

数値流体解析の基礎

—Visual C++とgnuplotによる
圧縮性・非圧縮性流体解析—

博士(理学) 肖 鋒 共著
工学博士 長崎 孝夫

コロナ社

ま え が き

数値流体力学 (computational fluid dynamics, CFD) とは、流れ現象をコンピュータシミュレーションによって模擬することであり、現在、流れ現象の研究道具として広く使われている。工学分野においては、CAE (computer aided engineering) の要素技術として、流体絡みの製品開発・設計に欠かせないシミュレーションツールである。今日、商用ソフトや無料で利用できるフリーソフトを簡単に入手できるようになったため、誰でも CFD を利用できる便利な時代になっている。その一方で、CFD 数値モデルの仕組み、とりわけその基礎となる数値解法を理解せず、単なるユーザとして CFD ソフトを利用する場合も多く見られ、関連分野のさらなる発展および応用に支障が生じる現状の問題もよく指摘される。CFD の基礎数値解法に関する専門知識は、シミュレーション結果を正しく理解するために非常に重要であるだけでなく、既存解法の問題点の改良や新たな解法の開発にも欠かせないものである。

CFD の研究分野において、これまで大量の数値解法が開発されている。それらを網羅する英文の専門書はあるが、一般読者にとっては難解なものとなっている。本書は、数値流体力学の入門的教科書・参考書として、圧縮性および非圧縮性流れの代表的な基礎解法を中心にわかりやすく解説する。内容構成において学習しやすさを重視しながら、関連知識の体系化にも工夫している。流体運動の支配方程式 (2 章)、離散法の基礎知識 (3 章) を紹介した後、流動現象を表す最も基礎的な移流方程式およびバーガース方程式の数値解法を 4 章で解説する。特に、圧縮性流体に伴う衝撃波など、不連続解を解く場合の数値解法の問題点、および解決策を重点的に取り上げる。5 章では、4 章で述べた基礎解法をオイラー方程式に拡張し、衝撃波を含む圧縮性流れの数値解法について解説する。非圧縮性粘性流れの数値解法は 6 章で解説する。現在広く使われてい

る数値解法を説明するとともに、管内流れ、物体まわりの流れ、熱対流などの実例を取り上げる。さらに、圧縮性・非圧縮性流れを統一的に取り扱える数値計算手法も紹介する。

学部3, 4年生や大学院生など、理工系大学や専門学校の標準レベルの数学および流体力学の基礎を習得した読者であれば、本書の内容を問題なく理解できる。教科書として利用する場合、1学期分の授業計画が立てやすい分量となっている。数値解法を理解するために、各手法の基本的な考え方、またそれぞれの相違点などを説明するとともに、C言語のサンプルプログラムを示し、最終的には読者自らCFDコード開発の実践まで展開できるような内容構成となっている。付属プログラムを活用し演習を行えば、内容の理解を深めることで、場合によっては実際に取り組んでいる具体的研究課題にでもすぐに役立てられるかもしれない。また、独学によくある内容の難解さによる挫折感も、極力避けることができるだろう。

本書は、著者らが東京工業大学の大学院で講義した内容の一部で構成されている。本書の完成に際し、著者らの研究室所属の学生諸君からたいへん有益なフィードバックをいただいております、また多くの関係者にお世話になった。ここで謝意を表したい。

2019年11月

肖 鋒, 長崎孝夫

目 次

1. はじめに

1.1 数値流体力学とは	1
1.2 本書のねらい	6

2. 流れの基礎方程式

2.1 基礎方程式の導出	9
2.1.1 連続の式	9
2.1.2 運動方程式	10
2.1.3 エネルギー方程式	11
2.2 保存型の基礎方程式	11
2.3 状態方程式と構成方程式	14
2.4 流体力学の代表的な方程式	15
2.4.1 ナビエ・ストークス方程式	15
2.4.2 オイラー方程式	17
2.4.3 バーガス方程式および移流方程式	18
2.4.4 非圧縮性ナビエ・ストークス方程式	19
2.4.5 ブシネスク近似と熱対流の方程式	20

3. 数値解法の基礎

3.1 空間離散法	22
3.1.1 有限差分法の空間再構築法	23
3.1.2 有限体積法の空間再構築法	26
3.2 多次元の空間離散化	29
3.3 時間積分法	31
3.3.1 オイラー前進法	32
3.3.2 オイラー後退法	32
3.3.3 2段前進法	32
3.3.4 2次ルンゲ・クッタ法	33
3.3.5 3次TVDルンゲ・クッタ法	33
3.3.6 4次ルンゲ・クッタ法	34
3.3.7 フラクショナルステップ時間積分法	34
3.4 離散方程式の性質	35
3.4.1 整合性	36
3.4.2 安定性	36
3.4.3 収束性	38
3.4.4 散逸誤差と分散誤差	39

4. スカラ保存則の数値解法

4.1 代表的な保存則と特徴	43
4.2 弱解の概念	47
4.3 保存スキームと非保存スキーム	51
4.4 有限体積法のフレームワーク	53

4.5	高次空間再構築	66
4.5.1	空間再構築の精度	66
4.5.2	高次空間再構築	68
4.6	時間積分法	72
4.7	代表的な2次精度解法	73
4.7.1	Lax-Wendroff法	73
4.7.2	Beam-Warming法	75
4.7.3	Fromm法	77
4.8	TVD法	80
4.8.1	TVDの概念	81
4.8.2	TVD法の構築	84
4.9	数値流束の計算	96
4.9.1	Godunovリーマンソルバ	96
4.9.2	HLLリーマンソルバ	97
4.9.3	Lax-Friedrichsリーマンソルバ	98
4.9.4	Local Lax-Friedrichsリーマンソルバ/Rusanovリーマンソルバ	99
4.9.5	Hartenリーマンソルバ	100
4.9.6	リーマンソルバの流束分離の記述法	102
4.10	多次元への拡張	104

5. 非粘性圧縮性流体の数値解法

5.1	オイラー方程式に関する基礎理論	107
5.1.1	オイラー方程式の特性理論	109
5.1.2	オイラー方程式の不連続解	114
5.1.3	オイラー方程式のリーマン問題と厳密解	118
5.1.4	2次元における特性理論	122

5.2	オイラー方程式の数値解法	126
5.2.1	流束ベクトル分離法	127
5.2.2	流束差分分離法	131
5.2.3	オイラー方程式の1次精度解法	134
5.2.4	オイラー方程式の2次精度解法	148
5.2.5	2次元数値解法	158

6. 非圧縮粘性流れの数値解法

6.1	非圧縮粘性流れの特徴と基礎式	165
6.2	陽的時間前進に基づく解法 (MAC 法系統)	167
6.2.1	MAC 法系統の各種方法	167
6.2.2	スタガードメッシュ	169
6.2.3	移流項と粘性項の離散化	170
6.2.4	正方形キャビティ流れの計算	174
6.3	陰的時間前進に基づく解法 (SIMPLE 法)	186
6.3.1	輸送方程式の陰的解法における離散化	186
6.3.2	SIMPLE 法の計算手順	190
6.3.3	不足緩和	192
6.3.4	SIMPLE 法による正方形キャビティ流れの計算	193
6.4	コロケート格子を用いた解法	199
6.4.1	コロケート格子	199
6.4.2	コロケート格子における圧力場の安定化	200
6.4.3	コロケート格子を用いた SIMPLE 法によるキャビティ流れの 計算	203
6.4.4	コロケート格子を用いたフラクショナルステップ法	204
6.5	流入・流出のある流れ	207

6.5.1	流入・流出境界の取扱い	207
6.5.2	急拡大流れ	209
6.5.3	角柱まわりの流れ	210
6.6	自然対流問題	216
6.6.1	自然対流問題の基礎式	216
6.6.2	正方形キャビティ内自然対流	218
6.6.3	鉛直流路内の角柱の自然対流	222
6.7	密度ベースの解法と圧力ベースの解法	225
6.7.1	疑似圧縮性による密度ベースの解法	225
6.7.2	圧力ベースの解法	227
 付 録		 231
A.1	流線の描き方	231
A.2	付属プログラムリスト	232
A.3	プログラムの実行	233
A.3.1	Microsoft Visual Studio のインストール	233
A.3.2	可視化ツール gnuplot のインストール	233
A.3.3	プログラムの実行	234
引用・参考文献		237
索 引		243

はじめに

数値流体力学あるいは計算流体力学 (computational fluid dynamics, CFD) は学問分野としての歴史は比較的浅く、最初の研究が 20 世紀初頭に始まって以来、百年もたっていないが、1950 年代以後コンピュータハードウェアの急速な発達に後押しされ、すさまじい勢いで発展してきた。CFD の応用範囲は、当初、気象、航空工学などの先端技術分野に限られていたが、現在、流体現象に関わるほぼすべての理工学分野に拡大している。本章では、CFD を概観するとともに、本書で取り扱う内容の概要を説明する。

1.1 数値流体力学とは

一言でいえば、CFD は流体運動を記述する数学モデルである支配方程式の数値解を求めることである。流体運動の物理的特性は、**支配方程式**と呼ばれる基本的な方程式（通常は偏微分方程式）によって記述することができる。例として、**ボルツマン方程式** (Boltzmann equation) やナビエ・ストークス方程式などが挙げられる。流体運動の支配方程式を数値的に解くために、それらの微分方程式を離散化し、近似的に代数方程式の形に書き換える必要がある。さらに、コンピュータプログラミング言語によってこれらの代数方程式をコンピュータプログラムまたはソフトウェアパッケージに変換し、計算機ハードウェアにおいて計算を実行する。

熱流体力学の研究において、従来、実験的方法と理論解析があったが、CFD は急速な発展を成し遂げ、現在、第 3 のアプローチとして確立されている。☒

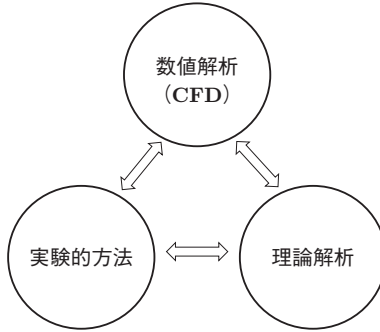


図 1.1 熱流体力学研究における三つのアプローチ

1.1 に示すように、実験的方法、理論解析と並んで、CFD は科学研究だけではなく、工学応用においても欠かせない手段となっている。他の手法に比べ、CFD はつぎの長所をもっている。

- 流体運動の支配方程式は、強い非線形性があり、限られた簡略モデルを除き、解析解を求めることができない。一方 CFD を用いれば、適切な初期条件・境界条件の下で支配方程式の数値解を求めることができる。また、数値実験の活用により、流体運動の仕組みを調べることが可能となり、理論研究を大きく前進させることも期待できる。
- 研究対象によっては、実験は膨大な費用がかかる。また、宇宙・地球流体、生物流体、原子炉内部の熱流動など、実験が困難あるいは危険を伴う場合に、数値シミュレーションが威力を発揮できる。
- 実験では、断片的で限られた物理量の計測しかできないが、CFD は計算領域全体においてすべての変数を再現できる。さらに、可視化などの後処理ツールによって流れ現象に関する包括的な情報を提供できる。
- 物理モデル、数値解法、計算条件によって、CFD の計算結果に誤差や不確かさが存在するが、実験に比べ、誤差のコントロールをしやすく、結果の再現性が優れている。
- コンピュータの性能向上とハードウェアのコスト削減により、数値シミュレーションの実施環境を整えやすくなっている。CFD は費用対効

果 (cost-performance) に優れた CAE (computer-aided engineering) ツールとして、実験ベースのアプローチに比べ、生産性が大幅に向上し、製品の設計期間およびコストを大幅に削減することができる。

図 1.2 に示すように、CFD 解析は概ね、前処理、CFD ソルバ、後処理の三つの部分から構成される。そのうち CFD ソルバは、支配方程式を離散化する方法、いわゆる数値解法によって構築され、これまでにさまざまな数値解法が開発されてきた。流体運動を記述する物理モデルないし支配方程式によって、数値解法の種類は以下に大別することができる。(1) 粒子に基づく手法^{5),6)†}, (2) 速度分布関数に基づく手法^{1),7)}, (3) 連続体モデルに基づく手法。特に、ナビエ・ストークス方程式に代表される連続体モデルに基づく手法は、数値流体力学分野において最も広く使われる主流の手法である。本書では、ナビエ・ストークス方程式に基づく CFD を中心に論じ、(1) と (2) の手法はそれぞれの専門書に譲る。

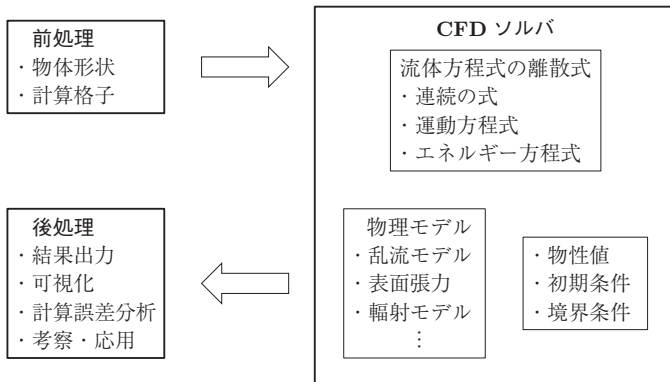


図 1.2 数値流体解析の流れ

連続体力学モデルに基づく手法は、CFD の主流として理論および数値解法開発の両面において数多くの研究成果が上げられている。以下、その代表的な研究を取り上げる。

† 肩付き数字は、巻末の引用・参考文献の番号を表す。

4 1. はじめに

計算流体力学の歴史は 1910 年代までさかのぼることができ、差分法を用いて微分方程式を数値的に解く Richardson の研究は、CFD 最初の試みと思われる⁴²⁾。その後、Courant, Friedrichs と Lewy (1928)¹⁵⁾, von Neumann (1940 年代)³⁹⁾, Lax と Richtmyer (1956)³³⁾などにより、数値解法の整合性、安定性、収束性といった CFD の基礎理論に関する研究が行われ、この分野の礎となった。また、数値解法の開発は、歴史上、圧縮性流れと非圧縮性流れを対象としてそれぞれ異なる枠組で行われてきた。

圧縮性流体では衝撃波などの不連続解が含まれるので、その数値解法の構築は難しく、これまでに数多くの研究者が努力を注いできた。Lax (1954)³²⁾が保存則の弱解の概念に基づき、不連続解を捕獲する解法を提案した。Godunov (1959)²¹⁾が格子セル間の境界においてリーマン問題の解を求めることで、双曲型偏微分方程式を解く解法を提案した。この解法は厳密にリーマン問題を計算するが、区分的に一定な (piecewise constant) 空間補間を用いるため、1 次精度の解法である。この解法は当初有限差分法と称されたが、後に圧縮性流体数値計算において最も広く使われている高解像度有限体積法の原型となっている。Godunov 法を大きく発展させたのは van Leer (1970 年代)^{52)~54)}の研究である。区分的に一定の補間関数を使う代わりに、区分的に線形補間 (piecewise linear) を用いることでより高精度な解法を提案した。また、厳密リーマンソルバの代わりに、Steger と Warming (1981)⁴⁸⁾, Roe (1981)⁴³⁾らが近似リーマンソルバを提案した。高次精度 (2 次以上) 解法に伴う数値振動を抑えるため、Harten (1983) が TVD 性、Osher と Chakravarty (1983) が単調性など、本来微分方程式がもつ特性を保持できる高解像度解法を提案した。その後の研究では、非線形リミタを用いた高解像度数値解法の研究が盛んに行われ、より高精度な解法が提案されてきた^{26), 31), 37)}。

非圧縮性流体では速度の発散 (divergence) が 0 になる条件から、連続の式は時間発展の方程式ではなくなり、流れ場の拘束条件となる。密度の変化はないので、状態方程式のような熱力学変数間の関係式は成り立たなくなる。非圧縮近似は流体の音速が無限大に相当し、流れ場の変化は瞬間的に全空間に伝わ

り、支配方程式は楕円型の特徴が顕著になる。このため領域全体において計算結果を調整する必要がある。このような非圧縮性流れの解法として Harlow と Welch (1965) は MAC (marker and cell) 法を提案し²³⁾、さらに Amsden と Harlow (1970) からは SMAC 法が提案されている⁹⁾。類似の手法として射影法 (projection method)¹³⁾が Chorin (1968) より提案された。これらの手法では、速度の発散場が 0 である制約条件から、圧力のポアソン (Poisson) 方程式を導き、それを反復法で解いて圧力の解を求める。この圧力を用いて速度場を修正し、圧力と速度の計算は交互に行う。Patankar (1980) が圧力と速度をより強い連成で求める SIMPLE 法 (semi-implicit method for pressure-linked equations)⁸⁾を提案した。さらに、時間発展問題において計算精度および安定性に優れた PISO 法³⁰⁾も開発された。

現在、これらの手法は商用 CFD ソフトウェアを含む実問題の数値解析ツールに広く使われているが、さまざまな応用問題に対して、より高性能な数値解法が求められる。このような要請から、CFD の数値解法に関する研究開発は、いまま盛んに行われている。例えば、乱流や流体音響などの解析に数値散逸、数値分散誤差の少ない高精度の解法が望まれる。一方、圧縮性流れ、多相流や反応性流れのような強い不連続解を伴う複雑流れを計算する場合、数値振動の少ない堅牢な数値解法が必要である。これらすべての性質を併せもつ数値解法は、まだ存在せず、さらなる努力が必要である。

さらに、CFD の応用範囲が急速に拡大しており、流体支配方程式の数値解法以外に、応用問題に応じてさまざまな物理過程や化学過程のモデル化も行う必要がある。例として、乱流、相変化、化学反応、表面張力、電磁力、弾塑性性効果、生体効果などが挙げられる。これらの過程による効果をいかに CFD 解析モデルに組み込むかも、非常に重要な研究テーマである。

索 引

【あ】	
圧縮性流れ	4
圧 力	10
圧力ベースソルバ 後処理	225 2
アンダーシュート	78
安定性	4
【い】	
移流形	108
移流項	12
移流速度	18
陰解法	32
【う】	
運動方程式	10
【え】	
エントロピー	11
エントロピー解	49
エントロピー修正	101
エントロピー条件	49, 50
【お】	
オイラー後退法	32
オイラー前進法	32
オイラー方程式	17
オイラー表現	12
オーバーシュート	78
音 速	19
音速点	100
【か】	
解 像	41

過緩和	177
拡散誤差	40
拡散数	172
風上法	56
緩和係数	177
【き】	
境界条件	2
局所時間微分	12
【く】	
空間再構築	22
空気力学	17
クヌーセン数	8
グラスホッフ数	218
グリーン・ガウスの定理	13
【け】	
計算誤差	36
計算流体力学	1
検査体積	11, 22
【こ】	
格 子	21
格子セル	22
格子点	21
構成方程式	14
構造格子	21, 31
後退差分	25
勾配リミタ	85, 91
極超音速	18
固有行列	111
固有値	109
固有ベクトル	109
コロケート格子	200

【さ】	
差分近似式	23
散逸誤差	40
参照系	12
三点中心差分	25
【し】	
時間積分	32
時間全微分	12
実質微分	9
支配方程式	1, 8
射影法	5
弱 解	4, 48
弱形式	48
収束性	4
衝撃波	4, 45
状態変数	9
状態方程式	14
常微分方程式	31
初期条件	2
初期値問題	31
【す】	
数値安定性	36
数値振動	78
数値流束	27, 53
数値流体力学	1
スタガードメッシュ	169
ステンシル	22
ストークスの構成方程式	15
ストークスモデル	14
スペクトル法	21

	【せ】	特性変数 109	フラクショナルステップ時間積分法 34
整合性 4, 22, 36		【な】	フラクショナルステップ法 203
制約条件 22		内部エネルギーの方程式 11	プラントル数 218
セル平均値 22		ナビエ・ストークス方程式 1, 15, 16, 19	プリミティブ変数 109
セルレイノルズ数 172		【に】	分散関係式 39
全エネルギー 12		二点前進 23	分散誤差 40
線形移流方程式 18		ニュートンの第二法則 10	【ほ】
線形解法 80		【ね】	ポアソン方程式 5
前進差分 24		熱拡散率 20	膨張波 47
全微分 9		熱散逸 11	補間関数 22
【そ】		熱伝導率 11	保存型の支配方程式 14
双曲型 43		粘性応力 10	保存形 108
双曲型偏微分方程式 17, 107		粘性係数 15	保存スキーム 51
相似解 47		粘性流束 16	保存変数 14, 15, 43, 109
【た】		【の】	ボルツマン方程式 1
対角化 111		ノイマン型境界条件 175	【ま】
対角行列 110		【は】	前処理 3
対称性 86		バーガース方程式 18	前処理法 227
体積力 10		ハイブリット法 172	マッハ数 19
第二粘性係数 15		半離散 55	【み】
多次元 29		半離散方程式 31	右行列 111
ダブルマッハ反射問題 163		【ひ】	密度ベースソルバ 225
単純波の解 114		非圧縮性流れ 4, 19	【め】
単調性保持法 81		非圧縮性ナビエ・ストークス方程式 20	メッシュ 21
【ち】		非構造格子 21, 31	メッシュセル 22
逐次過緩和法 177		非線形単調性保持解法 82	面積力 10
中心差分 26		左行列 111	【や】
中心法 171		比熱比 14	ヤコビアン行列 108, 123
直交格子 29		非粘性流束 15	【ゆ】
【て】		非保存スキーム 51	有限差分法 4, 22
ディリクレ型境界条件 175		【ふ】	有限体積法 4, 22
点値 22		フォン・ノイマンのフーリエ解析法 37	有限要素法 22
【と】		ブシネスク近似 20, 217	【よ】
等エントロピー流れ 113			陽解法 32
動粘性係数 18			
特性線 17, 44, 107			
特性速度 43			

【ら】	リーマン不変量 112	流束関数 43
ライン法 55	リーマン問題 4, 47, 118	流束差分分離 104
ラグランジュ微分 9	離散化 21	流束差分分離法 127
ラグランジュ表現 9, 11	離散値 22	流束ベクトル分離 104
ランキン・ユゴニオの式 48	離散方程式 35	流束ベクトル分離法 127
	理想気体 14	流束リミタ 93
	リミタ 86	【れ】
【り】	リミタ関数 88	連続体モデル 3, 8
リーディングターム 67	流束 14	連続の式 9
リーマンソルバ 54	流束型の支配方程式 13	
◆ ◆		
【数字】	Fromm 法 77	【Q】
0次補間近似 27	【G】	QUICK 69
1次風上法 57, 171	Godunov の定理 81	【R】
2次ルンゲ・クッタ法 33	Godunov リーマンソルバ 96	Richtmyer 法 75
2段階 Lax-Wendroff 法 148	【H】	Roe スキーム 56
2段階スキーム 75	Harten の定理 84	Roe 平均 131
2段前進法 32	Harten リーマンソルバ 101	Roe リーマンソルバ 131
3次 TVD ルンゲ・クッタ法 33	HLL リーマンソルバ 98	Rusanov リーマンソルバ 99
4次ルンゲ・クッタ法 34	【L】	【S】
【B】	Lax-Friedrichs リーマンソルバ 98	SIMPLE 法 5, 186
Beam-Warming 法 75	Lax-Wendroff の定理 52	SMAC 法 5, 168
【C】	Lax-Wendroff 法 73	SOR 法 177
CFD 1	Lax の等価定理 38	superbee リミタ 89
CFL 条件 38	LLF リーマンソルバ 99	【T】
CFL 数 37	Local Lax-Friedrichs リーマンソルバ 99	TVD 法 82
【D】	【M】	TVD リミタ 94
DG 法 55	MAC 法 5, 168	【V】
【E】	minmod リミタ 88, 156	van Albada リミタ 89
ENO 法 55	【P】	van Leer リミタ 89, 156
【F】	PISO 法 5	【W】
FCT 法 93		WENO 法 55

— 著者略歴 —

肖 鋒 (しゃお ふえん)
1983年 雲南大学理学部地球物理学科卒業
1989年 蘭州大学大学院修士課程修了
(大気物理専攻)
1996年 博士(理学)(東京工業大学)
1997年 理化学研究所基礎科学特別研究員
1999年 東京工業大学助教授
2007年 東京工業大学准教授
2017年 東京工業大学教授
現在に至る

長崎 孝夫 (ながさき たかお)
1978年 東京工業大学工学部機械物理工学科卒業
1980年 東京工業大学大学院修士課程修了
(機械物理工学専攻)
1982年 東京工業大学助手
1989年 工学博士(東京工業大学)
1991年 東京工業大学助教授
2007年 東京工業大学准教授
現在に至る

数値流体解析の基礎

— Visual C++ と gnuplot による圧縮性・非圧縮性流体解析 —

Fundamentals of Computational Fluid Dynamics for Both Compressible and Incompressible Flows — An Introductory Textbook with C Source Programs —

© Feng Xiao, Takao Nagasaki 2020

2020年1月23日 初版第1刷発行



検印省略

著者 肖 鋒
長 崎 孝 夫
発行者 株式会社 コロナ社
代表者 牛来真也
印刷所 三美印刷株式会社
製本所 有限会社 愛千製本所

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844 · 電話 (03) 3941-3131(代)

ホームページ <https://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-04664-9 C3053 Printed in Japan

(金)



＜出版者著作権管理機構 委託出版物＞

本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつど事前に、出版者著作権管理機構（電話 03-5244-5088, FAX 03-5244-5089, e-mail: info@jcopy.or.jp）の許諾を得てください。

本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めていません。落丁・乱丁はお取替えいたします。