衝　撃　力　学

工 学 博 士　宇治橋貞幸
博士(工学)　宮崎　祐介　共著

コ ロ ナ 社

ま え が き

本書の題名にある「衝撃」を初めて知ったのは，著者が東京工業大学機械工学科の最終学年となり，中原一郎先生の研究室に卒業研究学生として配属されたとき（1968 年）のことである。著者の卒業研究課題は，「衝撃内圧を受ける異方性円筒」の応力解析を動弾性理論によって解析する，といった難問であった。当時研究室の助手であった松本浩之先生のいわれるままに数学の計算に取り組むことになったが，勉強を怠けていた著者にとっては大変な作業であった。それまで知らなかった特殊関数が出てくる長い式が多く，どのような結果を表現しているのか予測などまったくできない理論式であったが，数値計算をしてみると，不思議なことにそれらしい結果が出てきて感激したものである。

それから学園紛争の真っただ中の思いもよらない大学院への進学と，さらに思いもよらない研究室助手へと，想定外の身の丈に余る人生を歩むことになった。この間，研究内容はつねに「衝撃」であり，扱った理論は，波動方程式，あるいはベルヌーイ，オイラー，ラグランジュ，ティモシェンコなどといった，ほとんど歴史上の著名な学者の名前が出てくる世界であった。理論だけでなく，なにかと難しい衝撃の実験，さらにはブラウン管式シンクロスコープやフィルム式高速度カメラを使った計測にも取り組んだ。その後コンピュータの発達によって衝撃解析の主流となってきたのは計算力学によるシミュレーションの世界であるが，そのころには，すでに自分自身では解析をやらない年齢となっていた。振り返ってみれば，「なんと古きよき時代であったことか…」と思うこともある。

この間，47 歳になったころ，思いがけず明治大学大学院機械工学専攻の学生を相手に「衝撃」を教える機会を得た（1994 年）。これが著者が取り組んできた「衝撃の世界」を若い人達に伝えるきっかけとなり，さらにこの授業は，18 年の

長きにわたってつづくことになった。これとほぼ同じ時期に東京工業大学でも機械系学部学生に「衝撃」を講義として教えるようになり，徐々にではあるが講義ノートも蓄積していった。この講義ノートを基に教科書出版をすすめて下さる方もいたが，東京工業大学在職中には遂に実現させることができなかった。

しかし，定年退職後次第に余裕ができるに従って「このままでは終われない」という気持ちが強くなり，コロナ社からの励ましもあって一念発起して講義ノートの出版に向けて精力を傾けることになった。

本書は，過去の名立たる名著，とりわけティモシェンコの著作には足元にも及ばないが，意外にも日本語の「衝撃」入門となる適当な書がなく，なんとしても世に出さねばという気持ちが掻き立てられてきた。

このような経緯からわかるように，本書は大学で初めて「衝撃」を勉強する機械系学生，あるいは物作りに携わる技術者のための入門書となるよう，意識して書いてきたものである。

本編は「基礎編」と「実践編」とに分かれているが，衝撃に対する基礎的な理解は，文字どおり「基礎編」だけで十分に得られるようになっている。「基礎編」には多くの数学式が出てくるが，大学の低学年で勉強する程度の数学であるから「食わず嫌い」にならないよう願っている。衝撃は基本的に過渡応答問題であるため，全体を通して「ラプラス変換」が主流となっているので，この際ラプラス変換と仲よくなってほしい。ラプラス変換は，その逆変換が一般的に面倒なので，本書では数学的厳密さには目をつぶり，非常に限定された条件下（例えば，保存系）でのラプラス逆変換しか扱っていない。したがって，是非とも毛嫌いせずに取り組んでほしい。

また随所に「考察」を設けているが，これは当該箇所の理解を深めてもらうためのもので，是非とも飛ばさないで取り組んでほしい。あえてヒントだけで解答は載せていないが，考えることによって理解が深まるよう配慮しており，実際の講義の場面においても非常に重要と感じた内容でもある。扱っている部材としては棒と梁の衝撃応答問題が大半を占めるが，個々についてさらに高度な勉強をしたい読者には，ティモシェンコの一連の著作を参照されることをおす

すめしたい。

「実践編」を読んでいただければわかるように，衝撃応答問題では，構造物に作用する荷重をいかにして正確に見積もるかが最大の課題である。これを正しく見積ることができれば，つぎのステップである応力解析は，理論をはじめさまざまな手法により求めることができる。実際の衝撃問題における見込み違いは，その衝撃荷重の大きさと持続時間の見積りを誤ったことに起因することがきわめて多い。衝撃荷重の見積りは経験豊富な技術者でないと難しいものであるが，まずは衝撃の基本を正しく身に付けておくことが重要である。本書がその入門書となることを願っている。

末筆ではあるが，本書の理論解の精度検証に関して有限要素法による解析をしていただいた伊藤忠テクノソリューションズ株式会社，ならびに根気強く担当していただいた同社の津田徹氏および東出紀子氏に深く感謝いたします。

また，東京工業大学大学院学生の田中耕輔君には，理論結果だけで数値結果が不足していた多くの問題について数値計算を行っていただき，たいへん感謝している。

筆者が東京工業大学助手のころの大学院学生であった名古屋工業大学西田政弘教授からは，精密な実験結果の提供をいただき，これにより理論結果の信憑性を高めることができた。ここに深く感謝を申し上げる次第である。

2020 年 1 月

著者代表　宇治橋貞幸

目　　　次

第 I 部　基　礎　編

1.　弾性基礎方程式

2.　板理論および梁理論

3. 棒の縦衝撃

4. 梁の曲げ衝撃

5. 板の曲げ衝撃

第II部 実 践 編

6. 弾性限度を超えた衝撃問題

7. 理論解析の適用性

8.　ばね・質点モデルによる衝撃応答解析

付録 A　ヘルツの接触理論

付録 B　動的有限要素法の基礎理論

付録 C　数　学　公　式

第I部　基　礎　編

1

弾性基礎方程式

衝撃を受ける構造体の応答は，振動現象ととらえる考え方もあれば，波動伝播現象ととらえる考え方もある。本書では，衝撃は波動伝播現象が本質であり，その結果として振動現象があるとの立場に立っている。したがって，構造体の衝撃問題を，波動伝播現象として理解した上で，振動現象としての見方も理解できるようにすることを目的としている。

そこで本章では，解析のための理論として最初に波動方程式を示し，つぎに梁（はり）や板などの構造解析のための理論を示すことにする。すなわち，すべての出発点となる弾性基礎方程式を紹介し，2 章の梁および板の理論への展開を理解できるようにし，3 章以降の具体的衝撃問題の理論解析へと誘導する。その意味においては，1 章と 2 章を後回しにして 3 章から取り組むことも可能である。

1.1　三次元基礎方程式

ここに示す理論は，本書に出てくるすべての理論の原点となるものであり，微小な弾性変形を前提としている。

1.1.1　平衡方程式

図 1.1 のような大きさ dx, dy, dz の立方体微小要素とこれに働く応力成分を考え，並進と回転の釣合いを考えると，つぎのようになる。

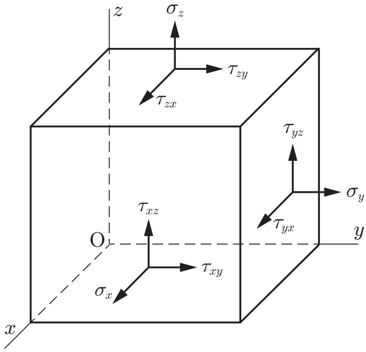

図 1.1　微小要素の力の釣合い（直角座標，三次元）

平衡方程式（並進の釣合い）：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0
\end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

平衡方程式（回転の釣合い）：

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz} \tag{1.2}$$

ここで，$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ は**垂直応力成分**，$(\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$ などは**せん断応力成分**であり，X, Y, Z は物体力を表すが，これは衝撃問題では慣性力となり，つぎのようになる。

$$X = -\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad Y = -\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \qquad Z = -\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.3}$$

式 (1.2) では, 回転の慣性力は高次の微小量となり無視している。また, (x, y, z) は座標，(u, v, w) は各座標方向変位，ρ は密度，t は時間である。

【考　察】
式 (1.1) および式 (1.2) を導出してみよう。
同時に回転による慣性力が高次の微小量となることを確認してみよう。

1.1.2 構　　成　　式

つぎに弾性の構成式，すなわち応力成分とひずみ成分の関係式を求めれば，つぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\}, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}\\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\{\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}\\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\{\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\}, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx}\end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

ここで，E は**縦弾性係数**，G は**せん断弾性係数**，ν は**ポアソン比**である。

これを，応力について解けば，つぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_y + \varepsilon_z)\right\}\\ \sigma_y &= \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_z + \varepsilon_x)\right\}\\ \sigma_z &= \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right\}\\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

ここで，$(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ は**垂直ひずみ成分**，$(\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$ は**せん断ひずみ成分**である。

式 (1.5) を $2(1+v)G = E$ の関係を用いて，つぎのように書くこともできる。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= 2\mu\varepsilon_x + \lambda\, e, \quad \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}\\ \sigma_y &= 2\mu\varepsilon_y + \lambda\, e, \quad \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}\\ \sigma_z &= 2\mu\varepsilon_z + \lambda\, e, \quad \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx}\end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

ここで，$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$，$\mu$ および λ は**ラーメの定数**と呼ばれ，つぎのように定義される。

$$\mu = G, \qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

【考　察】

①　ポアソン比 ν を 0 とすると波動の伝播速度はどのようになるか考えてみよう。またポアソン比が 0 の材料はどのようなものか，逆にポアソン比の上限はいくらか考えてみよう。

〈ヒント〉

ポアソン比の上限は，材料を均等に圧縮したとき体積が増えないという条件から求められる。

②　関係式 $2(1+\nu)G = E$ はどのようにして求められるか考えてみよう。

〈ヒント〉

文献 1) を参照

1.1.3　連続条件式

変位成分とひずみ成分の関係，すなわち連続条件式はつぎのようになる。

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{array}\right\} \tag{1.7}$$

ここで

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \qquad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \qquad \gamma_{zx} = \gamma_{xz}$$

である。

1.1.4　変位の方程式

式 (1.1) は，式 (1.6) さらに式 (1.7) を代入することにより，変位成分 (u, v, w) に関するつぎの三元連立微分方程式となる。

$$
\left.
\begin{aligned}
&(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right)+\mu\nabla^2 u=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\
&(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\right)+\mu\nabla^2 v=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\\
&(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\mu\nabla^2 w=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned}
\right\}
\tag{1.8}
$$

ここで

$$
\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}
$$

これは，変形してつぎのように表記する場合がある。

$$
\left.
\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)\frac{\partial e}{\partial x}-\mu\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial y}-\frac{\partial\omega_y}{\partial z}\right)=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\
&(\lambda+2\mu)\frac{\partial e}{\partial y}-\mu\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial z}-\frac{\partial\omega_z}{\partial x}\right)=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\\
&(\lambda+2\mu)\frac{\partial e}{\partial z}-\mu\left(\frac{\partial\omega_y}{\partial x}-\frac{\partial\omega_x}{\partial y}\right)=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned}
\right\}
\tag{1.9}
$$

ここで，$(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ は (x, y, z) 軸回りの回転角成分であり，つぎのように定義される。

$$
\omega_x=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z},\qquad \omega_y=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x},\qquad \omega_z=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}
$$

式 (1.8) をベクトル表示すれば，つぎのようになる。

$$
(\lambda+\mu)\nabla\Delta+\mu\nabla^2\boldsymbol{u}=\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}
\tag{1.10}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}+w\boldsymbol{k},\qquad \nabla\equiv\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k},\\
&\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\\
&\Delta=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}
$$

であり，$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ は (x, y, z) 軸方向単位ベクトルを表す。

索　　引

—— 著 者 略 歴 ——

宇治橋　貞幸（うじはし　さだゆき）
1969年　東京工業大学理工学部機械工学科卒業
1971年　東京工業大学大学院修士課程修了（機械工学専攻）
1973年　東京工業大学大学院博士課程中退
1973年　東京工業大学助手
1982年　工学博士（東京工業大学）
1985年　東京工業大学助教授
1989年　英国ストラスクライド大学客員教授兼任（1990 年まで）
1993年　東京工業大学教授
2000年　豪州ロイヤルメルボルン工科大学リサーチフェロー兼任（2001 年まで）
2011年　国土交通省自動車アセスメント評価検討会座長兼任
2012年　東京工業大学名誉教授
2012年　日本文理大学特任教授
2012年　株式会社トップシーエーイー取締役兼任
2017年　株式会社 BETA CAE Systems Japan 顧問兼任
現在に至る

宮崎　祐介（みやざき　ゆうすけ）
2001年　東京工業大学工学部機械科学科卒業
2003年　東京工業大学大学院修士課程修了（情報環境学専攻（機械系））
2006年　東京工業大学大学院博士後期課程修了（情報環境学専攻（機械系））
博士（工学）
2006年　金沢大学助手
2007年　金沢大学助教
2012年　東京工業大学准教授
現在に至る

衝 撃 力 学
Impact Mechanics

2020 年 3 月10日　初版第 1 刷発行

検印省略

著　者　宇 治 橋　貞　幸
　　　　宮　崎　祐　介
発 行 者　株式会社　コ ロ ナ 社
　　　　代 表 者　牛 来 真 也
印 刷 所　三 美 印 刷 株 式 会 社
製 本 所　有限会社　愛 千 製 本 所

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発 行 所　株式会社　**コ　ロ　ナ　社**
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ　https://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–04665–6　C3053　Printed in Japan　（金）