

応用解析からはじめる 弾性力学入門

博士（工学） 岡部 朋永 著

コロナ社

まえがき

大学4年生の夏休みに、せめて何か一つくらい専門をマスターしたいと研究室に籠って弾性力学を勉強した。ただ、ノートや教科書とひたすらにらめっこし、式を追うだけで精一杯で、研究に活かせるほどのレベルには到達しなかったが、それでも、式を変形し、答えが出てくることに、高校数学のときのような面白味を感じた。博士課程での研究は弾性力学の解析解を利用したもので、ああでもない、こうでもないと試行錯誤したことが、いまでも良い思い出となっている。特に、自分だけの近似解が出てきたとき、興奮したことを鮮明に覚えている。教員になり、数値解析がメインになっても、学生との議論では、紙と鉛筆で、単純化した解析解を利用しており、重宝している。弾性力学との出会いこそが、このようなものの見方を教えてくれたと感じている。今回、弾性力学の講義を受け持つにあたり、できうる限り平易な教科書を書こうと決意した。書くにあたっては、あの夏休みや博士課程学生時に感じた、面白さや興奮を伝えられるような入門書を目指すこととした。

弾性力学の数ある名著は、往々にして天下りの、あるいは職人芸的であり、その解法は初学者にはとても真似ができるような感じがしない。本書では、各自が弾性力学を思い思いの目的にて利用できるようにすることを心掛け、できる限り平易な表現で解説することに注力した。そのため、いわゆる応力、ひずみといった概念の高尚かつ厳密な導入に紙面を割くことはせずに、材料力学の知識はある程度はあるものとして、むしろ、各種問題における支配方程式の導出と、その境界値問題における解法の説明に力点をおいた。これらの導出にはフーリエ級数、複素解析、ベクトル、テンソルといった応用解析の最低限の知識が必要となる。そこで1~3章ではその概要を簡単に紹介した（もちろんこれらは応用解析の基本となる部分を多少粗く紹介したにすぎない）。

昨今の設計や開発の現場では、弾性解を用いるよりは、むしろ有限要素法を初めとする数値解析を利用することのほうが圧倒的に多い。そこで、弾性力学と数値解析とのつながりが明確になるように心掛けた。数値解析に特化した本では、連続体力学を導入し、固体、流体、気体といった解析対象を特定しない表現が好まれる。これらは、流麗ではあるが、抽象的すぎて、学部生などの初学者には向かない。執筆にあたってはこの点を強く留意した。

紙面の関係上、大きな変形による座屈やシェル、積分変換といった内容は省かざるを得なかった。これらについては、またの機会に紹介したい。また、エネルギー原理に関しては、恩師である慶應義塾大学名誉教授の清水真佐男先生に大学院生時代にご教示いただいたものの一部が演習として導入されている。これは内部仮想仕事外部仮想仕事になることを材料力学的観点にて確認したもので、初学者にも直観的に変分原理が理解しやすいものとなっている。筆者の手元には、清水先生の大部の資料があり、各種ケースが示されているが、残念ながら紙面の関係上、一部の紹介にとどまっている。

本書の執筆にあたり、九州大学の矢代茂樹先生、東北大学の白須圭一先生、川越吉晃先生、南雲佳子先生、阿部圭晃先生、小野寺壮太君（現在、九州大学）にはたいへん丁寧に原稿に目を通していただき、数多くの鋭いご指摘をいただいた。特に、川越吉晃先生には、高橋博子様とともに原稿作成にもご支援いただいた。お二人の多大なるご尽力なしに、本書は日の目を見なかったと思われる。心より感謝の意を表します。

本書が、単位をとるための通過点にとどまらず、構造、材料といったものの変形に興味を持つきっかけとなれば、筆者にとって、この上ない喜びである。

2021年4月

岡部朋永

目 次

1. フーリエ級数

1.1 三角関数	1
1.2 奇関数・偶関数	6
1.3 周期関数	7
1.4 フーリエ級数	8
1.5 フーリエ余弦級数・フーリエ正弦級数	10
1.6 一般周期におけるフーリエ級数	12

2. 複素解析

2.1 複素数	14
2.2 複素関数	16
2.3 複素関数の微分	18
2.4 複素関数の積分	18
2.5 コーシーの積分定理	20
2.6 級数展開	24

3. ベクトル／テンソル（指標表示）

3.1 ベクトル	26
3.2 テンソル	31

3.3	ベクトル場・テンソル場における微分演算子および発散定理	36
-----	-----------------------------	----

4. ひずみと応力

4.1	変形勾配テンソル	41
4.2	ひずみ	43
4.3	体積ひずみ	46
4.4	応力ベクトル・応力テンソル	48

5. 弾性力学の支配方程式

5.1	平衡方程式	50
5.2	モーメントのつり合い (応力の対称性)	53
5.3	フックの法則	55
5.4	境界値問題と支配方程式	57

6. エネルギー原理

6.1	解の一意性	60
6.2	仮想仕事の原理	62
6.3	ポテンシャルエネルギー最小の定理	65
6.4	カスティリアーノの定理	71

7. 曲線座標と有限要素法

7.1	曲線座標	76
7.2	ベクトルとテンソル	78

7.3 線素とひずみテンソル	79
7.4 直交曲線座標	82
7.5 アイソパラメトリック要素による有限要素法	90

8. 棒 の 曲 げ

8.1 は り 理 論	99
8.2 3 次 元 理 論	101

9. ね じ り

9.1 丸棒のねじり	105
9.2 一般形断面棒のねじり理論	109
9.3 ねじりの応力関数	111
9.4 楕円形断面棒のねじり	114
9.5 中空断面棒のねじり	116
9.6 薄肉部材のねじり	117

10. 棒のせん断曲げ

10.1 問 題 設 定	124
10.2 曲げの応力関数とせん断中心 (半逆解法)	126
10.3 円形断面棒のせん断曲げ	129

11. 平板の曲げ

11.1 基 礎 式	132
------------------	-----

11.2	面外負荷 $q_z = P \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$ を受ける 四辺単純支持長方形板	137
11.3	四辺単純支持長方形板のたわみ (フーリエ級数表示)	138

12. 異方性体の弾性論

12.1	直交異方性体	140
12.2	横等方性体	142
12.3	横等方性平板の曲げ (単純支持)	148

13. 2次元弾性論

13.1	2次元弾性論とは	151
13.2	平面ひずみ	151
13.3	平面応力問題	153
13.4	エアリの応力関数	154
13.5	エアリの応力関数の極座標表示	156
13.6	軸対称問題の解	157
13.7	円孔を持つ無限板の応力分布	158
13.8	複素応力関数 (平面ひずみ)	161
13.9	複素応力関数による応力解析	162

14. ヒルベルト問題

14.1	ヒルベルト問題とは	167
14.2	均質体のき裂内部に圧力を受ける問題	171
14.3	界面き裂	178

15. 線形破壊力学入門

15.1	ウェスタガードの応力関数 (引張・せん断)	186
15.2	集中力の解	195
15.3	ウェスタガードの応力関数 (一般形)	196
15.4	連続分布転位による応力拡大係数の評価	198
付録：複素応力関数による応力解析		205
A.1	$f(z)$ の共役関係	205
A.2	微分の連鎖則	205
A.3	変位あるいは回転についての複素応力関数表示	206
A.4	合力, 合モーメントの複素応力関数表示	208
引用・参考文献		210
索 引		212

1 | フーリエ級数

弾性力学における解析では、変位や応力などの場につわる関数を三角関数の無限級数であるフーリエ級数にて表すことで求解が容易となる。ここでは三角関数、微分、積分に関する基本的な内容から、フーリエ級数までをできる限り平易な表現で説明する。

1.1 三角関数

本書における導入として、三角関数における各種公式の導出から始める。ただし、三角関数そのものはすでに学習済みとして、説明を進めることとする。

三角関数の公式において、基盤となるのが加法定理である。加法定理の導出の仕方として一般に知られているものが二つある。一つは回転行列を用いたものであり、もう一つはオイラーの公式を利用したものである。以下では、和に関する公式は回転行列を用いる方法から、差に関する公式はオイラーの公式から導出する。

回転行列を用いる方法

2次元平面上の点 $(1, 0)$ を点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ に、点 $(0, 1)$ を点 $(-\sin \theta, \cos \theta)$ に移す回転行列 \mathbf{A} を考える。これを式に直すと

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

であり、左辺の二つ目の行列が単位行列であることより、回転行列 \mathbf{A} はつぎの

ように与えられる。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

このとき、角度 $\alpha + \beta$ だけ回転させる回転行列と、角度 α と角度 β の回転を順に作用させたときの合成した回転行列が等しいとおくと

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha & -\cos \beta \sin \alpha - \sin \beta \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha & \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.3)$$

となる。よって、行列成分どうしの比較より

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \quad (1.4)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (1.5)$$

が得られる。

オイラーの公式を用いる方法

指数関数の積の公式 $e^{i(\alpha-\beta)} = e^{i\alpha}e^{-i\beta}$ の両辺にオイラーの公式 ($e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$) を適用する

$$e^{i(\alpha-\beta)} = \cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta) \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} e^{i\alpha}e^{-i\beta} &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta - i \sin \beta) \\ &= (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha) \end{aligned} \quad (1.7)$$

よって、式 (1.6) と式 (1.7) の実部、虚部を比較することで

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \quad (1.8)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (1.9)$$

が得られる。

加法定理を用いると各種公式が導出できる。例えば、三角関数どうしの積は和あるいは差の形に書き換えることが可能である。角度を A, B とすると

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} \{ \cos(A - B) - \cos(A + B) \} \quad (1.10)$$

であり、つぎのようにして導出できる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ \cos(A - B) - \cos(A + B) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ (\cos A \cos B + \sin A \sin B) - (\cos A \cos B - \sin A \sin B) \} \\ &= \sin A \sin B \end{aligned} \quad (1.11)$$

同様にして

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} \{ \sin(A + B) + \sin(A - B) \} \quad (1.12)$$

$$\cos A \sin B = \frac{1}{2} \{ \sin(A + B) - \sin(A - B) \} \quad (1.13)$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} \{ \cos(A - B) + \cos(A + B) \} \quad (1.14)$$

が得られる。

三角関数どうしの和 $\sin A + \sin B$ から、 $\alpha = (A + B)/2$ と $\beta = (A - B)/2$ とおくことで、積の形に書き換えることが可能である。

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B &= \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \\ &= 2 \sin \alpha \cos \beta \\ &= 2 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2} \end{aligned} \quad (1.15)$$

同様にして

$$\sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A - B}{2} \cos \frac{A + B}{2} \quad (1.16)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} \quad (1.17)$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A-B}{2} \sin \frac{A+B}{2} \quad (1.18)$$

が求められる。

つぎの三角関数の導関数は問題 1.1 に示すようにして求めることができる[†]。

$$(\sin x)' = \cos x \quad (1.19)$$

$$(\cos x)' = -\sin x \quad (1.20)$$

これらを組み合わせることで各種導関数が求められる。

問題 1.1 つぎの関係を示せ。

$$(1) (\sin x)' = \cos x \quad (2) (\cos x)' = -\sin x$$

【解答】

$$\begin{aligned} (1) (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h} \left(\sin \frac{h}{2} \cos \frac{2x+h}{2} \right) = \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) (\cos x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h} \left(-\sin \frac{2x+h}{2} \sin \frac{h}{2} \right) = -\sin x \end{aligned}$$

◇

積分と微分は逆関係にあるので、先ほどの導関数から、ただちにつぎの関係が得られる。

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad (1.21)$$

[†] ()' は () の導関数を意味する。

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (1.22)$$

問題 1.2 つぎの定積分を求めよ。ただし、 m, n を整数とする。

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx \quad (2) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx \quad (3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nxdx$$

$$(4) \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nxdx \quad (5) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nxdx$$

【解答】

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx = \left[\frac{1}{m} \sin mx \right]_{-\pi}^{\pi} = \begin{cases} 2\pi & (m=0)^\dagger \\ 0 & (m \neq 0) \end{cases}$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx = \left[-\frac{1}{m} \cos mx \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nxdx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\} dx \\ = \begin{cases} \pi & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

$$(4) \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nxdx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\} dx \\ = \begin{cases} \pi & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

$$(5) \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nxdx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{\sin(m+n)x - \sin(m-n)x\} dx \\ = 0$$

◇

† $m=0$ のとき

$$\text{与式} = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$$

索引

【あ】	球座標	86	【す】	
アインパラメトリック要素	境界条件	57	垂直ひずみ	141
	境界値問題	57	スカラー場	37
90	共変成分	78		
【い】	行列式	29, 47	【せ】	
位置ベクトル	極座標	15, 156	線形破壊力学	186
76	曲線座標	76, 80	線積分	18, 19
【う】	キルヒホッフの仮定	134, 148	線素	43
薄肉部材のねじり			せん断中心	128
117	【く】		せん断流	120
運動方程式	食い違い	165	せん断力	106
52	グリーンのひずみテンソル	44	全微分	42
運動量保存の法則				
51	グルサの応力関数	161	【そ】	
【え】	クロネッカーのデルタ	30	総和規約	27
エアリの応力関数				
154	【け】		【た】	
円孔を持つ無限板	計量テンソル	80	第1変分	68, 72
158	現配置	41	体積ひずみ	48
円柱座標			体積力	50
82	【こ】		第2変分	70
【お】	勾配	37	楕円形断面棒のねじり	114
応力	合力	132	縦弾性係数	56
41, 49	コーシーの公式	49	単純支持	137, 148
応力拡大係数	固定端	137, 150		
177, 192	【し】		【ち】	
応力テンソル	軸対称問題	157	置換積分	6, 12, 199
48	試行関数	74	調和関数	18
応力ベクトル	四辺単純支持長方形板	137, 138	直接表記	81
48			直交異性体	140
【か】	自由端	137	直交曲線座標	82
外積	重調和関数	155		
28			【て】	
回転			停留条件	67
2, 208				
解の一意性				
60				
外力				
48				
角運動量				
53				
仮想仕事の原理				
62				
仮想変位				
63				
【き】				
基準配置				
41				

<p>適合条件 45, 125, 153, 154, 156</p> <p>テンソル 32, 79</p> <p style="text-align: center;">【な】</p> <p>内 積 27</p> <p>内 力 48</p> <p>ナブラ 36</p> <p style="text-align: center;">【に】</p> <p>2次元弾性問題 151</p> <p style="text-align: center;">【ね】</p> <p>ねじり関数 110</p> <p>ねじり剛性 115, 118</p> <p>ねじりの応力関数 111</p> <p>ねじりモーメント 105</p> <p>ねじり率 106</p> <p style="text-align: center;">【は】</p> <p>刃状転位 166</p> <p>発 散 38</p> <p>発散定理 39, 40</p> <p>はり理論 99</p>	<p>半逆解法 126</p> <p>反変成分 78</p> <p style="text-align: center;">【ひ】</p> <p>微小ひずみテンソル 44</p> <p>ひずみ 43</p> <p>ひずみエネルギー 67</p> <p>ひずみ仕事最小の定理 71</p> <p>ひずみテンソル 81</p> <p style="text-align: center;">【ふ】</p> <p>フーリエ級数 8</p> <p>フックの法則 55</p> <p style="text-align: center;">【へ】</p> <p>平衡方程式 50, 53, 62</p> <p>平板の曲げ 132, 148</p> <p>平面応力 143, 151, 153</p> <p>平面ひずみ 144, 151</p> <p>ベクトル 26</p> <p>ベルヌーイ・オイラー の仮説 100</p> <p>変 位 41</p> <p>変形勾配テンソル 43</p>	<p style="text-align: center;">【ほ】</p> <p>ポアソン比 56</p> <p>ポテンシャルエネルギー 67</p> <p>ポテンシャルエネルギー 最小の定理 65</p> <p style="text-align: center;">【ま】</p> <p>曲げの応力関数 126</p> <p>曲げ変形 128</p> <p>曲げモーメント 100, 101, 156</p> <p style="text-align: center;">【や】</p> <p>ヤング率 73</p> <p style="text-align: center;">【ゆ】</p> <p>有限要素法 76, 90</p> <p style="text-align: center;">【よ】</p> <p>横弾性係数 56</p> <p style="text-align: center;">【わ】</p> <p>ワーピング 109</p>
---	---	---

—— 著者略歴 ——

- 1996年 慶應義塾大学工学部機械工学科卒業
1998年 慶應義塾大学大学院理工学研究科前期博士課程修了（機械工学専攻）
1999年 慶應義塾大学大学院理工学研究科後期博士課程修了（機械工学専攻）
博士（工学）
2001年 独立行政法人産業技術総合研究所研究員
2002年 東北大学助教授
2007年 東北大学准教授
2014年 東北大学教授
現在に至る

応用解析からはじめる弾性力学入門

Introduction to Applied Analysis and Elasticity

© Tomonaga Okabe 2021

2021年6月15日 初版第1刷発行



検印省略

著者 岡部 ともなが
発行者 株式会社 コロナ社
代表者 牛来 真也
印刷所 三美印刷株式会社
製本所 有限会社 愛千製本所

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844 · 電話 (03) 3941-3131(代)

ホームページ <https://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-04673-1 C3053 Printed in Japan

(齋藤)



< 出版者著作権管理機構 委託出版物 >

本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつど事前に、出版者著作権管理機構（電話 03-5244-5088, FAX 03-5244-5089, e-mail: info@jcopy.or.jp）の許諾を得てください。

本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めていません。落丁・乱丁はお取替えいたします。