

演習問題で学ぶ
材 料 の 力 学

野田 尚昭
小田 和広 共著
高木 怜

コ ロ ナ 社

ま え が き

ものづくりにおいては、その材料に力が加わっても壊れないよう設計する必要がある。極端な変形が生じれば使用できないので、変形量を把握することも要求される。材料力学や弾性力学と呼ばれる学問は、材料を安全かつ経済的に使用する上で必要となり、機械系のエンジニアが必要とする4力学の中でも、最も基本的かつ重要である。特に、教科書や参考書に書かれていることを、知識として知っているだけではなく、実用問題に応用できる能力を身に着けていることが必要となる。機械や構造物を仮想的に切断し（切断法）、切断した物体に注目して自由体線図を描き、力の釣合いを考えることは設計やものづくりの現場では頻繁に行われている。また、実際の機械や構造にはいろいろな形状が存在するので、機械系の4力学の中でも特に材料の力学では、応用力を身に着けることが必要である。このような観点から、著者らの一人は、さきに「演習問題で学ぶ釣合いの力学」を上梓した。同書ではまず、質点の釣合いと剛体の力の釣合いの復習から始めて、実際に問題を解く上で特に重要となる、2力物体の釣合いの考え方とその演習問題を取り上げた。そして、その応用をトラス（2力物体で構成される）やフレームの演習問題として示すとともに、SFD（せん断力図）とBMD（曲げモーメント図）への応用や、変形を考慮する不静定問題の演習までを取り扱った。

本書では、上記のような、切断法→自由体線図→力の釣合いの考え方を、材料の力学に応用する。ここで取り扱う問題は、構造物を、棒や軸などの1次元の構造や1次元の部材を組み合わせたより単純な構造物としてモデル化したものである。このモデル化により、材料に生じる応力は、変形を規定するパラメータを仮定して断面のひずみ分布を表示し、応力とひずみの関係を用いて断面内の応力を荷重の関数として表すという統一的な手順で求められる。よっ

ii ま え が き

て、計算機を使用することなく、紙と鉛筆で強度設計ならびに剛性設計を行うことができる。本書においても、「演習問題で学ぶ釣合いの力学」から一貫して、切断法→自由体線図→力の釣合いのアプローチを自分自身で、実際の問題を考えることによって、身に着けていけるように努めている。

計算機が発達した今日では、種々の問題がその利用によって解かれるようになっており、実際の複雑構造の設計にも用いられている。しかし、それに安易に頼ることによって、むしろ事故の危険性が高められている面がある。本書の内容は、材料の力学分野で基本となる直線棒の引張り・ねじり・曲げによる応力や変形の理論を身に着けることを中心としているが、そのためだけではなく、計算機をより有効に使用するための単純化・モデル化や、計算機で得られた結果をそのまま使うのではなく、その妥当性を確認する上でも有用となる。このような観点からも本書を活用していただければ幸いである。

2022年2月

著者一同

目 次

1. 力の釣合いと SFD・BMD

【演習問題 1.1】 平面フレーム 1	1
【演習問題 1.2】 平面フレーム 2	4
【演習問題 1.3】 平面フレーム 3	6

2. 直線棒に生じる応力とひずみ

2.1 引張り・ねじり・曲げにより生じる応力と変形	9
【演習問題 2.1】 引張応力と引張変形	9
【演習問題 2.2】 引張りを受ける丸棒の半径減少量	10
【演習問題 2.3】 ねじり応力とねじり変形	11
【演習問題 2.4】 曲げ応力と曲げ変形	13
【演習問題 2.5】 はりのたわみの公式	14
2.2 断面 2 次モーメントと極断面 2 次モーメント	16
【演習問題 2.6】 I_p の 導 出	16
【演習問題 2.7】 円形断面の I	16
【演習問題 2.8】 長方形断面の I	17
【演習問題 2.9】 中立面から離れた位置にある長方形断面の I	18
【演習問題 2.10】 T 形断面の I	18
章 末 問 題	20

3. 引張りと圧縮

3.1 静定問題 (力の釣合いのみで求められる問題)	21
【演習問題 3.1】 静 定 問 題 1	21
【演習問題 3.2】 静 定 問 題 2	22

3.2 不静定問題 (力の釣合いと変形の条件から求める問題)	24
【演習問題 3.3】 不静定問題 1	24
【演習問題 3.4】 不静定問題 2	26
【演習問題 3.5】 熱 応 力	27
【演習問題 3.6】 不静定問題 3	28
章 末 問 題	30

4. ね じ り

4.1 静 定 問 題	31
【演習問題 4.1】 丸棒断面に生じる応力	31
【演習問題 4.2】 静 定 問 題 1	33
【演習問題 4.3】 静 定 問 題 2	34
4.2 不静定問題	36
【演習問題 4.4】 不静定問題 1	36
【演習問題 4.5】 不静定問題 2	37
章 末 問 題	38

5. はりの曲げとたわみ

5.1 曲 げ 応 力	40
【演習問題 5.1】 はりに生じる曲げ応力 1	40
【演習問題 5.2】 はりに生じる曲げ応力 2	41
【演習問題 5.3】 丸棒から曲げ強度が最大となるように長方形断面の角材を切り出す	42
【演習問題 5.4】 構造物に生じる曲げ応力 1	43
【演習問題 5.5】 構造物に生じる曲げ応力 2	45
【演習問題 5.6】 偏心荷重によって生じる曲げ応力	46
5.2 はりのたわみ (静定問題)	48
【演習問題 5.7】 ミオソテスの方法	48
【演習問題 5.8】 ミオソテスの方法の応用 1	50
【演習問題 5.9】 ミオソテスの方法の応用 2	51
【演習問題 5.10】 ミオソテスの方法の応用 3	52
【演習問題 5.11】 ミオソテスの方法の応用 4	53

【演習問題 5.12】 L 形はりのたわみ 1	56
【演習問題 5.13】 L 形はりのたわみ 2	58
章 末 問 題	59

6. はりのたわみの不静定問題

6.1 はりのたわみ (不静定問題)	60
【演習問題 6.1】 はりのたわみの不静定問題 1	60
【演習問題 6.2】 はりのたわみの不静定問題 2	61
【演習問題 6.3】 はりのたわみの不静定問題 3	62
【演習問題 6.4】 はりのたわみの不静定問題 4	63
【演習問題 6.5】 はりのたわみの不静定問題 5	65
【演習問題 6.6】 はりのたわみの不静定問題 6	68
【演習問題 6.7】 はりのたわみの不静定問題 7	69
【演習問題 6.8】 熱応力による不静定問題	70
6.2 はりの曲げによるせん断応力	72
【演習問題 6.9】 せん断応力の性質 (共役せん断応力)	72
【演習問題 6.10】 曲げによって生じる最大せん断応力 1	72
【演習問題 6.11】 曲げによって生じる最大せん断応力 2	74
章 末 問 題	76

7. 曲げとねじりの組合せ

7.1 曲げとねじりによる応力 (組合せ応力)	78
【演習問題 7.1】 応力の座標変換	78
【演習問題 7.2】 主 応 力	79
【演習問題 7.3】 主せん断応力	81
【演習問題 7.4】 曲げとねじりが同時に作用するときの応力 1	81
【演習問題 7.5】 曲げとねじりが同時に作用するときの応力 2	82
7.2 曲げとねじりによる変形	83
【演習問題 7.6】 曲げとねじりが同時に作用するはりの変形	83
【演習問題 7.7】 曲げとねじりが同時に作用する構造の変形 1	84
【演習問題 7.8】 曲げとねじりが同時に作用する構造の変形 2	86

【演習問題 7.9】 曲げとねじりが同時に作用する構造の変形 3 87
 【演習問題 7.10】 曲げとねじりが同時に作用する構造の変形 4 89
 【演習問題 7.11】 曲げとねじりが同時に作用する構造の変形 5 91
 【演習問題 7.12】 曲げとねじりが同時に作用する構造の変形 6 92
 章 末 問 題 93

8. エネルギー法・カスティリアーノの定理

【演習問題 8.1】 引張りを受ける棒のひずみエネルギー 94
 【演習問題 8.2】 ねじりを受ける棒のひずみエネルギー 95
 【演習問題 8.3】 曲げを受ける棒のひずみエネルギー 95
 【演習問題 8.4】 カスティリアーノの定理の導出 96
 【演習問題 8.5】 エネルギー法の応用 1 98
 【演習問題 8.6】 エネルギー法の応用 2 99
 【演習問題 8.7】 エネルギー法の応用 3 101
 【演習問題 8.8】 曲がりはりのたわみ 1 103
 【演習問題 8.9】 曲がりはりのたわみ 2 104
 【演習問題 8.10】 曲がりはりのたわみ 3 106
 【演習問題 8.11】 曲がりはりのたわみ 4 108
 【演習問題 8.12】 曲がりはりのたわみ 5 109
 【演習問題 8.13】 曲がりはりのたわみ 6 111
 【演習問題 8.14】 曲がりはりのたわみ 7 112
 章 末 問 題 114

9. 弾性力学の基礎

9.1 応力の座標変換 116
 【演習問題 9.1】 応力の座標変換の応用 1 116
 【演習問題 9.2】 応力の座標変換の応用 2 118
 9.2 ひずみの座標変換 119
 【演習問題 9.3】 ひずみの座標変換 119
 【演習問題 9.4】 ひずみの座標変換の応用 1 120
 【演習問題 9.5】 ひずみの座標変換の応用 2 121
 【演習問題 9.6】 ひずみの座標変換の応用 3 122

9.3 2次元および3次元のフックの法則	123
【演習問題 9.7】 2次元および3次元のフックの法則の応用 1	123
【演習問題 9.8】 2次元および3次元のフックの法則の応用 2	124
【演習問題 9.9】 2次元および3次元のフックの法則の応用 3	125
【演習問題 9.10】 2次元および3次元のフックの法則の応用 4	126
【演習問題 9.11】 2次元および3次元のフックの法則の応用 5	127
9.4 薄肉円筒と薄肉球	129
【演習問題 9.12】 薄肉円筒に生じる応力	129
【演習問題 9.13】 薄肉円筒問題 1	130
【演習問題 9.14】 薄肉円筒問題 2	132
【演習問題 9.15】 薄肉円筒問題 3	134
章末問題	136

10. 直線棒の圧縮による座屈

10.1 剛体棒の座屈	139
【演習問題 10.1】 剛体棒の座屈	139
10.2 弾性棒の座屈 (オイラーの座屈荷重)	140
【演習問題 10.2】 片側を剛体壁で固定された直線棒の座屈荷重 (オイラーの座屈荷重) 1	140
【演習問題 10.3】 片側を剛体壁で固定された直線棒の座屈荷重 (オイラーの座屈荷重) 2	142
【演習問題 10.4】 支持条件が異なる直線棒の座屈 1	143
【演習問題 10.5】 支持条件が異なる直線棒の座屈 2	144
【演習問題 10.6】 曲げ荷重と圧縮荷重が同時に作用する両端支持はりの座屈	145
章末問題	147

章末問題解答	148
--------	-----

索引	156
----	-----

5

はりの曲げとたわみ

引張り・圧縮、ねじりに比べ、曲げによって生じる応力と変形は大きい
ため、強度設計の際には特に注意する必要がある。また、荷重や支持条件によ
って SFD、BMD が変化し、応力や変形も断面形状に依存するため、ほかの荷重
形式に比べて検討すべきパラメータが多い。特に、断面形状（断面 2 次モー
メント）が応力と変形に大きく影響するため、曲げに強い構造とはどのような
ものか演習を通して考えてほしい。

5.1 曲げ応力

【演習問題 5.1】 はりに生じる曲げ応力 1

図 5.1 に示すような構造において

- (1) SFD と BMD を描け。
- (2) 以下の断面においてこのはりに生じる最大曲げ応力 σ_{\max} を求めよ。

- (a) 幅 b × 高さ h の長方形断面
- (b) 直径 d の円形断面

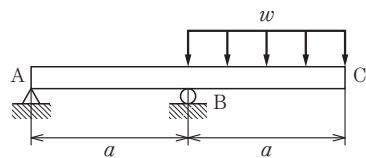


図 5.1

解説

(1) 1 章と同様に部材 ABC の自由体線図を描いた後、SFD と BMD を描くと
図 5.2 のようになる。

(2) (a) $b \times h$ の長方形断面において断面 2 次モーメント I は

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

である。(1) の BMD より最大曲げモーメントは $wa^2/2$ であるので、最大曲げ応力 σ_{\max} は

$$\sigma_{\max} = \frac{\frac{wa^2}{2} \times \frac{h}{2}}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{3wa^2}{bh^2}$$

(2) (b) 直径 d の円形断面において断面 2 次モーメント I は

$$I = \frac{\pi d^4}{64}$$

(1) の BMD より最大曲げモーメントは $wa^2/2$ であるので、最大曲げ応力 σ_{\max} は

$$\sigma_{\max} = \frac{\frac{wa^2}{2} \times \frac{d}{2}}{\frac{\pi d^4}{64}} = \frac{16wa^2}{\pi d^3}$$

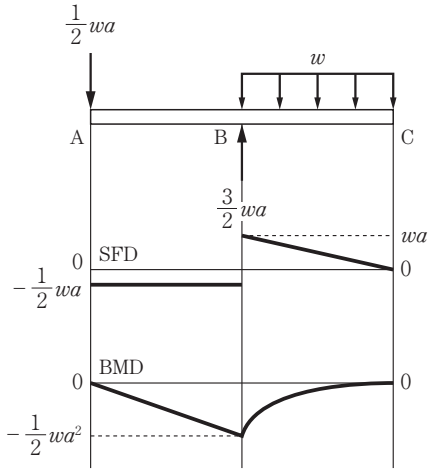


図 5.2

【演習問題 5.2】 はりに生じる曲げ応力 2

図 5.3 に示すような T 形断面のはりにおいて以下の問に答えよ。

- (1) SFD と BMD を描け。
- (2) はりの断面の図心 \bar{y} を求めよ。
- (3) 最大引張応力：最大圧縮応力が 1：3 となる t を求めよ。

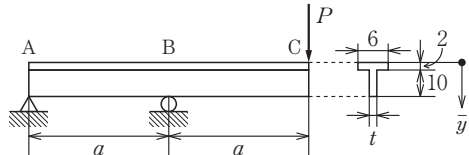


図 5.3

解説

(1) 1 章と同様に部材 ABC の自由体線図を描いたのち、SFD と BMD を描く

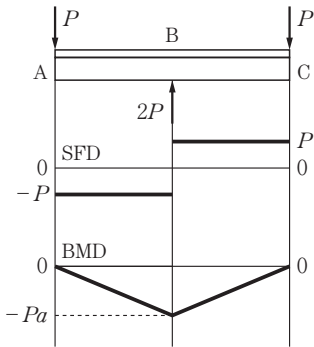
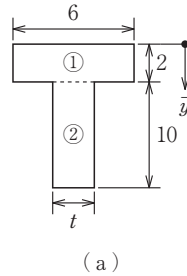


図 5.4



(a)

	A	\bar{y}	$A\bar{y}$
①	12	1	12
②	$10t$	7	$70t$
Σ	$10t+12$	—	$70t+12$

(b)

と図 5.4 のようになる。

(2) 断面を図 5.5 (a) のように①と②の領域に区別すると、断面積、図心およびその積は図 (b) のように表される。このとき、断面全体の図心 \bar{y} は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A} \\ &= \frac{70t+12}{10t+12} \end{aligned}$$

(3) この問題では、はりの上面に引張応力、下面に圧縮応力が負荷される。最大引張応力：最大圧縮応力が 1 : 3 となるためには、図心から上面までの距離と下面までの距離が 1 : 3 となるようにすればよい。したがって t は

$$\bar{y} = \frac{70t+12}{10t+12} = 12 \times \frac{1}{4} \rightarrow t = 0.6$$

【演習問題 5.3】 丸棒から曲げ強度が最大となるように長方形断面の角材を切り出す

図 5.6 に示すように、直径 d の丸棒より $b \times h$ の断面の角材を切り出した。曲げモーメント M が水平軸回りに角材に作用するとき

- (1) 最大曲げ応力 σ_{\max} を M, b, h で表せ。
- (2) 曲げ強度が最大となる b/h を求めよ。

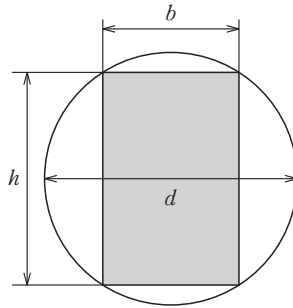


図 5.6

(解説)

(1) 図の長方形断面に生じる最大曲げ応力 σ_{\max} は

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{M}{I} e = \frac{M}{(bh^3/12)} \frac{h}{2} \\ &= \frac{6M}{bh^2} \left(= \frac{M}{Z} \right)\end{aligned}$$

(2) 曲げ強度を最大にするには、 Z (断面係数という) が最大となればよい。
丸棒の直径 d と角材 b, h の関係は $d^2 = b^2 + h^2$ であるから

$$Z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(d^2 - b^2)}{6} \rightarrow \frac{dZ}{db} = \frac{d^2 - 3b^2}{6} = \frac{(h^2 + b^2) - 3b^2}{6} = \frac{h^2 - 2b^2}{6} = 0$$

したがって、曲げ強度が最大となる b/h は

$$h^2 - 2b^2 = 0 \rightarrow \frac{b}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

【演習問題 5.4】 構造物に生じる曲げ応力 1

図 5.7 に示すような構造において

- (1) 部材 ABCD の SFD と BMD を描け。
- (2) 部材 CEF の SFD と BMD を描け。
- (3) 部材 ABCD の断面が $b \times h$ の長方形のとき、最大曲げ応力 σ_{\max} を求めよ。

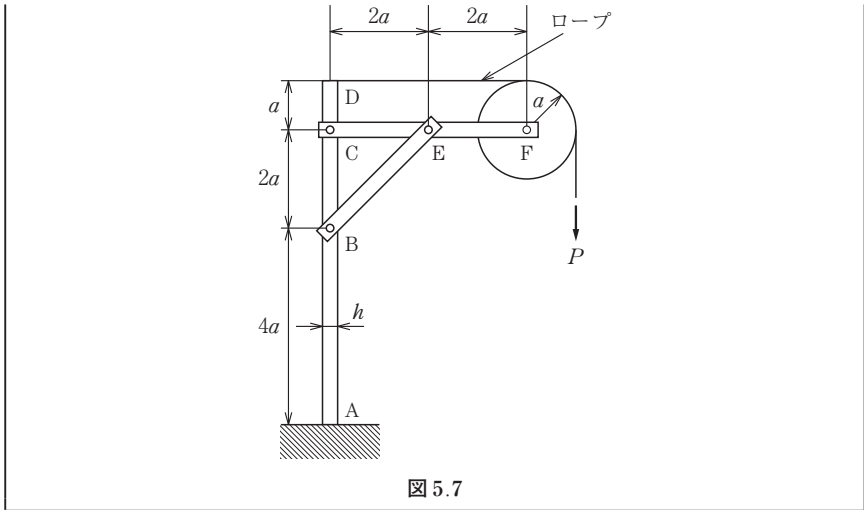


図 5.7

解説

(1) (2) 1章と同様に部材 ABCD, CEF の自由体線図を描いたのち, SFD と BMD を描くと図 5.8 のようになる。

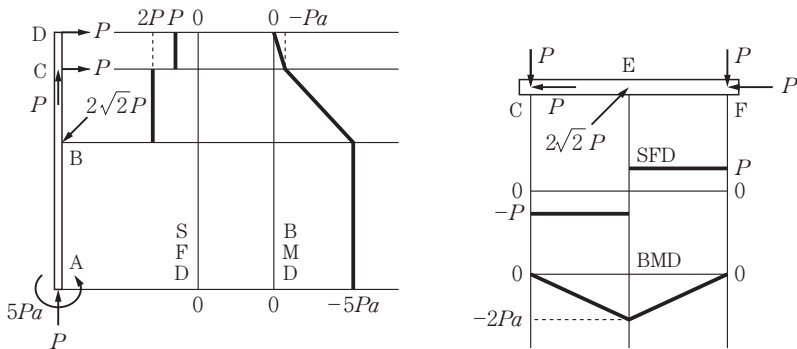


図 5.8

(3) ABCD の BMD より, 最大曲げモーメントは $5Pa$ となる。また演習問題 2.4 では, 曲げ応力 σ が次式となることを導いた。 η は中心線からの距離である。

$$\sigma = \frac{M}{I} \eta$$

索引

【あ】		せん断弾性係数	12	ひずみエネルギー	94
エネルギー法	94	せん断ひずみ	12	ひずみの座標変換	119
オイラーの座屈荷重	140	線膨張係数	27	引張荷重	9
応力	9	相当ねじりモーメント	82	不静定問題	24
——の座標変換	78	相当曲げモーメント	82	フックの法則	10
【か】		【た】		平行軸の定理	18
回転半径	144	たわみ	14	偏心荷重	46
カステリアーノの定理	98	——の微分方程式	15	ポアソン比	10
共役せん断応力	72	たわみ角	48	細長比	144
極断面2次モーメント	12	断面1次モーメント	19	【ま】	
許容応力	82	断面2次モーメント	14	曲がりはり	103
許容せん断応力	82	力の釣合い	1	曲げ応力	13
組合せ応力	78	中立軸	14	曲げ剛性	50
ゲージ	122	中立面	13	曲げモーメント	13
【さ】		直交軸の定理	17	ミオソテスの方式	48
座屈	139	等2軸圧縮	117	【や】	
座屈荷重	139	等2軸引張	117	ヤング率	9
自由体線図	1	【な】		~~~~~	
主応力	80	ねじり剛性	33	2次元および3次元の	
主軸	80	ねじりモーメント	11	フックの法則	123
主せん断応力	81	ねじれ角	13	BMD (曲げモーメント図)	1
純せん断応力場	119	熱応力	27	SFD (せん断力図)	1
垂直ひずみ	9	伸び剛性	94		
静定問題	21	【は】			
切断法	1	薄肉円筒	129		
せん断応力	12	薄肉球	138		

— 著 者 略 歴 —

野田 尚昭 (のだ なおあき)

- 1979 年 九州工業大学工学部機械工学第二学科卒業
- 1981 年 九州工業大学大学院工学研究科修士課程修了 (機械工学専攻)
- 1984 年 九州大学大学院工学研究科博士課程修了 (機械工学専攻)
工学博士
- 1984 年 九州工業大学講師
- 1985 年 米国リーハイ大学客員研究員
- 1987 年 九州工業大学助教授
- 2003 年 九州工業大学教授
現在に至る

小田 和広 (おだ かずひろ)

- 1990 年 九州工業大学工学部機械工学科卒業
- 1992 年 九州工業大学大学院工学研究科博士前期課程修了 (設計生産工学専攻)
- 1995 年 九州工業大学大学院工学研究科博士後期課程修了 (設計生産工学専攻)
博士 (工学)
- 1995 年 徳山工業高等専門学校助手
- 1996 年 徳山工業高等専門学校助教授
- 2011 年 徳山工業高等専門学校教授
- 2012 年 大分大学教授
現在に至る

高木 怜 (たかき れい)

- 2017 年 九州工業大学工学部機械知能工学科卒業
- 2019 年 九州工業大学大学院工学府修士課程修了 (機械工学専攻)
- 2019 年 九州工業大学大学院工学府博士課程在学 (工学専攻)
- 2021 年 日本文理大学非常勤講師
現在に至る

演習問題で学ぶ
材料の力学

Strength of Materials Focusing on Equilibrium

© Noda, Oda, Takaki 2022

2022年4月25日 初版第1刷発行



検印省略

著者 野田尚昭
小田和広
高木 怜
発行者 株式会社 コロナ社
代表者 牛来真也
印刷所 新日本印刷株式会社
製本所 有限会社 愛千製本所

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan

振替00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)

ホームページ <https://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-04678-6 C3053 Printed in Japan

(西村)



JCOPY < 出版者著作権管理機構 委託出版物 >

本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつど事前に、出版者著作権管理機構(電話 03-5244-5088, FAX 03-5244-5089, e-mail: info@jcopy.or.jp)の許諾を得てください。

本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めていません。落丁・乱丁はお取替えいたします。