応用解析からはじめる
弾性力学入門

博士（工学）　岡部　朋永　著

コ ロ ナ 社

ま　え　が　き

大学 4 年生の夏休みに，せめて何か一つくらい専門をマスターしたいと研究室に籠って弾性力学を勉強した。ただ，ノートや教科書とひたすらにらめっこし，式を追うだけで精一杯で，研究に活かせるほどのレベルには到達しなかったが，それでも，式を変形し，答えが出てくることに，高校数学のときのような面白味を感じた。博士課程での研究は弾性力学の解析解を利用したもので，あぁでもない，こうでもないと試行錯誤したことが，いまでも良い思い出となっている。特に，自分だけの近似解が出てきたとき，興奮したことを鮮明に覚えている。教員になり，数値解析がメインになっても，学生との議論では，紙と鉛筆で，簡単化した解析解を利用しており，重宝している。弾性力学との出会いこそが，このようなものの見方を教えてくれたと感じている。今回，弾性力学の講義を受け持つにあたり，できうる限り平易な教科書を書こうと決意した。書くにあたっては，あの夏休みや博士課程学生時に感じた，面白さや興奮を伝えられるような入門書を目指すこととした。

弾性力学の数ある名著は，往々にして天下り的，あるいは職人芸的であり，その解法は初学者にはとても真似ができるような感じがしない。本書では，各自が弾性力学を思い思いの目的にて利用できるようにすることを心掛け，できる限り平易な表現で解説することに注力した。そのため，いわゆる応力，ひずみといった概念の高尚かつ厳密な導入に紙面を割くことはせずに，材料力学の知識はある程度はあるものとして，むしろ，各種問題における支配方程式の導出と，その境界値問題における解法の説明に力点をおいた。これらの導出にはフーリエ級数，複素解析，ベクトル，テンソルといった応用解析の最低限の知識が必要となる。そこで 1～3 章ではその概要を簡単に紹介した（もちろんこれらは応用解析の基本となる部分を多少粗く紹介したにすぎない）。

昨今の設計や開発の現場では，弾性解を用いるよりは，むしろ有限要素法を初めとする数値解析を利用することのほうが圧倒的に多い。そこで，弾性力学と数値解析とのつながりが明確になるように心掛けた。数値解析に特化した本では，連続体力学を導入し，固体，流体，気体といった解析対象を特定しない表現が好まれる。これらは，流麗ではあるが，抽象的すぎて，学部生などの初学者には向かない。執筆にあたってはこの点を強く留意した。

紙面の関係上，大きな変形による座屈やシェル，積分変換といった内容は省かざるを得なかった。これらについては，またの機会に紹介したい。また，エネルギー原理に関しては，恩師である慶應義塾大学名誉教授の清水真佐男先生に大学院生時代にご教示いただいたものの一部が演習として導入されている。これは内部仮想仕事が外部仮想仕事になることを材料力学的観点にて確認したもので，初学者にも直観的に変分原理が理解しやすいものとなっている。筆者の手元には，清水先生の大部の資料があり，各種ケースが示されているが，残念ながら紙面の関係上，一部の紹介にとどまっている。

本書の執筆にあたり，九州大学の矢代茂樹先生，東北大学の白須圭一先生，川越吉晃先生，南雲佳子先生，阿部圭晃先生，小野寺壮太君（現在，九州大学）にはたいへん丁寧に原稿に目を通していただき，数多くの鋭いご指摘をいただいた。特に，川越吉晃先生には，高橋博子様とともに原稿作成にもご支援いただいた。お二人の多大なるご尽力なしに，本書は日の目を見なかったと思われる。心より感謝の意を表します。

本書が，単位をとるための通過点にとどまらず，構造，材料といったものの変形に興味を持つきっかけとなれば，筆者にとって，この上ない喜びである。

2021 年 4 月

岡部朋永

本書のためにホームページを開設しました：http://www.plum.mech.tohoku.ac.jp/

目　　　　　次

1.　フーリエ級数

2.　複　素　解　析

3.　ベクトル／テンソル（指標表示）

4.　ひずみと応力

5.　弾性力学の支配方程式

6.　エネルギー原理

7.　曲線座標と有限要素法

8.　棒 の 曲 げ

9.　ね じ り

10.　棒のせん断曲げ

11.　平 板 の 曲 げ

12.　異方性体の弾性論

13.　2 次 元 弾 性 論

14.　ヒルベルト問題

15. 線形破壊力学入門

1 フーリエ級数

弾性力学における解析では，変位や応力などの場にまつわる関数を三角関数の無限級数であるフーリエ級数にて表すことで求解が容易となる。ここでは三角関数，微分，積分に関する基本的な内容から，フーリエ級数までをできる限り平易な表現で説明する。

1.1 三 角 関 数

本書における導入として，三角関数における各種公式の導出から始める。ただし，三角関数そのものはすでに学習済みとして，説明を進めることとする。

三角関数の公式において，基盤となるのが加法定理である。加法定理の導出の仕方として一般に知られているものが二つある。一つは回転行列を用いたものであり，もう一つはオイラーの公式を利用したものである。以下では，和に関する公式は回転行列を用いる方法から，差に関する公式はオイラーの公式から導出する。

<u>回転行列を用いる方法</u>

2 次元平面上の点 $(1,\ 0)$ を点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ に，点 $(0,1)$ を点 $(-\sin\theta,\ \cos\theta)$ に移す回転行列 $\boldsymbol{A}$ を考える。これを式に直すと

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

であり，左辺の二つ目の行列が単位行列であることより，回転行列 $\boldsymbol{A}$ はつぎの

ように与えられる。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

このとき，角度 $\alpha+\beta$ だけ回転させる回転行列と，角度 α と角度 β の回転を順に作用させたときの合成した回転行列が等しいとおくと

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha & -\cos\beta\sin\alpha - \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha & \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.3}$$

となる。よって，行列成分どうしの比較より

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \tag{1.4}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{1.5}$$

が得られる。

オイラーの公式を用いる方法

指数関数の積の公式 $e^{i(\alpha-\beta)} = e^{i\alpha}e^{-i\beta}$ の両辺にオイラーの公式 ($e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$) を適用する

$$e^{i(\alpha-\beta)} = \cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta) \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned} e^{i\alpha}e^{-i\beta} &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta) \\ &= (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha) \end{aligned} \tag{1.7}$$

よって，式 (1.6) と式 (1.7) の実部，虚部を比較することで

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \tag{1.8}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{1.9}$$

が得られる。

加法定理を用いると各種公式が導出できる。例えば，三角関数どうしの積は和あるいは差の形に書き換えることが可能である。角度を A，B とすると

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B) - \cos(A+B)\} \tag{1.10}$$

であり，つぎのようにして導出できる。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\{\cos(A-B) - \cos(A+B)\} \\
&\quad = \frac{1}{2}\{(\cos A \cos B + \sin A \sin B) - (\cos A \cos B - \sin A \sin B)\} \\
&\quad = \sin A \sin B
\end{aligned} \tag{1.11}$$

同様にして

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}\{\sin(A+B) + \sin(A-B)\} \tag{1.12}$$

$$\cos A \sin B = \frac{1}{2}\{\sin(A+B) - \sin(A-B)\} \tag{1.13}$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B) + \cos(A+B)\} \tag{1.14}$$

が得られる。

三角関数どうしの和 $\sin A + \sin B$ から，$\alpha = (A+B)/2$ と $\beta = (A-B)/2$ とおくことで，積の形に書き換えることが可能である。

$$\begin{aligned}
\sin A + \sin B &= \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \\
&= 2 \sin \alpha \cos \beta \\
&= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}
\end{aligned} \tag{1.15}$$

同様にして

$$\sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} \tag{1.16}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2} \tag{1.17}$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2} \tag{1.18}$$

が求められる。

つぎの三角関数の導関数は問題 1.1 に示すようにして求めることができる†。

$$(\sin x)' = \cos x \tag{1.19}$$

$$(\cos x)' = -\sin x \tag{1.20}$$

これらを組み合わせることで各種導関数が求められる。

問題 1.1　つぎの関係を示せ。

(1)　$(\sin x)' = \cos x$　(2)　$(\cos x)' = -\sin x$

【解答】

$$\begin{aligned}(1)\quad (\sin x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2}{h}\left(\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}\right) = \cos x\\ (2)\quad (\cos x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2}{h}\left(-\sin\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}\right) = -\sin x\end{aligned}$$

◇

積分と微分は逆関係にあるので，先ほどの導関数から，ただちにつぎの関係が得られる。

$$\int \cos x dx = \sin x + C \tag{1.21}$$

† (　　)′ は (　　) の導関数を意味する。

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \tag{1.22}$$

問題 1.2 つぎの定積分を求めよ。ただし，m，n を整数とする。

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx$ (2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx$ (3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx$

(4) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx$ (5) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx$

【解答】

(1) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx = \left[\frac{1}{m}\sin mx\right]_{-\pi}^{\pi} = \begin{cases} 2\pi & (m=0)^{\dagger} \\ 0 & (m \neq 0) \end{cases}$$

(2) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx = \left[-\frac{1}{m}\cos mx\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

(3) $$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\} dx \\ &= \begin{cases} \pi & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\} dx \\ &= \begin{cases} \pi & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}\end{aligned}$$

(5) $$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \{\sin(m+n)x - \sin(m-n)x\} dx \\ &= 0\end{aligned}$$

◇

---

† $m=0$ のとき

$$与式 = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$$

索　　引

—— 著 者 略 歴 ——

1996年　慶應義塾大学理工学部機械工学科卒業
1998年　慶應義塾大学大学院理工学研究科前期博士課程修了（機械工学専攻）
1999年　慶應義塾大学大学院理工学研究科後期博士課程修了（機械工学専攻）
　　　　博士（工学）
2001年　独立行政法人産業技術総合研究所研究員
2002年　東北大学助教授
2007年　東北大学准教授
2014年　東北大学教授
　　　　現在に至る

応用解析からはじめる弾性力学入門

Introduction to Applied Analysis and Elasticity

2021 年 6 月 15 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略

著　者　岡部 朋永（おかべ ともなが）
発行者　株式会社　コロナ社
　　　　代表者　牛来真也
印刷所　三美印刷株式会社
製本所　有限会社　愛千製本所

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発 行 所　株式会社　コ ロ ナ 社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ　https://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–04673–1　C3053　Printed in Japan　（齋藤）