教授
現在に至る

ゼロから学ぶ
実践 マルチボディダイナミクス入門

Practical Introduction to Multibody Dynamics

© Tsuyoshi Inoue 2024

2024年12月26日 初版第1刷発行



検印省略

編者 マルチボディダイナミクス協議会
著者 井上剛志
発行者 株式会社 コロナ社
代表者 牛来真也
印刷所 壮光舎印刷株式会社
製本所 株式会社 グリーン

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)

ホームページ <https://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-04692-2 C3053 Printed in Japan

(齋藤)



JCOPY < 出版者著作権管理機構 委託出版物 >

本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつど事前に、出版者著作権管理機構（電話 03-5244-5088, FAX 03-5244-5089, e-mail: info@jcopy.or.jp）の許諾を得てください。

本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めていません。落丁・乱丁はお取替えいたします。