

# 計算破壊力学のための 応用有限要素法 プログラム実装

博士（工学） 長嶋 利夫【著】

コロナ社

# まえがき

本書は、『応力解析のための有限要素法理論とプログラム実装の基礎』（2018年，コロナ社刊，以下前著）の続編として，有限要素法（FEM）を実務で扱われる破壊力学問題の解法へ応用するという観点から，関連する理論，定式化，プログラム実装を解説するものです。具体的には汎用 FEM コードで標準的に用いられている領域積分法による J 積分や応力拡大係数評価方法，静的陰解法による弾塑性解析手法，結合力き裂解析に用いるインターフェース要素の定式化，さらに最近提案された拡張有限要素法（XFEM）について解説しています。

前著と同様に，第 1 部 理論，第 2 部 定式化，第 3 部 プログラム実装 を明確に分けて記述することを心掛け，有限要素法の定式化における指導原理となる仮想仕事の原理式の使い方を理解させる自習書を目指しました。前著では，FEM の理論とプログラム実装方法の基本事項を詳しく解説することを目的として，線形静弾性問題の応力解析に絞りましたが，本書では材料非線形を考慮する必要がある弾塑性解析や結合力き裂解析を扱うために，材料非線形性問題に対する非線形 FEM 解析について詳しく解説しました。

本書で説明する定式化に基づき標準的な C 言語を用いてプログラム実装した 6 種類の FEM，XFEM プログラムのソースコードを，本書に記載した例題についてのサンプルデータとともにコロナ社の WEB ページ<sup>†</sup>に公開しています。C 言語によるプログラムの実行環境があれば，コンパイルして実際にプログラムを読者自身で実行することができます。本書の内容とソースコードを読み比べながら，実際にプログラムを実行することによって，FEM 解析の手順やアルゴリズムなどについて理解を深めることができるものと確信しています。ま

---

<sup>†</sup> <https://www.coronasha.co.jp/np/isbn/9784339046694/>

た，FEM 解析の後処理には可視化が不可欠ですが，本書で説明し公開するプログラムは，フリーソフトウェアである ParaView を用いて可視化できるようにしています。本書が，構造強度設計に関係する実務において，破壊力学に基づく FEM 解析を実施する技術者・研究者の方々の問題解決の一助となれば，著者にとって望外の喜びです。

末筆ながら，本書の出版に関しては，コロナ社には大変お世話になりました。また，ParaView による可視化処理に必要なプログラム処理に関しては，上智大学プロジェクト研究員の今井登氏にご協力いただきました。ここに御礼を申し上げます。

2021 年 1 月

長 嶋 利 夫

# 目 次

## 〈第 1 部：理 論〉

### 1. 応力解析の基礎方程式

1.1 線形弾性体の基礎方程式	1
1.1.1 三次元線形弾性体の基礎方程式	1
1.1.2 二次元線形弾性体の基礎方程式	3
1.2 仮想仕事の原理式	6
1.2.1 三次元変形体の仮想仕事の原理	6
1.2.2 二次元変形体の仮想仕事の原理	7
1.3 構成方程式	8
1.3.1 線形弾性体	8
1.3.2 弾塑性体	13

### 2. 破壊力学の理論式

2.1 破壊力学の概要	23
2.1.1 線形破壊力学	23
2.1.2 き裂先端まわりの応力特異場	24
2.1.3 エネルギー解放率	27
2.1.4 J 積 分	27
2.1.5 破壊力学パラメータの評価	28

2.2	領域積分法による J 積分の評価	29
2.2.1	J 積分の経路独立性	29
2.2.2	J 積分の領域積分表示	31
2.2.3	J 積分の一般化	32
2.3	M 積分によるモード分離	35
2.3.1	モード分離	35
2.3.2	M 積分	36
2.4	結合力き裂	39
2.4.1	二次元結合力モデル	39
2.4.2	三次元結合力モデル	42

### 3. XFEM の理論

3.1	基礎事項	44
3.1.1	アイソパラメトリック要素	44
3.1.2	PUFEM	46
3.1.3	シフティング	48
3.2	レベルセット法	49
3.2.1	二次元き裂	49
3.2.2	三次元き裂	51
3.3	き裂近傍の変位場の近似	52
3.3.1	二次元き裂	52
3.3.2	三次元き裂	56
3.4	パーティション	57
3.5	留意事項	58
3.5.1	拡充節点の範囲	58
3.5.2	漸近解の基底関数	58
3.5.3	ブレンディング	59

## 4. 数値解析法

4.1	ニュートン・ラフソン法	61
4.2	1階常微分方程式の解法	63
4.2.1	前進オイラー法	63
4.2.2	後退オイラー法	64
4.3	数値積分法	66
4.3.1	ルジャンドル・ガウス積分	66
4.3.2	二次元三角形領域の積分	68

## 〈第2部：定式化〉

## 5. 有限要素による離散化と解法

5.1	仮想仕事の原理式を用いた定式化	73
5.1.1	有限要素近似	73
5.1.2	仮想仕事の原理式	74
5.1.3	仮想仕事の原理式の離散化	74
5.2	拘束条件	76
5.2.1	単点拘束条件	76
5.2.2	多点拘束条件	76
5.3	線形問題の解法	81
5.4	非線形問題の解法	83

## 6. 連続体要素

6.1	二次元4節点四角形要素	85
-----	-------------	----

6.1.1	完全積分要素	85
6.1.2	B-bar 要素	89
6.1.3	非適合要素	91
6.1.4	低減積分要素	96
6.2	三次元8節点六面体要素	102
6.2.1	完全積分要素	102
6.2.2	B-bar 要素	106
6.2.3	非適合要素	108
6.2.4	低減積分要素	110

## 7. インターフェース要素

7.1	二次元4節点インターフェース要素	118
7.1.1	結合力の仮想仕事	118
7.1.2	相 対 変 位	120
7.1.3	内力ベクトル	122
7.1.4	接線剛性マトリクス	122
7.1.5	バイリニア型結合力モデル	123
7.1.6	接 触 モ デ ル	126
7.2	三次元8節点インターフェース要素	126
7.2.1	結合力の仮想仕事	126
7.2.2	相 対 変 位	127
7.2.3	内力ベクトル	130
7.2.4	接線剛性マトリクス	131
7.2.5	バイリニア型結合力モデル	131
7.2.6	接 触 モ デ ル	133

## 8. 弾塑性解析手法

8.1 応力積分法	134
8.2 後退オイラー法による解法	135
8.3 整合接線剛性マトリクス	137

### 〈第3部：プログラム実装〉

## 9. C言語による弾性FEMプログラムの実装

9.1 静的陰解法による求解処理	142
9.2 二次元弾性FEM解析プログラム：NLFEAdemoC2D4	144
9.2.1 プログラム構成	146
9.2.2 主要なソースファイルで定義される関数	151
9.2.3 入力データフォーマット	155
9.2.4 例題解析	158
9.3 三次元弾性FEM解析プログラム：NLFEAdemoC3D8	173
9.3.1 プログラム構成	174
9.3.2 主要なソースファイルで定義される関数	180
9.3.3 入力データフォーマット	182
9.3.4 例題解析	186

## 10. C言語による弾塑性FEMプログラム実装

10.1 静的陰解法による弾塑性解析	192
10.2 二次元平面ひずみ弾塑性FEM解析プログラム： NLFEAdemoCPE4EP	194

10.2.1	プログラム構成	196
10.2.2	主要なソースファイルで定義される関数	197
10.2.3	入力データフォーマット	198
10.2.4	例題解析	202
10.3	三次元弾塑性 FEM 解析プログラム：NLFEAdemoC3D8EP	203
10.3.1	プログラム構成	204
10.3.2	主要なソースファイルで定義される関数	206
10.3.3	入力データフォーマット	207
10.3.4	例題解析	211

## 11. C言語による二次元弾性 XFEM プログラム実装

11.1	NLXQ2Ddemo のプログラム構成	214
11.2	NLXQ2Ddemo の主要な関数の概説	224
11.3	NLXQ2Ddemo における要素のパーティション	227
11.4	NLXQ2Ddemo の入力データフォーマット	230
11.5	例題解析	235
11.5.1	片側き裂問題	235
11.5.2	結合力き裂問題	240

## 付 録

A.1	二次元 4 節点四角形アイソパラメトリック要素の変位場	245
A.2	三次元 8 節点六面体アイソパラメトリック要素の変位場	248
A.3	スパースソルバーの利用について	252

## 参 考 文 献

参 考 文 献	255
索 引	259

# 1

## 応力解析の基礎方程式

### 1.1 線形弾性体の基礎方程式

#### 1.1.1 三次元線形弾性体の基礎方程式

図 1.1 に示すような三次元線形弾性体の応力場 (stress field), ひずみ場 (strain field), 変位場 (displacement field) を決定するための基礎方程式は偏微分方程式の境界値問題になり, 式 (1.1)~(1.5) のようにまとめられる。

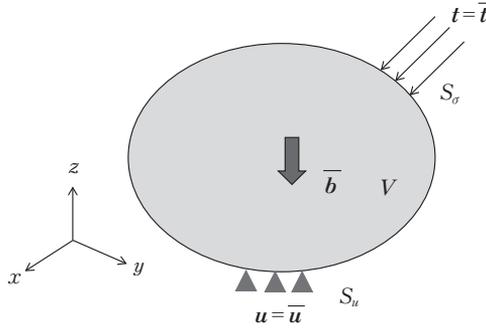


図 1.1 三次元線形弾性体

[1] 応力で表した平衡方程式 (equilibrium equation)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \bar{b}_x = 0 \quad (1.1a)$$

2 1. 応力解析の基礎方程式

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \bar{b}_y = 0 \quad (1.1b)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \bar{b}_z = 0 \quad (1.1c)$$

ここに  $\bar{b}_x, \bar{b}_y, \bar{b}_z$  は物体力ベクトルの  $x, y, z$  成分で、既知量であることを明記するために上線を付している。なお、これらの式の導出において、せん断応力成分の対称性  $\tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}, \tau_{xy} = \tau_{yx}$  を考慮している。

〔2〕ひずみ変位関係式

微小変形理論 (infinitesimal deformation theory) が成立する場合、ひずみ 6 成分は、変位 3 成分を用いて次式で表される。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.2)$$

この式をひずみ変位関係式 (strain-displacement equation) と呼ぶ。

〔3〕応力ひずみ関係式

応力 6 成分とひずみ 6 成分についての関係は応力ひずみ関係式 (stress-strain relations) と呼ばれる。一般化フックの法則 (generalized Hooke's law) が成立する場合には、応力とひずみは比例関係にあると仮定でき、次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [C^E] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad [C^E] \equiv \begin{Bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & \text{sym.} & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{Bmatrix} \quad (1.3)$$

ここに 6 行 6 列のマトリクス  $[C^E]$  は弾性マトリクスと呼ばれ、対称マトリクスであり、独立な成分は 21 個である。

## 〔4〕境界条件

以上示したように、未知量は応力 6 成分、ひずみ 6 成分、変位 3 成分の総計 15 個に対して、基礎方程式はせん断応力成分の対称性を考慮した平衡方程式が 3 個、ひずみ変位関係式が 6 個、応力ひずみ関係式が 6 個の総計 15 個となり、未知数の数と方程式の数が一致しているので、原理的に基礎方程式を解けることになる。

さらに唯一解を求めるためには、上記のような基礎式に加えて、物体表面  $S$  において境界条件を与える必要がある。境界条件は、**幾何学的境界条件** (geometric boundary condition) と **力学的境界条件** (mechanical boundary condition) に分類され、幾何学的境界条件を与える表面を  $S_u$ 、力学的境界条件を  $S_t$  と記す。

$S_u$  における幾何学的境界条件は、次式で与えられる。

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad w = \bar{w} \quad (1.4)$$

$S_t$  における力学的境界条件は、次式で与えられる。

$$t_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = \bar{t}_x \quad (1.5a)$$

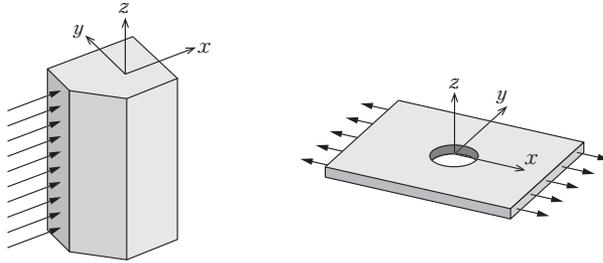
$$t_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z = \bar{t}_y \quad (1.5b)$$

$$t_z = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z = \bar{t}_z \quad (1.5c)$$

## 1.1.2 二次元線形弾性体の基礎方程式

前述したように構造物の応力場、ひずみ場、変位場を決定する基礎方程式は、三次元問題として記述される偏微分方程式の境界値問題となる。しかしながら、ある条件を仮定できる場合には、二次元問題として記述できる。二次元問題においては、三次元問題と比較して、次元が一つだけ減るので、数学的取り扱いが容易になる。

図 1.2 に示すような二次元**平面ひずみ** (plane strain)、**平面応力** (plane stress) 問題についての線形弾性体の応力場、ひずみ場、変位場を決定するための基礎方程式は偏微分方程式の境界値問題になり、次式のようにまとめられる。



(a) 二次元平面ひずみ問題 (b) 二次元平面応力問題

図 1.2 二次元問題

〔1〕 応力で表した平衡方程式

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{b}_x = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \bar{b}_y = 0 \quad (1.6)$$

〔2〕 ひずみ変位関係式

平面ひずみ問題, 平面応力問題について次式を用いる。

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.7)$$

〔3〕 応力ひずみ関係式

式 (1.3) に示した三次元線形弾性体についての応力ひずみ関係式において, 平面ひずみ問題については,  $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$  とする。この条件を式 (1.3) に代入して次式を得る。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$

式 (1.8) を整理して, 次式を得る。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{26} \\ c_{16} & c_{26} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.9a)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{13} & c_{23} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{56} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{13} & c_{23} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{56} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{26} \\ c_{16} & c_{26} & c_{66} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.9b)$$

平面応力問題については、 $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$  とする。この条件を式 (1.3) に代入して次式を得る。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$

式 (1.10) を整理して、次式を得る。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{26} \\ c_{16} & c_{26} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{36} & c_{46} & c_{56} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (1.11a)$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{13} & c_{23} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{56} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{34} & c_{44} & c_{45} \\ c_{35} & c_{45} & c_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (1.11b)$$

式 (1.11) より次式を得る。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{26} \\ c_{16} & c_{26} & c_{66} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{36} & c_{46} & c_{56} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{34} & c_{44} & c_{45} \\ c_{35} & c_{45} & c_{55} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c_{13} & c_{23} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{56} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.12a)$$

# 索引

**【あ】**  
 アイソパラメトリック要素 44

圧縮列格納 253  
 アワーグラスモード 98  
 安定化剛性マトリクス 101  
 安定化内力ベクトル 101

**【い, え】**  
 一般化フックの法則 2  
 陰解法 64  
 インターフェース要素 118  
 エネルギー解放率 23

**【お】**  
 オイラー法 63  
 応力拡大係数 23  
 応力拡大係数範囲 23  
 応力積分 134  
 応力速度 134  
 応力場 1  
 応力ひずみ関係式 2  
 重み係数 67

**【か】**  
 ガウスの発散定理 30  
 拡充関数 47  
 拡張有限要素法 47  
 重ね合わせの原理 36  
 仮想仕事の原理式 7  
 仮想ひずみ 7  
 仮想変位 7  
 完全積分要素 89

**【き, く】**  
 幾何学的境界条件 3  
 基底関数 47

き裂 23  
 き裂先端要素 57  
 クロネッカーのデルタ 48

**【け】**  
 形状関数 44  
 結合流れ則 13  
 結合力モデル 39

**【こ】**  
 後退オイラー法 64  
 剛体変形 45  
 降伏関数 13  
 降伏条件 13  
 コーシーの公式 30  
 混合モード 35

**【さ, し, す】**  
 最終応力 136  
 残差力ベクトル 84  
 試行応力 136  
 自然座標 44  
 シフティング 49  
 周期対称 78  
 スカイライン法 152  
 スパースマトリクスソルバー 253

**【せ】**  
 整合接線剛性マトリクス 138  
 脆性破壊 23  
 静的陰解法 143  
 静的縮約 94  
 積分点 67  
 接線剛性マトリクス 84  
 切断要素 57  
 漸近解 53  
 線形破壊力学 23

前進オイラー法 64  
 選択的低減積分 89  
 せん断弾性係数 18  
 せん断ロックキング 91

**【そ】**  
 相当応力 13  
 相当塑性ひずみ 13  
 増分解法 142  
 総和規約 124  
 塑性係数 14  
 塑性変形 13  
 損傷変数 42

**【た行】**  
 体積ひずみ 89  
 体積ロックキング 89  
 多点拘束条件 48, 76  
 単点拘束条件 76  
 直交異方性線形弾性体 10  
 低減積分 96  
 テイラー展開 61  
 テンソル表記 25  
 等方性線形弾性体 8

**【な行】**  
 ニュートン・ラフソン法 62  
 熱ひずみ 32  
 熱膨張係数 33

**【は】**  
 パーティション 57  
 破壊靱性値 23  
 破壊力学 23  
 パッチテスト 45

**【ひ】**  
 微小変形理論 2

ひずみエネルギー密度	28
ひずみ速度	134
ひずみ場	1
ひずみ変位関係式	2
非線形弾性体	28
非適合モード	91
非適合要素	91
疲労き裂進展則	24

## 【ふ, へ, ほ】

符号付き距離関数	49
ブレンディグ要素	60
平均応力	15
平衡方程式	1
平面応力	3

平面ひずみ	3
べき乗則	41
ペナルティ剛性	40
ヘビサイド関数	53
変位場	1
変位法有限要素法	73
偏差応力	15
ポアソン比	8

## 【ま行】

マルチコア	253
ミーゼスの降伏条件	16
面積座標	68
モード分離	36

## 【や行】

ヤング率	8
有限要素法	28
陽解法	64

## 【ら行】

ランク	99
力学的境界条件	3
領域積分	32
ルジャンドル・ガウス積分	57
レベルセット法	49
連鎖律	87

## 【A】

area coordinate	68
associated flow rule	13
asymptotic solution	53

## 【B】

backward Euler method	64
basis function	47
B-bar 法, B-bar method	89
blending element	60
brittle fracture	23

## 【C】

Cauchy's formula	30
chain rule	87
cohesive zone model	39
consistent tangent stiffness matrix	138
crack	23
cut element	57
cyclic symmetry	78

## 【D】

damage variable	42
deviatoric stress	15

displacement field	1
displacement method FEM	73

domain integration	32
--------------------	----

## 【E】

energy release rate	23
enrichment function	47
equilibrium equation	1
equivalent plastic strain	13
equivalent stress	13
Euler method	63
explicit method	64
eXtended Finite Element Method	47

## 【F】

fatigue crack growth law	24
FEM	28
final stress	136
finite element method	28
forward Euler method	64
fracture mechanics	23
fracture toughness	23
full integration element	89

## 【G】

Gauss's divergence theorem	30
generalized Hooke's law	2
geometric boundary condition	3
Geometrical Enrichment 法	58

## 【H】

Heaviside function	53
hourglass mode	98
HRR 解, Hutchinson, Rice, Rosengren 解	59

## 【I】

implicit method	64
implicit static analysis	143
incompatible element	91
incompatible mode	91
incremental analysis	142
infinitesimal deformation theory	2
integration point	67
interface element	118



— 著者略歴 —

1985年 東京大学工学部航空学科卒業  
1987年 東京大学大学院工学系研究科航空学専門課程修士課程修了  
1987～ 株式会社日立製作所機械研究所勤務  
1990年  
1990～ 株式会社三菱総合研究所勤務  
2001年  
1999年 博士（工学）（東京大学）  
2001年 上智大学講師  
2002年 上智大学助教授  
2007年 上智大学教授  
現在に至る

計算破壊力学のための応用有限要素法プログラム実装

Program Implementation of Finite Element Method Application to Computational Fracture Mechanics

© Toshio Nagashima 2021

2021年3月25日 初版第1刷発行



検印省略

著者	ながしまとしお	長嶋利夫
発行者	株式会社	コロナ社
	代表者	牛来真也
印刷所	新日本印刷株式会社	
製本所	有限会社	愛千製本所

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10  
発行所 株式会社 コロナ社  
CORONA PUBLISHING CO., LTD.  
Tokyo Japan

振替 00140-8-14844 ・ 電話 (03)3941-3131 (代)  
ホームページ <https://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-04669-4 C3053 Printed in Japan

(森岡)



JCOPY <出版者著作権管理機構 委託出版物>

本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつど事前に、出版者著作権管理機構（電話 03-5244-5088, FAX 03-5244-5089, e-mail: info@jcopy.or.jp）の許諾を得てください。

本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めていません。落丁・乱丁はお取替えいたします。

