

# 演習 機械システムの振動

— 振動診断力アップの精選問題 —

工学博士 松下 修己  
博士(工学) 小林 正生 共著

コロナ社

## まえがき

『回転機械の振動—実用的振動解析の基本—』<sup>†1</sup>、『続 回転機械の振動—実機の振動問題と振動診断—』<sup>†2</sup>、『実践 機械システムの振動—実機振動問題の簡易解析—』<sup>†3</sup>に続き、このたび『演習 機械システムの振動—振動診断力アップの精選問題—』を執筆した。第1, 2巻においては実務にすぐ役立つ理論・技術の応用知識に重点を置き、第3巻では著者らがコンサルタント業務の中で実際に会ったトラブルとその解決策を取り上げた。第4巻の本書では実機技術者に向けて、「ロータ」を含め機械振動分野全般における力学に視点を置き、各テーマを基礎的に確認するために演習問題として再構成を試みた。

著者らは拙書をテキストにして講習会などを行い、いろいろな機会をとらえて速習講義を行ってきた。また、企業での回転機械の振動トラブルシューティングにも参加してきた。このようなコンサルティング活動においては、「難しい構造の実機を簡単な力学モデル系で、複雑な実機運転状況を簡潔なメカニズムで、かつ簡単で的を射た数学で、できれば最高でも Excel 数学の範囲内で」というようなことが最大公約数的な求めであった。確かに、昔に比べて製品のサイクルは短く、忙しい職場なので、ごもったもなごとと感じ入っている。そのような要請に応えるべく、本書では演習問題を用意した。特徴は、実務で遭遇するであろうと思われる問題を厳選したこと、実機にすぐ応用可能な1~2自由度モデルを採用したこと、問題解決提案に向けて簡潔な解説を加えたこと、シミュレーションによる確認などである。現場で遭遇するであろう振動問題を演習問題の中で再現し、その問題解決の成功体験の一端を感得願いたい。

---

†1 本書第1巻『回転機械の振動—実用的振動解析の基本—』(R1と略記)

†2 本書第2巻『続 回転機械の振動—実機の振動問題と振動診断—』(R2と略記)

†3 本書第3巻『実践 機械システムの振動—実機振動問題の簡易解析—』(K1と略記)

国際的な視点に目を転じると、機械振動問題やそのトラブルシューティングを担当する技術者を振動診断技術者と総称し、その品質向上ならびに研鑽を積むべく、ISO TC 108 (機械振動と衝撃)/SC5 (機械の状態監視と振動診断)/WG7 (同技術者の訓練および認証) では、ISO 18436-2「CME (conditioning monitoring and diagnostic engineers) 認証」を発行し、また、世界各地で CME 認証制度の運用を勧めている状況にある。そこでは、実務者として習得すべきカリキュラムや資格試験の方法などが細かく載っている。

わが国においては、この「認証」制度は日本機械学会が受け皿となり、2004 年から運用されている。資格は 4 段階のカテゴリーに分かれ、カテゴリー取得者の延べ総数は 7000 人に達し、今日も発展している。約 1 週間の講義を受けた後、受験し、合格すれば認定証を得る。著者はこの機関の草創期の出題・採点班の責任者を担当した。

採点から見て、個人的には、問題は大きく分けて 2 種類あると感じた。一つは、経験量が理解を助ける振動問題である。例えば、軸受温度の影響、損傷の出方・見方、FFT の操作などである。他方は、数学が関わる問題である。例えば、バランスウエイトを取り付けるべき大きさと位相、さらには実際のボルト穴 2 箇所に向けてベクトル分解するような計算問題である。後者が超難解のようである。また、例えば FFT 計測器ではハード的に半自動でアンチエイアシングフィルタがかかっており大丈夫であるが、波形を Excel で自分流に FFT 解析しようとする場合、そのフィルタ挿入を自分で考慮しなければならない。「オートマチック車は得意だが、マニュアル車は苦手」に似たような数学の壁が確かに存在しているようである。

じつは本書執筆の直前に、本書第 1, 2 巻に対応した英語版『Vibrations of Rotating Machinery (Vol. 1 & 2)』(2019) を Springer-Nature 社から出版した。この本の分類は「Mathematics for Industry 17」となっている。最初は、なぜ数学の分類か、といぶかっていたが、最近ではなるほどと感じ入っている。出版編集者にとって「機械の信頼性設計の核心は数学だ」と思っているものと推察している。

本書では、このような CME 現場における「日常業務の数学の壁」を克服していただけるように演習問題を構成した。ISO 認証試験のうち、経験的に習得するような知見は省き、振動工学の実用理論面に特化している。認証試験準備の参考書として大いに役立つものと信じている。本書の原稿を査読していただいた専門家からは「最高位のカテゴリー 4 をも超えている」という評もあったが、振動トラブルシュータとしては必須の知見と思われるゆえ、読者の向学心に期待してこの「超え」を許していただきたい。

本書では、まえがきの頁を増やし、各章立てを少しばかり丁寧に説明する。

**第 1 章**は、ISO 認証の模擬試験問題 30 題である。カテゴリー 2~3 程度を想定し、本番の 100 問 (5 択問題) のうち、理論的なところのみを集めている。ISO の試験について未経験の読者のために準備したものである。著者が行っている 1 時間の直前速習講義では、いつもその後に、1 時間のこの試験を楽しんでもらっている。皆さん、ほぼ満点である。

**第 2~6 章**が本書の核心で、5 択問題から離れ、問題は急に難しくなる。しかし心配は無用で、すべてにわたって解説を載せている。各章の問題の分野をつぎのように分類している。

**第 2 章：発展問題：モデル化**—固有振動、剛性、減衰、モード解析、ジャイロ、モード合成—  
大学などの「機械力学」で学ぶ 1 自由度系とモード解析の総復習で、固有振動数と (モード) 減衰比の評価を主要テーマにした。加えて、実機モデル化でキーとなるモード合成法について納得して頂く。

**第 3 章：発展問題：バランスング**—剛体バランス、モードバランス、影響係数法、線形計画法、3 点法—  
1 面フィールドバランスをしっかりと理解して、その影響ベクトルの考えを多面バランスに応用し、多くの危険速度を超えることが可能な一般的方法を体得する。現地バランス作業には大切な知見である。

**第4章：発展問題：振動と制御** — ブロック線図, 磁気浮上, ジェフコットロータ, 制御弁, 時間遅れ系 —  
最も腐心した章である。運動方程式に代わってラプラス変換, ブロック線図, 伝達関数など, 機械振動と制御工学をメカトロ機械振動制御の観点から共通理解できるように工夫した。どちらもダイナミクスであり, その知見は固有振動数と (モード) 減衰比・安定性に集約されることが力説される。

**第5章：発展問題：強制・自励振動** — 動吸振器, ふれまわり, 動静翼干渉, オイルホイップ, 流体関連, サージ —  
日本機械学会の **v\_BASE** などでは, 多くの振動問題事例が収録されている。産業界でもこのダイナミクス・振動設計が難しい分野であることを意味している。ここでは, それらの問題解決を考えるうえでの糸口を与えられる知見を展開している。実機を意識して, できるだけわかりやすい問題設定とその解析方法を紹介している。

**第6章：発展問題：信号処理・診断** — 信号処理, サンプリング, FFT, フィルタリング, 振動診断 —  
計測畑がミッションの読者には, ぜひすべての問いに目を通し, 今後役立つ手法があればしっかりと理解し活用をお願いする。また, Excel で FFT などの振動処理を担当する読者には, いろいろなフィルタが活用できるようにアルゴリズムなども紹介する。

書き終えてみると, 筆力の不足から, 講義やセミナーのように振動現象の解明と対策のおもしろさを表現できていないのではないかと, また, 著者らの浅学非才や独断に基づく誤った説明がなされているのではないかと不安もある。万全の体制で執筆に努めたが, 専門の範囲も広く, また奥も深く, 山の高さを痛感している。読者の皆様の批判や叱正を得ることができれば著者らの望外の喜びとするところである。

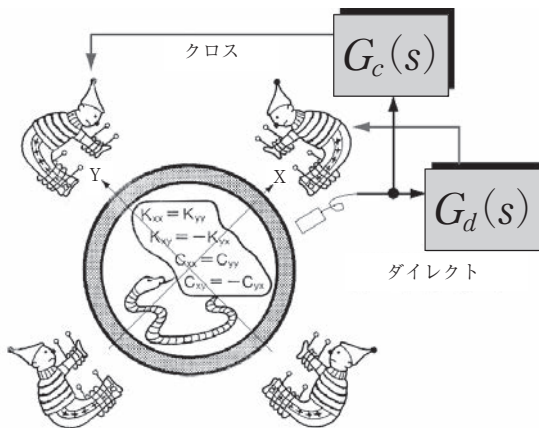
最後に, 本書に引用した書物, 文献の内外の著者に対して深甚の謝意を表します。日本機械学会 ISO 振動診断士認証委員会のメンバーである本井久之 様 (株式会社 IHI), 小村英智 様 (3DIM 技研), 山口和幸 様 (株式会社日立製作所), 渡部幸夫 様 (元 株式会社東芝), 高橋直彦 様 (株式会社日立インダストリアルプロダクツ), 藤原浩幸 教授 (防衛大学校) には, 終始多大なご支

援ご鞭撻を仰いだ。皆様のご厚情に深く感謝の意を申し上げます。また、新川文登 様（新川電機株式会社 社長）ならびに和久井伸栄 様（ニュートンワークス株式会社 社長）には著作作業に関し終始格段のご鞭撻を賜り感謝申し上げます。

最後に、本書の出版企画にご支援いただいたコロナ社に厚く御礼申し上げます。

2021 年 7 月

著者代表 松下 修己



図序 磁気軸受機能シンボルマーク

追記：松下が、ISO TC108/SC2/WG7「磁気軸受」プロジェクトのコンビーナ時代（1997-2010）に分科会発表で愛用した OHP。

# 目 次

## 第 1 章 ISO 認証の模擬試験問題 30 題

1・1 30 題 (5 択) .....	1
1・2 解答とヒント .....	14

## 第 2 章 発展問題：モデル化

### — 固有振動，剛性，減衰，モード解析，ジャイロ，モード合成 —

問題 2・1 2 自由度ねじり系の運動方程式の導出 .....	16
問題 2・2 2 自由度ねじり系の固有モードと固有振動数 .....	17
問題 2・3 2 自由度ねじり系 (片端部固定) .....	19
問題 2・4 2-DOF 系のモード解析とモーダルパラメータ .....	21
問題 2・5 2-DOF 系のモード解析と等価質量測定 .....	23
問題 2・6 等価質量の同定：質量感応法 .....	24
問題 2・7 低減衰系の減衰比の推定法 (ヒルベルト変換) .....	25
問題 2・8 減衰比の計測 .....	26
問題 2・9 高減衰系の減衰比の計測 .....	27
問題 2・10 慣性モーメントの計算 .....	27
問題 2・11 横慣性モーメント $I_d$ .....	28
問題 2・12 振 動 伝 達 率 .....	29
問題 2・13 重心 G に対する防振ばね支持と端面への変換 .....	30
問題 2・14 ジャイロモーメントの記述：極と横慣性モーメント .....	31
問題 2・15 ジャイロモーメントの記述：角運動量の保存則 .....	33
問題 2・16 ジャイロモーメントの力学的効果 .....	34
問題 2・17 コマの転倒モーメント .....	36
問題 2・18 歯車軸系のねじり固有振動数：等価な 1 軸化 .....	37

問題 2・19	歯車軸系のねじり固有振動数と固有モード	38
問題 2・20	1.5-DOF モデル	40
問題 2・21	縮小 2-DOF モデル <sub>1</sub> (モード合成法, 擬モーダルモデル法)	42
問題 2・22	縮小 2-DOF モデル <sub>2</sub> (モード合成法, 擬モーダルモデル法)	44
問題 2・23	はり要素の剛性行列	45
問題 2・24	片持ちばりの剛性行列	48
問題 2・25	片持ちばり先端が集中質量の固有振動数	49
問題 2・26	片持ちばり先端が円板の固有振動数	50
問題 2・27	片持ちばり先端が回転円板の固有振動数 (ジャイロ連成効果)	50
問題 2・28	ジャイロ連成効果による固有振動数変化	52

### 第 3 章 発展問題：バランスング

#### — 剛体バランス, モードバランス, 影響係数法, 線形計画法, 3 点法 —

問題 3・1	剛体のバランス：2 面への振り分け	55
問題 3・2	ナイキスト線図を用いるフィールドバランス	56
問題 3・3	(続き) 過去のデータを使った再バランス	58
問題 3・4	時間波形を用いたバランス修正	59
問題 3・5	(続き) 過去のデータを使った再バランス	60
問題 3・6	モード別影響係数法による釣合せ	60
問題 3・7	モード別影響係数法による釣合せ (多面バランス)	64
問題 3・8	最小二乗法バランス	68
問題 3・9	線形計画法バランス	69
問題 3・10	3 点法バランス (4-Run Method) の応用	73
問題 3・11	回転パルスおよび変位センサの配置と波形	74
問題 3・12	回転パルスおよび変位センサの配置とボード線図	75
問題 3・13	1 次曲げモードのバランスング	76
問題 3・14	両端を利用する 1 次曲げモードバランス	77
問題 3・15	ツインロータリー圧縮器の剛体バランス	78
問題 3・16	ツインロータリー圧縮器の $N+2$ 面バランス	79
問題 3・17	組付け最適角度 (インデックスバランス)	81
問題 3・18	ISO 釣合い良さ	83
問題 3・19	弾性ロータのモードバランスの手順	84



## 第4章 発展問題：振動と制御

— ブロック線図, 磁気浮上, ジェフコットロータ, 制御弁, 時間遅れ系 —	
問題 4・1	振動系からブロック線図と伝達関数表現へ……………88
問題 4・2	伝達関数とボード線図の関係……………91
問題 4・3	1 質点系と PID 制御問題……………95
問題 4・4	1 質点系と位相進み回路による制御問題……………99
問題 4・5	ジェフコットロータの油軸受に起因するホワール安定性……………103
問題 4・6	制御型高速ロータのジャイロ効果と安定性……………107
問題 4・7	ジェフコットロータパラレルモードの等価開ループ特性……………112
問題 4・8	ジェフコットロータコンカルモードの等価開ループ特性……………115
問題 4・9	2-DOF 系と単一制御器……………117
問題 4・10	ねじり振動に対するモード制御……………119
問題 4・11	弁の振動……………124
問題 4・12	時間遅れ系の振動……………130

## 第5章 発展問題：強制・自励振動

— 動吸振器, ふれまわり, 動静翼干渉, オイルホイップ, 流体関連, サージ —	
問題 5・1	遠心振り子式ねじり動吸振器……………134
問題 5・2	遠心振り子式ねじり動吸振器 (回転座標系表示)……………136
問題 5・3	遠心振り子式アキシャル動吸振器: 回転面外, 回転座標系……………137
問題 5・4	遠心振り子式アキシャル動吸振器: 回転面外, 静止座標系……………138
問題 5・5	減衰付き動吸振器の調整……………139
問題 5・6	動吸振器による自励振動防止……………141
問題 5・7	不釣合いの方向……………142
問題 5・8	すべり軸受支持ロータだ円ふれまわりの表示法……………143
問題 5・9	誘導モータの振動診断……………146
問題 5・10	プーリベルト駆動系……………147
問題 5・11	翼通過振動・動静翼干渉……………148
問題 5・12	旋回失速セル数……………150
問題 5・13	動 静 翼 干 渉……………151
問題 5・14	ベルト回転周期……………155
問題 5・15	不釣合いによるトルク加振……………156
問題 5・16	曲げ-ねじり連成系の重力による 2 次的危険速度……………158

問題 5・17	非対称ロータの重力による 2 次的危険速度	160
問題 5・18	オイルホワール, オイルホイップ	161
問題 5・19	オイルホイップ	162
問題 5・20	油膜の固有振動数 (ハーフスピードホワール)	163
問題 5・21	固有振動数と減衰比の近似モーダル評価	165
問題 5・22	内部減衰と外部減衰	167
問題 5・23	剛性非対称ロータの安定条件 (フルビッツ安定判別)	168
問題 5・24	ホワールからホイップへ	171
問題 5・25	ポペット弁の振動	172
問題 5・26	ポンプのサージ	173
問題 5・27	ポンプ・管路・タンク系のサージ振動数	174
問題 5・28	管路・空気タンク系の固有振動数	175
問題 5・29	サージ発生における $B$ パラメータの物理的な意味	176

## 第 6 章 発展問題：信号処理・診断

### — 信号処理, サンプリング, FFT, フィルタリング, 振動診断 —

問題 6・1	A-D コンバータ (SN 比)	178
問題 6・2	A-D コンバータ (最小電圧)	179
問題 6・3	A-D コンバータ (ダイナミックレンジ)	179
問題 6・4	周波数領域での応答	179
問題 6・5	非線形ねじり加振と応答	181
問題 6・6	キャンベル線図	182
問題 6・7	FFT の諸元 (パラメータ)	183
問題 6・8	ハ ニ ン グ 窓	184
問題 6・9	FFT 分解能 (フラットトップ窓)	186
問題 6・10	FFT 分解能 (ハニング窓)	186
問題 6・11	FFT での実効値とオーバオール値	187
問題 6・12	FFT のスペクトル値とオーバオール値 (矩形窓)	188
問題 6・13	FFT のスペクトル値とオーバオール値 (ハニング窓)	188
問題 6・14	FFT への入力単一周波数は?	189
問題 6・15	モータ振動 (すべり率)	190
問題 6・16	FFT パラメータ設定	191
問題 6・17	エリアシングスペクトル低減策 (バターワースフィルタ)	193
問題 6・18	アンチエリアシングフィルタ (BWF) の漸化式	194

問題 6・19	アンチエリアシングフィルタ (BWF) の遮断特性	196
問題 6・20	状態監視システム	198
問題 6・21	オンライン状態監視システム	199
問題 6・22	実効値	199
問題 6・23	うなり振動波形と FFT	199
問題 6・24	うねり振動波形と FFT	200
問題 6・25	振幅変調 (AM) 振動波形と FFT	200
問題 6・26	玉軸受振動 (外輪由来)	201
問題 6・27	玉軸受振動 (転動体由来)	202
問題 6・28	玉軸受振動 (外輪由来)	202
問題 6・29	玉軸受振動 (内輪由来)	203
問題 6・30	シャットダウン時の振動診断例	204
問題 6・31	ふれまわり軌跡 (前向き, 後ろ向き)	205

## 付 録

付録 1	ハーフパワー法の説明	207
付録 2	ポペット弁の不安定振動	208
付録 2・1	基礎方程式	208
付録 2・2	安定性の検討	209
付録 3	ポンプ・圧縮器におけるサージ現象	210
付録 3・1	管路内液体流れとタンクからなる系の固有振動	210
付録 3・2	タンクが密閉型で空気だまりのある場合	213
付録 3・3	ポンプ系のサージ現象	214
付録 3・4	圧縮器のサージにおける $B$ パラメータ	216

引用・参考文献	220
---------	-----

索引	222
----	-----

# 第2章

## 発展問題：モデル化

— 固有振動，剛性，減衰，モード解析，ジャイロ，モード合成 —

第1章のカテゴリーⅡからⅢレベルを想定した5択の模擬問題に続き，さらに勉強しながら実力をつけるための発展問題として，第2章～6章を用意した。各章とも30問程度用意している。問題のレベルはカテゴリーⅢレベルを想定しているが，退屈にならぬようにカテゴリーⅡレベルの問題，またカテゴリーⅣ，あるいはそれ以上のレベルの高い問題もいくつか混じっている。こうした問題を解きながら自然と実力がつくように，また，すぐには解けなくともヒントを参考に勉強して再チャレンジできるよう，ヒントや解説をできるだけ充実させた。

本章では，振動の基礎としての意味合いがあり，振動システムのモデル化，1自由度系，2自由度系，固有振動数，減衰比，固有モード，モード解析，モード合成法についてのいくつかの問題と，ねじり振動，曲げ振動，ふれまわり振動，ジャイロモーメントの影響についての問題を載せている。

### 問題 2・1 2自由度ねじり系の運動方程式の導出

図2・1\_1のような円板（半径  $R$ ，幅  $h$ ，密度  $\rho$ ）が軸（横弾性係数  $G$ ，直径  $d$ ，長さ  $l$ ，密度は無視）でつながれたねじり振動系がある。

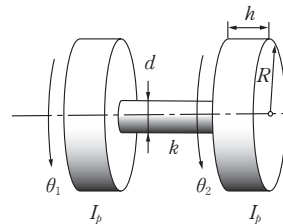


図2・1\_1 2自由度ねじり振動系（その1）

Q(1) 円板1枚の極慣性モーメント  $I_p$  を求めよ。

Q(2) 軸のねじりばね定数  $k$  を求めよ。

Q(3)  $\theta_1$  と  $\theta_2$  の2自由度ねじり振動系の運動方程式を示せ。

**題意** ねじり振動の運動方程式を導出する。

**解答**

$$A(1) \quad I_p = \frac{\rho\pi h R^4}{2} = \frac{MR^2}{2}, \quad \text{ここで } M = \rho\pi R^2 h \text{ (円板質量)}$$

$$A(2) \quad k = \frac{GJ}{l}, \quad \text{ここで } J = \frac{\pi d^4}{32} \text{ (断面2次極モーメント)}$$

$$A(3) \quad \text{行列で書くと, } \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

**ヒント**

H(1) 慣性モーメントは図2・1\_2を参照し、定義より

$$I_p = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \times 2\pi r \rho h dr = 2\rho\pi \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\rho\pi h R^4}{2}$$

H(2) ねじりトルク  $T$  が加わったときの軸長手  $x$  方向のねじり率を  $d\theta/dx$  とする。 $G$ : 横弾性係数,  $J$ : 断面2次極

モーメント,  $GJ$ : ねじり剛性とおくと,  $T = GJ \frac{d\theta}{dx}$  の関係

がある。なお, 断面2次極モーメント  $J$  は定義より

$$J = \int r^2 dA = \int_0^R r^2 \times 2\pi r dr = 2\pi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

長さ  $l$ , ねじり角  $\theta$  のとき, トルク  $T = GJ \frac{\theta}{l} = k\theta$  なので, ねじりばね定数は  $k =$

$$\frac{T}{\theta} = \frac{GJ}{l} \text{ となる。}$$

H(3) 2つの円板の自由度を  $\theta_1, \theta_2$ , および  $f_i$  を  $i$  番目の円板への作用外力とする  
と運動方程式は

$$I_p \ddot{\theta}_1 + k(\theta_1 - \theta_2) = f_1, \quad I_p \ddot{\theta}_2 + k(\theta_2 - \theta_1) = f_2$$

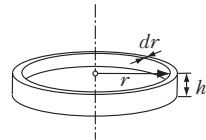


図2・1\_2 リング要素

### 問題2・2 2自由度ねじり系の固有モードと固有振動数

前問Q(3)の運動方程式から以下の設問に答えよ。

Q(1) 固有円振動数を求めよ。

Q(2) 固有振動モード ( $\theta_1$  と  $\theta_2$  の相対関係) を求めよ。

Q(3) 2つのモードが質量行列, 剛性行列に関して直交することを確認せよ。

Q(4) 2つのモードのモード質量  $m_j$ , モード剛性  $k_j$  ( $j=1, 2$ ) を求め, 2つの固有円振動数  $\sqrt{k_j/m_j}$  ( $j=1, 2$ ) が, Q(1)の結果と一致することを示せ。

**題意** 運動方程式から固有振動数と固有モードの導出, 固有モードの直交性を確認する。

**解答**

A(1) 2自由度系なので固有振動数2つ(複素共役を別とすると4つ)。

$$\omega_0 = 0 \text{ (重根)}, \quad \omega_0 = \pm\sqrt{2k/I_p} = \pm 1.41\sqrt{k/I_p}$$

A(2)  $\omega_0 = 0$  のときは  $\begin{Bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$  (平行回転)

$$\omega_0 = \pm\sqrt{\frac{2k}{I_p}} \text{ のときは } \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ (ねじり)}$$

A(3), A(4) ヒントを参照。

**ヒント**

H(1) 運動方程式に  $\theta_i = \bar{\theta}_i \times e^{j\omega t}$  を代入すると

$$\begin{bmatrix} -I_p\omega^2 + k & -k \\ -k & -I_p\omega^2 + k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\det \begin{bmatrix} -I_p\omega^2 + k & -k \\ -k & -I_p\omega^2 + k \end{bmatrix} = 0 \text{ から } (-I_p\omega^2 + k)^2 - k^2 = 0 \text{ の根4つが固有振動数。}$$

$$\text{因数分解すると } (-I_p\omega^2 + k + k)(-I_p\omega^2 + k - k) = (-I_p\omega^2 + 2k)(-I_p\omega^2) = 0$$

したがって,  $\omega_1 = 0$  (重根) と  $\omega_2 = \pm\sqrt{2k/I_p}$  が固有円振動数になる。

H(2) 式(2.1)に  $\omega = \omega_j$  を代入する。 $\omega_1 = 0$  のときは  $\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ ,  $\bar{\theta}_1 = 1$

を代入すると  $\bar{\theta}_2 = 1$  なので,  $\{\phi_1\} = [\bar{\theta}_1 \ \bar{\theta}_2]^t = [1 \ 1]^t$ : 平行回転の剛体モード

$$\omega_2 = \pm\sqrt{\frac{2k}{I_p}} \text{ のときは } \begin{bmatrix} -2k + k & -k \\ -k & -2k + k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \bar{\theta}_1 = 1 \text{ を代入すると } \bar{\theta}_2 = -1.$$

したがって,  $\{\phi_2\} = [\bar{\theta}_1 \ \bar{\theta}_2]^t = [1 \ -1]^t$ : 逆相回転のねじり振動モード。

H(3)  $j$ 次 ( $j=1, 2$ ) のモード質量を  $m_j$ , モード剛性を  $k_j$  とおき,  $\delta_{ij}$  をクロネッカーのデルタとすると, 固有モードの直交性は次式で示される。

$$\{\phi_i\}^t [M] \{\phi_j\} = \delta_{ij} m_i, \quad \{\phi_i\}^t [K] \{\phi_j\} = \delta_{ij} k_i, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ を式(2.2)に代入すると, } \{\phi_1\}^t [M] \{\phi_2\} =$$

$$I_p \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = 0, \quad \{\phi_1\}^t [K] \{\phi_2\} = k \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = 0 \text{ であり, 質量,}$$

剛性行列についていずれも直交している。

H(4) 1次のモード質量は,  $m_1 = \{\phi_1\}'[M]\{\phi_1\} = I_p[1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 2I_p$ , モード剛

性は,  $k_1 = \{\phi_1\}'[K]\{\phi_1\} = k[1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$ , したがって固有円振動数は,  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = 0$ . 2次のモード質量は,  $m_2 = \{\phi_2\}'[M]\{\phi_2\} = I_p[1 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = 2I_p$

モード剛性は,  $k_2 = \{\phi_2\}'[K]\{\phi_2\} = k[1 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = k[2 \quad -2] \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = 4k$

したがって,  $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{2k}{I_p}}$  より, Q(1)の結果と一致する。

**問題 2・3** 2自由度ねじり系 (片端部固定)

図2・3に示す2自由度ねじり振動系は, 問題2・1の $\theta_1$ が軸を介して固定された状態にある。円板間の軸のねじり剛性は $k$ で同じとし, 外力は考えない。

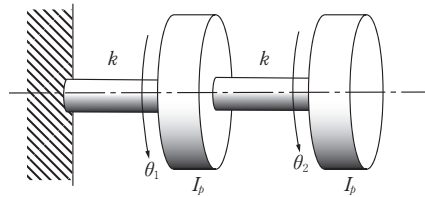


図2・3 2自由度ねじり振動系 (その2)

Q(1)  $\theta_1$  と  $\theta_2$  についての運動方程式を示せ。

Q(2) 固有円振動数を求めよ。

Q(3) 固有振動モードを求めよ。

Q(4) 2つのモードが質量行列, 剛性行列に関して直交することを示せ。

Q(5) 2つのモードのモード質量  $m_j$ , モード剛性  $k_j$  ( $j=1, 2$ ) を求め, 固有円振動数  $\omega_j = \sqrt{k_j/m_j}$  となっていることを示せ。

**題意** 非対称モードで前問を復習する。

**解答**

A(1) 
$$\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2\cdot3)$$

A(2) 
$$\omega_1 = \pm \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{k}{I_p}} = 0.618 \sqrt{\frac{k}{I_p}}, \quad \omega_2 = \pm \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{k}{I_p}} = 1.62 \sqrt{\frac{k}{I_p}}$$

複素共役根が2つ（全体で4根）

$$A(3) \quad \{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ (1+\sqrt{5})/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.618 \end{Bmatrix}, \quad \{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ (1-\sqrt{5})/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.618 \end{Bmatrix}$$

A(4), A(5) ヒントを参照。

**ヒント**

H(1) 運動方程式は,  $I_p \ddot{\theta}_1 + k\theta_1 + k(\theta_1 - \theta_2) = 0$ ,  $I_p \ddot{\theta}_2 + k(\theta_2 - \theta_1) = 0$

H(2) 固有振動数は, 運動方程式(2.3)に  $\theta_i = \bar{\theta}_i \times e^{j\omega t}$  を代入して

$$\begin{bmatrix} -I_p \omega^2 + 2k & -k \\ -k & -I_p \omega^2 + k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

特性方程式は,  $\begin{vmatrix} -I_p \omega^2 + 2k & -k \\ -k & -I_p \omega^2 + k \end{vmatrix} = -k^2 I_p^2 \omega^4 - 3k I_p \omega^2 + k^2 = 0$

この根  $\omega$  が固有値で2次方程式の根公式を用い

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{3kI_p \pm \sqrt{9k^2 I_p^2 - 4I_p^2 k^2}}{2I_p^2} = \left( \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right) \frac{k}{I_p}$$

固有円振動数は  $\omega_1, \omega_2 = \pm \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{k}{I_p}}$

H(3) 固有振動モードは, 式(2.4)に根を代入する。

$$\omega_1 = \pm \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{k}{I_p}} \text{ のとき, } -I_p \omega_1^2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} k \text{ なので}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} k & -k \\ -k & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\bar{\theta}_1 = 1$  を代入すると,  $\bar{\theta}_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \dots$  (同相モード)。

$$\omega_2 = \pm \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{k}{I_p}} \text{ のとき, } -I_p \omega_2^2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} k \text{ なので}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} k & -k \\ -k & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\bar{\theta}_1 = 1$  を代入すると,  $\bar{\theta}_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618 \dots$  (逆相モード) になる。

H(4) 直交性の確認  $\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{Bmatrix}$ ,  $\{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{Bmatrix}$  より



# 索引

## 【あ】

圧縮器のサージ	216
圧力制御弁	208
圧力損失係数	217
油軸受	103
アラームレベル	8
アンチエリアシングフィルタ	193, 196
安定限界	96, 128, 167, 170

## 【い】

位相遅れ	3, 132
位相曲線	97
位相進み回路	99, 103, 109
位相進み制御器	92
位相余裕	97, 101, 116
位置エネルギー	135
異方性	169
インデックスバランス	81
インパルス	11
インパルス応答	114, 122
インレットガイドベーン	151

## 【う】

ウェーク	151
後ろ向き	205
——の固有振動数	110
後ろ向きふれまわり	35, 54, 171, 144
後ろ向きふれまわり振幅	144
うなり波形	199
うねり波形	200
運動エネルギー	135
運動量保存則	211
運搬線	35, 52

## 【え】

影響係数	61
——の再現性	67
影響係数法フィールド	
バランス	57
影響ベクトル	57
エイリアス	197
エリアシング誤差	194
遠心圧縮器	217
遠心振り子式アキシヤル	
動吸振器	137, 138
遠心振り子式ねじり	
動吸振器	134, 136

## 【お】

オイラー・ベルヌーイばり	46, 50
オイルホイップ	161, 164, 171
オイルホワール	161, 164, 171
オーバオール値	6, 184, 187, 188
オーバラップ	191
オフセット補正能力	99
オフセット量	125
オフライン状態監視	198
折返し周波数	193
折れ点周波数	94, 125
オンライン状態監視	198

## 【か】

回転座標	206
回転座標系	136, 160, 163, 169
回転するタイヤ	130
回転パルス	2, 74
開特性	96, 100, 109, 125
開特性理論	142

外部減衰	167
外輪損傷	201
外輪玉通過周波数	201
開ループ伝達関数	113, 117
回転数比 $\lambda\Omega$	104
角運動量	33
角運動量保存則	33
傾き振動	33
片持ちばりの剛性行列	48
カットオフ周波数	125, 194
カテゴリーⅠ	1
カテゴリーⅡ	1
カテゴリーⅢ	1
カテゴリーⅣ	1
カルダーノ法	210
管路系の運動方程式	211
管路定数	211

## 【き】

機械の状態監視と診断	1
キーフェイザ	3
基本周波数	178, 183, 191
擬モーダルモデル法	42
キャンベル線図	149, 154, 182
共振振幅感度	40
極慣性モーメント	13, 16, 28, 32

## 【く, け】

矩形波外力	179
矩形窓	184
ゲイン曲線	93, 96
ゲイン交差周波数	106, 114, 118, 132
ゲインゼロクロス周波数	97, 101
減衰振動波形	10

減衰比	10, 115, 119	サンプリングタイム	184	振幅包絡線処理	25
——の計測	25	サンプリング点数	6	シンプレックス法	71
<b>【こ】</b>		サンプル数	184	<b>【す】</b>	
効果ベクトル	4, 57	残留振動	62	ステップ応答	98, 121
剛性行列	17, 46	<b>【し】</b>		スピルオーバー問題	117
片持ちばりの——	48	ジェフコットロータ	40, 99, 103, 112	スペクトル振幅の低下	190
はり要素の——	45	時間応答波形	6	スラック変数	71
剛性非対称ロータ	160, 168	時間遅れ系	130	スリップ率	147, 191
剛性ロータの釣合せ	56	弛緩振動	215	<b>【せ, そ】</b>	
剛体のバランス	55	軸たわみ	12	正規方程式	69
後退波モード	153	実効値	187	制御器	96
剛体バランス	78	失速セル数	150	制御器伝達関数	96, 110
公転周波数	201	質量感応法	24	制御対象	96
後流	151	質量行列	17	制御弁機構	128
コーナ周波数	125	時定数	110	静止座標	134, 206
コニカルセンサ	122	自転周波数	201	静的偏心	147
コニカルモード	115	絞り弁	216	制約条件	69, 72
コニカルモード制御器	120	ジャイロ効果	107	積分器	99, 109
コマ	36	ジャイロモーメント	31, 33, 51	積分器ゲイン	99
固有円振動数	17	ジャイロ連成効果	50	積分動作	94
固有振動数	10	シャットダウン	204	接触ふれまわり	172
後ろ向きの——	110	修正おもり	4, 57	節直径数	149, 151
前向きの——	110	修正面	56, 65	旋回失速	150, 216
油膜の——	163	——の選択	67	漸近線	35, 52
固有振動モード	17	修正面数	67	線形計画法	69
固有モードの直交性	18	修正面数(未知数)	68	線形計画法バランス	69
<b>【さ】</b>		周波数応答解析	98	前進波モード	153
歳差運動	36	周波数刻み	178, 183, 191	相互相関関数	150
最小二乗法バランス	68	周波数分解能	5, 25, 183	増速比	37
最適減衰定数	40	周波数分析	5	<b>【た】</b>	
再バランス	58, 60	周波数分析スペクトル	→ FFT	対数減衰率	26
サージ	173	自由変数	70	体積弾性係数	172, 209
圧縮器の——	216	重力による2次の危険速度	158	ダイナミックダンパ	134
——の能動制御	219	縮小モデル	43	ダイナミックレンジ	179
——の発生強度	176	状態監視	7	だ円長軸の傾き	143
ポンプ系の——	214	状態監視システム	198	だ円の長軸長さ	143
ポンプの——	173	振動伝達率	29	だ円ふれまわり	143
サージ線	173	振動ベクトル	3	玉軸受振動	201
サージング	210	振幅	4	玉損傷	201
サージング振動数	174	振幅変調波形	200	試しおもり	56, 61
サンプリング周波数	5, 184, 191			多面バランス	64
サンプリング数	191			たわみモード	22

ダンカレー式 41  
 短軸長さ 143  
 弾性ロータ 84  
 ——のモードバランス 84  
 断面2次極モーメント 17

## 【ち、つ、て】

カフィードバック系 93  
 直交性 18  
 固有モードの—— 18  
 ツインロータリー圧縮器 78  
 デジタルフィルタ 194  
 定常状態 96, 125  
 定常状態値 100  
 デフェューザペーン 151  
 伝達関数 91  
 転倒条件 36  
 転動体 201  
 転動体傷 201  
 転動体損傷 202  
 転倒モーメント 36

## 【と】

等価な1軸化 37  
 等価質量 23  
 等価ノイズ帯域幅 186  
 動吸振器 134, 139  
 ——による自励振動防止 141  
 ——の最適化 140  
 動静翼干渉 148, 151  
 動的偏心 147  
 特性曲線 173, 215  
 特性方程式 20, 35  
 トラッキング解析 54  
 トラッキング法 132  
 トレンドデータ 8

## 【な】

ナイキスト周波数 193  
 ナイキスト線図 56  
 内部減衰 167  
 内輪損傷 203  
 内輪玉通過周波数 201

## 【ね、の】

ねじり振動 14, 25, 37, 119, 156  
 ねじりばね定数 16  
 能動型磁気軸受 76

## 【は】

薄円板ロータ系 108  
 歯車軸系 37  
 バターワースフィルタ 193  
 ハニング窓 184  
 ハーフスピードホワール 163  
 ハーフパワー法 43, 115, 207  
 パラレルセンサ 122  
 パラレルモード 112  
 パラレルモード制御器 120  
 はり要素の剛性行列 45  
 バルブ流量特性 210

## 【ひ】

非対称率 168  
 非対称ロータ 160  
 左車窓 97  
 ビット構成 179  
 ビート波形 199  
 非負変数 69  
 微分動作 94  
 標準形の線形計画問題 69  
 ヒルベルト変換 25  
 比例動作 94

## 【ふ】

フィードフォワード加振 76  
 フィールドバランス 3, 56, 61  
 フェラーリの方法 52  
 複素固有値 161  
 不釣合いによるトルク加振 156

負ばね 36  
 フラットトップ窓 186  
 プラント伝達関数 109  
 フーリエ級数展開 180  
 フリクションホイップ 171  
 フリクションホワール 171

プーリベルト駆動系 147  
 フルピッチの安定判別法 142, 170  
 プレナム 216  
 ふれまわり軌跡 205  
 ブロック線図 88, 104

## 【へ】

平均周速比 163  
 平均周速比 $\lambda$  165  
 閉特性 98, 125  
 閉ループ 121  
 閉ループ伝達関数 118  
 ベクトル軌跡 97, 133  
 ベルト回転周期 155  
 ベルト繋ぎ目 147  
 ヘルムホルツ共鳴器 175, 214  
 変位センサ 74  
 弁の振動 124  
 ベントリー・ムジンスカ  
 モデル 163, 165

## 【ほ】

ホイップモード 105  
 防振ゴム 30  
 防振ばね支持 30  
 保持器回転数 201  
 ボータブル状態監視 198  
 ポテンシャル干渉 151  
 ボード線図 91  
 ポペット弁 128, 172, 208  
 ポリトロープ指数 213  
 ボルト飛散 9  
 ホワール安定性 103  
 ホワールモード 105  
 ポンプ系のサージ 214  
 ポンプのサージ 173

## 【ま、み】

前向き 205  
 ——の固有振動数 110  
 前向きふれまわり 35  
 前向きふれまわり振幅 144  
 窓関数 184  
 窓時間 184, 191

マトリックスが特異 ミスチューン	67 41	モードバランス	77, 84	ラグランジュの運動方程式	135, 156
<b>【も】</b>		モード別影響係数法	60	ラプラス変換	89, 130
目的関数	69	モーメントアンバランス	78	流量保存則	173, 211
モータ振動	190	<b>【ゆ, よ】</b>		臨界点	97
モーダルパラメータ	21	誘導モータの振動診断	146	臨界点 dB ポーラ	106
モーダルバランスング	77	油膜軸受	104	<b>【ろ】</b>	
モード解析	22	翼通過周波数	103	ロータバーの損傷	147
モード剛性	18	横慣性モーメント	28, 32	ロールオフ周波数	193
モード合成法	42	予測子修正子法	217		
モード質量	18	<b>【ら, り】</b>			
モード数 (条件数)	68	ライン数	183, 191		
モード制御	119	ラグランジアン	135, 156, 166		

<b>【A】</b>		FRA	98	<b>【Q, R】</b>	
A-D コンバータ	178	frequency response analysis	98	Q 値	10, 14, 42, 114, 207
AMB → 能動型磁気軸受		<b>【I】</b>		regulator	96
<b>【B】</b>		IGV	151	relaxation vibration	215
blade passing frequency	148	ill-conditioned	67	rms	2
BPF	148	in-situ balancing	55	rms 値	199
Butterworth filter	193	ISO 13373-1	198	Routh-Hurwitz の安定判別	102
BWF	193	ISO 18436-2	1	<b>【S, V, Z】</b>	
Bパラメータ	176, 216, 218	ISO 21940-11	84	SN 比	178
<b>【C】</b>		ISO 釣合い良さ	83	Van del Pol 方程式	215
channel constant	211	ISO 認証	1	ZZENF 線図	152
CMS	198	<b>【L, N, O】</b>		<b>【ギリシャ文字】</b>	
condition monitoring system	198	linear programming	69	λ ホワール	106
<b>【D】</b>		LP	69	<b>【数字】</b>	
dB ナイキスト線図	97	N+2 面バランス	79	1.5-DOF モデル	40
dB ポーラ図	106	overall	2	1.5 自由度系	112
deep surge	215	<b>【P】</b>		1 次 LPF	194
<b>【E, F】</b>		peak	2	2-DOF 弾性ロータ	117
Excel 計算	66	peak-peak	2	2 段軸受	99
FFT	6, 183	PID 制御	95	2 面修正	64
FFT 分解能	186	PID 制御器	92	3 点法	15, 73
FF 加振	76	plant	96	4-Run Method	73
		p-p 値	2		
		P, Q 定点理論	140		

— 著者略歴 —

松下 修己 (まつした おさみ)  
1972年 東京大学大学院工学系研究科博士課程  
修了 (機械工学専攻)  
工学博士  
1972年 株式会社日立製作所機械研究所勤務  
1993年 防衛大学校教授  
2010年 防衛大学校名誉教授

小林 正生 (こばやし まさお)  
1977年 東京工業大学大学院理工学研究科修士  
課程修了 (機械物理工学専攻)  
1977年 石川島播磨重工業株式会社 (現 株式  
会社 IHI) 勤務  
1993年 博士 (工学) (東京工業大学)  
2021年 株式会社 IHI 退社

演習 機械システムの振動  
— 振動診断カアップの精選問題 —

Exercises of Mechanical System Vibration

— Selected Problems for Improving Vibration Diagnosis —

© Osami Matsushita, Masao Kobayashi 2021

2021年9月22日 初版第1刷発行



検印省略

著者 松下 修己  
小林 正生  
発行者 株式会社 コロナ社  
代表者 牛来 真也  
印刷所 新日本印刷株式会社  
製本所 有限会社 愛千製本所

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社  
CORONA PUBLISHING CO., LTD.  
Tokyo Japan

振替00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)

ホームページ <https://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-04672-4 C3053 Printed in Japan

(柏原)



**JCOPY** <出版者著作権管理機構委託出版物>

本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつど事前に、出版者著作権管理機構(電話 03-5244-5088, FAX 03-5244-5089, e-mail: info@jcopy.or.jp)の許諾を得てください。

本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めていません。落丁・乱丁はお取替えいたします。