詳解　流れの数値計算

有限要素法による非圧縮性流体解析の基礎

河野　晴彦【著】

コ ロ ナ 社

まえがき

本書は，流れを解くための方程式の離散化に用いられる差分法と有限要素法の基礎を解説したものである。ただし，書名の示すとおり，有限要素法の解説に重きを置いている。本書の原型は，著者の研究室に配属された学部 4 年生が予備知識を必要としないで差分法と有限要素法の基礎を習得できるように作成した講義ノートであり，本書はそれを大幅に加筆したものとなっている。著者が担当する大学の講義で心がけていることは，重要な式を導出する際に，その行間を省くことなく（ごまかすことなく），丁寧に解説することである。それは，理系のどの分野においても「何となくわかった気がする」といった曖昧な知識を溜め込むことが最も危険であることを知っているからである。言うまでもなく，そのような「知識」は研究や開発の現場では何の役にも立たない。

このような考えに基づいて，流れの問題に適用される差分法と有限要素法のなかでも基礎的・基本的な内容を選定し（例えば，非線形問題では非圧縮性流れに限定し），類書で説明が不足している箇所に注意しながら本書を執筆した。本のページをめくってみると式の数が多い印象を受けるかもしれないが，それはこの本が難解であることを意味するものではなく，実際に読み進めていけば，むしろその逆であることがわかるだろう。それは，ある式を用いて他の式を導出する際の過程を，より多くの情報（すなわち，式と式の間を埋める補完的役割を果たす式）を伴って明確に示しているためである。付録では，本文で示したいくつかの重要な式の導出の過程を，複数のページにわたって詳細に記している。式中にベクトルやテンソルを含む場合は，必要に応じて添字を用いた演算法を採用して目的とする式を導いている。

本書のもう一つの特徴は，非圧縮性流れの解法（4 章）において，HSMAC 法の技術を有限要素法に応用した GSMAC 法を，さらに改良した手法について

記述している点である。具体的には次のような内容を含んでいる。

1. 9節点四角形要素（あるいはQ2–Q1要素）を用いた離散化
2. 数値積分の結果とほぼ一致する結果を与える要素内積分の簡易計算法
3. 速度と圧力の同時緩和法の収束性を大きく向上させた手法

上記2，3は著者が独自に考案したものであるため，他書では解説されていない。

本書は，離散化法について言えば，1章が差分法，2～4章が有限要素法の構成になっている。有限要素法だけに興味がある読者は2章から読み始めても差し支えないが，できれば1章からじっくりと読み進めていただくと，離散化に対する理解を深めることができる（2章以降も差分法を部分的に用いることも付け加えておく）。1章と2章には，例題の形で1次元問題の数値計算例を多く示した。3章の最後の例題では，2次元問題の数値計算例も示している。それらの結果は簡単なプログラムを組んで計算することにより得られるので，プログラミングの練習も兼ねて確かめてみるとよい。例題で指定した初期条件やパラメータの値を変更して，自分だけの例題を作成してみるのもおもしろいだろう。

本書を手に取った人はご存知と思うが，流れ問題に適用される差分法や有限要素法の基礎を解説した本は既に数多く出版されている。そのため，教科書的な「綺麗にまとまっている」本を書くつもりはなく（既にそのような本はたくさんある），他書が説明を避けているような，根拠が不明瞭と思われる内容も積極的に記した。それらの内容は著者が熟慮の末に導き出したものであるが，著者の浅学のために思い違いをしている箇所があるかもしれない。そのような場合は，読者からのご指摘をいただいて改善していきたいと思っている。

近年は商用コードやオープンソースを用いて計算を行うことが一般的になりつつあり，自らプログラムを作成して計算結果を示すほうが珍しくなってきた。「商用コードがあるのであれば，なぜ自作のプログラムにこだわるのか」という意見もあるだろう。しかし，世界的にはまだ新規の数値解析手法の開発が盛んに行われており，その成果を掲載する評価の高い海外学術雑誌も数多く挙げることができる。もし，現状が商用コード等であらゆる現象が解ける段階であるのならば，そのような学術雑誌は即廃刊になるはずである。しかし現実はそう

ではなく，既存の技術では満足に計算することができない物理現象はいまだ数多く存在する。日本の研究者は，概して，海外の著名な研究者が開発した手法を理解して，それをいくらか発展させることには長けているが，本当の意味で「零から一を生み出した」といえるような手法を自ら開発できる人は少ない。それを実現するためには，基礎の徹底した理解がまず必要だと確信している。これから数値計算法を学ぶ若い研究者がいずれ “Made in Japan” と呼べる新手法を開発することができるように，そのための基礎的な能力を身に付けてもらうための書となるように，限られた範囲内ではあるが著者のこれまでの経験と知識を注ぎ込んだ本を執筆したつもりである。

数値流体力学に関連する著者の研究は，慶應義塾大学の棚橋隆彦先生（現 名誉教授）の研究室に入ったときから始まった。4 年間，この分野に関するご指導をいただいた恩師である棚橋先生をはじめ，有限要素法に関する著者の知識の幅を広げてくださった棚橋研究室の諸氏に心から謝意を表します。また，素稿の段階で，例題のいくつかに取り組んでそれらの解答をチェックしていただいた河野研究室の大学院生の牟禮良晃氏，著者の度重なる日本語の質問に的確に答えていただいた妻の河野彩子，著者の構想（と稚拙なスケッチ）を基に素晴らしいカバーイラストを描いてくださった高宮ミンディ氏に感謝いたします。そして，本書が企画されてから当初の予定をはるかに越える年月を要することとなったが，その間も多大なご配慮を賜り，原稿の細かい部分まで確認していただいたコロナ社に厚く御礼申し上げます。

2021 年 11 月

河野　晴彦

目　　　　次

1.　離散化手法の基礎

2.　有限要素法による流れ解析の基礎（1 次元）

3.　有限要素法による流れ解析の基礎（2 次元）

4.　有限要素法による非圧縮性流れの解法

1 離散化手法の基礎

本章では，偏微分方程式を数値計算により近似的に解く手法の一つである差分法について解説する。差分法は，2 章以降で解説する有限要素法とは異なる手法であるが，数値解析の基礎である「精度」と「安定性」を理解するために，必ず学ばなければならない手法である。また，偏微分方程式が時間微分項を有する場合は時間に関する離散化に差分法を適用することが多く，本書で示すように有限要素法と併用して離散化を施すことも可能である。ここでは，1 次元の拡散方程式，移流方程式および移流拡散方程式に対してさまざまな精度の近似を施し，陽解法あるいは陰解法に対応する離散化式を導出する。そして，一様性を仮定した安定性解析により，それらの離散化式から得られる数値解の安定性を明らかにする。

1.1　1 次元拡散方程式の差分法による離散化

1.1.1　離散化式の導出

はじめに，以下に示す 1 次元拡散方程式（diffusion equation）を考える。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

ここで t は時刻，x は空間の座標，α は拡散係数（diffusion coefficient）であり，ϕ は時間とともに 1 次元空間上で拡散していく物理量である。簡単にするために，ここでは α を定数とする。この方程式の解 $\phi(x,t)$ を近似的に求めるために，同方程式の離散化（discretization）を考えよう。離散化とは，時空間における有限

の情報（関数の値）を用いて元の微分方程式の近似解（approximate solution）が得られるように，元の方程式の微分項を書き換える操作である。元の方程式を厳密に解くことができる場合に得られる解を厳密解（exact solution），離散化を通して得られる解を数値解（numerical solution）と呼ぶ。数値解は近似解の一種と考えることができる。

離散化の際に重要となる道具は Taylor 展開（Taylor expansion）の公式である。関数 $\phi(x)$（ここでは 1 変数関数と考える）が無限回微分可能な場合，$x = a$ のまわりで

$$\begin{aligned}\phi(x) = \phi(a) + \phi'(a)(x-a) + \frac{\phi''(a)}{2!}(x-a)^2 \\ + \frac{\phi'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots\end{aligned} \tag{1.2}$$

と展開することができる。ここで $\phi'(x)$，$\phi''(x)$，$\phi'''(x)$ は，それぞれ $\phi(x)$ の 1 階導関数，2 階導関数，3 階導関数を表す。

最初に式 (1.1) 右辺の空間の離散化について考えよう。時刻を固定した状態で空間微分を考えることができるため，式 (1.2) において $x \to x_0 + \Delta x$，$a \to x_0$（x_0 は任意の x の値）と置き換えると

$$\begin{aligned}\phi(x_0 + \Delta x) = \phi(x_0) + \phi'(x_0)\Delta x + \frac{\phi''(x_0)}{2}\Delta x^2 \\ + \frac{\phi'''(x_0)}{6}\Delta x^3 + \cdots\end{aligned} \tag{1.3}$$

となる。ここで Δx^2 は $(\Delta x)^2$ の意味である（Δx^3 についても同様であり，後に出てくる Δt に対してもこの書き方を適用する）。また，$x \to x_0 - \Delta x$ とすると，式 (1.3) において Δx を $-\Delta x$ に置き換えて

$$\begin{aligned}\phi(x_0 - \Delta x) = \phi(x_0) - \phi'(x_0)\Delta x + \frac{\phi''(x_0)}{2}\Delta x^2 \\ - \frac{\phi'''(x_0)}{6}\Delta x^3 + \cdots\end{aligned} \tag{1.4}$$

を得る。式 (1.3) と式 (1.4) を足し合わせて，$\phi''(x_0)$ について解くと

$$\phi(x_0 + \Delta x) + \phi(x_0 - \Delta x) = 2\phi(x_0) + \phi''(x_0)\Delta x^2 + \mathcal{O}\left(\Delta x^4\right)$$

$$\phi''(x_0) = \frac{\phi(x_0+\Delta x) - 2\phi(x_0) + \phi(x_0-\Delta x)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}\left(\Delta x^2\right) \qquad (1.5)$$

となり，$x = x_0$ における空間に関する 2 階微分を，異なる 3 点における ϕ の値を含んだ別の形で表すことができる。式 (1.5) の右辺第 2 項に示す $\mathcal{O}\left(\Delta x^2\right)$ は，Δx^s（ただし，$s \geq 2$）を有するすべての項を含み，Δx を小さくしていく場合，その大きさが Δx^2 のオーダーで減少することを意味する†。したがって，この項を省いた場合に得られる $\phi''(x_0)$ の近似表現は空間 2 次精度（second-order accurate in space）であるという。Δx は空間刻み幅（space increment）と呼ばれる。なお，オーダーを示す項 $\mathcal{O}(\cdots)$ の符号については，常に「+」で表すこととする。

次に，式 (1.1) の左辺の時間に関する離散化を考える。位置を固定した状態で時間微分を考えることができるため，式 (1.2) において $x \to t_0 + \Delta t$，$a \to t_0$（t_0 は任意の t の値）と置き換えると

$$\phi(t_0+\Delta t) = \phi(t_0) + \phi'(t_0)\Delta t + \mathcal{O}\left(\Delta t^2\right)$$

$$\phi'(t_0) = \frac{\phi(t_0+\Delta t) - \phi(t_0)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \qquad (1.6)$$

となり，$t = t_0$ における時間に関する 1 階の微分係数が得られる。$\mathcal{O}(\Delta t)$ を省いて得られる $\phi'(t_0)$ の近似表現は時間 1 次精度（first-order accurate in time）であり，この場合は前進差分（forward difference）とも呼ばれる。また，Δt は時間刻み幅（time increment）と呼ばれる。

式 (1.1) は任意の位置, 時刻に対して成り立つ偏微分方程式であるため, $x = x_0$，$t = t_0$ に対して成り立つ式であることを明示すると次のようになる。

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{x=x_0}^{t=t_0} = \alpha \left.\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right|_{x=x_0}^{t=t_0} \qquad (1.7)$$

式 (1.5) と式 (1.6) にそれぞれ固定した時刻（$t = t_0$）と位置（$x = x_0$）の情報

---

† 厳密には,「$\phi(x)$ の n 階導関数（$n \geq 1$）の大きさが $\phi(x)$ の大きさと同じオーダーかそれより小さい場合において」という条件を付加する必要がある。例えば, $\phi(x) = \sin(5\,000x)$ を考えた場合，高次導関数を含む項を消去するためには Δx をどのように設定しなければならないか考えてみよ。

を加え，それらを偏微分の形に修正した式を式 (1.7) に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned}&\frac{\phi(x_0, t_0+\Delta t)-\phi(x_0, t_0)}{\Delta t}\\&=\alpha\frac{\phi(x_0+\Delta x, t_0)-2\phi(x_0, t_0)+\phi(x_0-\Delta x, t_0)}{\Delta x^2}\\&\quad+\mathcal{O}\left(\Delta x^2, \Delta t\right)\end{aligned} \tag{1.8}$$

さらに，時刻 t_0 を整数 n（ステップ），位置 x_0 を整数 i に対応させて†，それらを上下の添字で表し，時間 Δt や距離 Δx の分だけ時刻や位置の座標が増える（あるいは減る）場合に添字の数を一つ増やす（あるいは減らす）と，式 (1.8) を次のように表すことができる。

$$\frac{\phi_i^{n+1}-\phi_i^n}{\Delta t}=\alpha\frac{\phi_{i+1}^n-2\phi_i^n+\phi_{i-1}^n}{\Delta x^2}+\mathcal{O}\left(\Delta x^2, \Delta t\right) \tag{1.9}$$

この式の右辺第 2 項を微小として無視するためには，Δx と Δt の設定に注意する必要がある（3 ページの脚注参照）。

式 (1.7) の代わりに，時刻 $t=t_0+\Delta t$ で拡散方程式 (1.1) を評価する場合，式 (1.9) はどのように変化するだろうか。この場合

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{x=x_0}^{t=t_0+\Delta t}=\alpha\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right|_{x=x_0}^{t=t_0+\Delta t} \tag{1.10}$$

と表されることになり，左辺の差分表現を再検討する必要がある。式 (1.2) において $x\rightarrow t_0$，$a\rightarrow t_0+\Delta t$ と置き換えると

$$\begin{aligned}&\phi(t_0)=\phi(t_0+\Delta t)-\phi'(t_0+\Delta t)\,\Delta t+\mathcal{O}\left(\Delta t^2\right)\\&\phi'(t_0+\Delta t)=\frac{\phi(t_0+\Delta t)-\phi(t_0)}{\Delta t}+\mathcal{O}(\Delta t)\end{aligned} \tag{1.11}$$

となり，$t=t_0+\Delta t$ における時間に関する 1 階の微分係数が得られる。式 (1.11) の右辺第 1 項は式 (1.6) の右辺第 1 項と一致しているが，式 (1.6) とは異なり，注目する時刻（ここでは $t_0+\Delta t$）から Δt だけ前の時刻の ϕ の値を用いて ϕ' を近似していることに注意しよう。このような近似表現を後退差分（backward

† 本章において，この対応は維持されるものとする。

difference）と呼ぶ。式 (1.5) と式 (1.11) で省略した時刻 $t_0+\Delta t$ と位置 x_0 の情報をそれらに加えて書き直し，式 (1.10) に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned}&\frac{\phi\left(x_0,t_0+\Delta t\right)-\phi\left(x_0,t_0\right)}{\Delta t}\\&=\alpha\frac{\phi\left(x_0+\Delta x,t_0+\Delta t\right)-2\phi\left(x_0,t_0+\Delta t\right)+\phi\left(x_0-\Delta x,t_0+\Delta t\right)}{\Delta x^2}\\&\quad+\mathcal{O}\left(\Delta x^2,\Delta t\right)\end{aligned}\tag{1.12}$$

式 (1.9) と同様に添字を用いて式 (1.12) を表すと

$$\frac{\phi_i^{n+1}-\phi_i^n}{\Delta t}=\alpha\frac{\phi_{i+1}^{n+1}-2\phi_i^{n+1}+\phi_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}+\mathcal{O}\left(\Delta x^2,\Delta t\right)\tag{1.13}$$

を得る。

時刻 t_0 における ϕ の空間分布が既知の場合，式 (1.9) の左辺および右辺第 1 項を用いて，時刻 $t_0+\Delta t$，位置 x_0 における ϕ の近似値を求めることができる。そして，式 (1.8)，(1.9) で $x_0\to x_0\pm\Delta x$, $x_0\pm 2\Delta x$, $\cdots$（$i\to i\pm 1$, $i\pm 2$, $\cdots$）と置き換えることにより，時刻 $t_0+\Delta t$ での ϕ の空間分布を求めることができ，その情報を基にして，さらに先の時刻（$t_0+2\Delta t$，$\cdots$）での ϕ の空間分布を求めることもできる。それに対して，式 (1.13) の左辺および右辺第 1 項を用いて時刻 $t_0+\Delta t$ での ϕ の空間分布を求めることを考える場合，右辺第 1 項に（求めようとする）未知の値が含まれるため，前述のような手順を踏むことができない。その場合の解法に関しては，1.1.4 項で詳しく述べる。

以上述べたように，式 (1.9) と式 (1.13) の $\mathcal{O}(\cdots)$ を省いた形で元の式の離散化を施す方法を有限差分法（finite difference method）あるいは単に差分法と呼び，さらに右辺の違いから両者を区別する場合，前者を陽解法（explicit method），後者を陰解法（implicit method）と呼ぶ†。これらの式の時空間における精度（accuracy）は等しいことに注意しよう。一方，安定性（stability）は二つの方法の間で大きく異なる。安定性が損なわれると計算結果が発散する（値の絶対値が非物理的に非常に大きくなる）が，このことと精度を混同して

† より厳密に，ここで述べた陽解法および陰解法を，それぞれ前進 Euler 法および後退 Euler 法と呼ぶこともできる（1.4.1 項参照）。

索　　引

—— 著 者 略 歴 ——

2000年　慶應義塾大学理工学部機械工学科卒業
2001年　慶應義塾大学大学院理工学研究科修士課程修了（開放環境科学専攻）
2003年　慶應義塾大学大学院理工学研究科博士課程修了（開放環境科学専攻），博士（工学）
2003年　マサチューセッツ工科大学（米国）客員研究員
2005年　コヴェントリー大学（英国）客員研究員
2006年　マサチューセッツ工科大学大学院原子力理工学科
（Department of Nuclear Science & Engineering）博士課程入学
2011年　マサチューセッツ工科大学大学院原子力理工学科博士課程修了，Sc.D.
2011年　リーハイ大学（米国）リサーチサイエンティスト
2012年　九州大学特任助教
2013年　九州工業大学准教授
現在に至る

カバーイラスト：高宮ミンディ

詳解 流れの数値計算
—有限要素法による非圧縮性流体解析の基礎—
Detailed Description of Numerical Methods in Fluids
— Fundamentals of Finite Element Analysis of Incompressible Fluid Flows —

2022 年 1 月 21 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略	著　者	河　野　晴　彦
	発 行 者	株式会社　コ ロ ナ 社
		代 表 者　牛 来 真 也
	印 刷 所	三 美 印 刷 株 式 会 社
	製 本 所	牧 製 本 印 刷 株 式 会 社

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発 行 所　株式会社　**コ ロ ナ 社**
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ　https://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–04676–2　C3053　Printed in Japan　（齋藤）