数値流体解析の基礎

—Visual C++とgnuplotによる
圧縮性・非圧縮性流体解析—

博士(理学)　肖　　鋒
工学博士　長﨑　孝夫
共著

コロナ社

ま　え　が　き

数値流体力学（computational fluid dynamics，CFD）とは，流れ現象をコンピュータシミュレーションによって模擬することであり，現在，流れ現象の研究道具として広く使われている。工学分野においては，CAE（computer aided engineering）の要素技術として，流体絡みの製品開発・設計に欠かせないシミュレーションツールである。今日，商用ソフトや無料で利用できるフリーソフトを簡単に入手できるようになったため，誰でも CFD を利用できる便利な時代になっている。その一方で，CFD 数値モデルの仕組み，とりわけその基礎となる数値解法を理解せず，単なるユーザとして CFD ソフトを利用する場合も多く見られ，関連分野のさらなる発展および応用に支障が生じる現状の問題もよく指摘される。CFD の基礎数値解法に関する専門知識は，シミュレーション結果を正しく理解するために非常に重要であるだけでなく，既存解法の問題点の改良や新たな解法の開発にも欠かせないものである。

CFD の研究分野において，これまで大量の数値解法が開発されている。それらを網羅する英文の専門書はあるが，一般読者にとっては難解なものとなっている。本書は，数値流体力学の入門的教科書・参考書として，圧縮性および非圧縮性流れの代表的な基礎解法を中心にわかりやすく解説する。内容構成において学習しやすさを重視しながら，関連知識の体系化にも工夫している。流体運動の支配方程式（2 章），離散法の基礎知識（3 章）を紹介した後，流動現象を表す最も基礎的な移流方程式およびバーガース方程式の数値解法を 4 章で解説する。特に，圧縮性流体に伴う衝撃波など，不連続解を解く場合の数値解法の問題点，および解決策を重点的に取り上げる。5 章では，4 章で述べた基礎解法をオイラー方程式に拡張し，衝撃波を含む圧縮性流れの数値解法について解説する。非圧縮性粘性流れの数値解法は 6 章で解説する。現在広く使われてい

る数値解法を説明するとともに，管内流れ，物体まわりの流れ，熱対流などの実例を取り上げる。さらに，圧縮性・非圧縮性流れを統一的に取り扱える数値計算手法も紹介する。

学部 3，4 年生や大学院生など，理工系大学や専門学校の標準レベルの数学および流体力学の基礎を習得した読者であれば，本書の内容を問題なく理解できる。教科書として利用する場合，1 学期分の授業計画が立てやすい分量となっている。数値解法を理解するために，各手法の基本的な考え方，またそれぞれの相違点などを説明するとともに，C 言語のサンプルプログラムを示し，最終的には読者自ら CFD コード開発の実践まで展開できるような内容構成となっている。付属プログラムを活用し演習を行えば，内容の理解を深めることで，場合によっては実際に取り組んでいる具体的研究課題にでもすぐに役立てられるかもしれない。また，独学によくある内容の難解さによる挫折感も，極力避けることができるだろう。

本書は，著者らが東京工業大学の大学院で講義した内容の一部で構成されている。本書の完成に際し，著者らの研究室所属の学生諸君からたいへん有益なフィードバックをいただいており，また多くの関係者にお世話になった。ここで謝意を表したい。

2019 年 11 月

肖　　鋒，長崎孝夫

目　　　次

1.　はじめに

2.　流れの基礎方程式

3.　数値解法の基礎

4.　スカラ保存則の数値解法

5.　非粘性圧縮性流体の数値解法

6.　非圧縮粘性流れの数値解法

1 はじめに

数値流体力学あるいは計算流体力学（computational fluid dynamics, CFD）は学問分野としての歴史は比較的浅く，最初の研究が 20 世紀初頭に始まって以来，百年もたっていないが，1950 年代以後コンピュータハードウェアの急速な発達に後押しされ，すさまじい勢いで発展してきた。CFD の応用範囲は，当初，気象，航空工学などの先端技術分野に限られていたが，現在，流体現象が関わるほぼすべての理工学分野に拡大している。本章では，CFD を概観するとともに，本書で取り扱う内容の概要を説明する。

1.1 数値流体力学とは

一言でいえば，CFD は流体運動を記述する数学モデルである支配方程式の数値解を求めることである。流体運動の物理的特性は，**支配方程式**と呼ばれる基本的な方程式（通常は偏微分方程式）によって記述することができる。例として，**ボルツマン方程式**（Boltzmann equation）やナビエ・ストークス方程式などが挙げられる。流体運動の支配方程式を数値的に解くために，それらの微分方程式を離散化し，近似的に代数方程式の形に書き換える必要がある。さらに，コンピュータプログラミング言語によってこれらの代数方程式をコンピュータプログラムまたはソフトウェアパッケージに変換し，計算機ハードウェアにおいて計算を実行する。

熱流体力学の研究において，従来，実験的方法と理論解析があったが，CFD は急速な発展を成し遂げ，現在，第 3 のアプローチとして確立されている。**図**

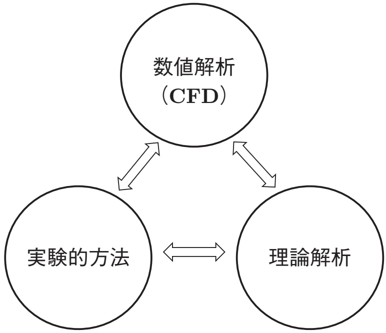

図 1.1　熱流体力学研究における三つのアプローチ

1.1 に示すように，実験的方法，理論解析と並んで，CFD は科学研究だけではなく，工学応用においても欠かせない手段となっている。他の手法に比べ，CFD はつぎの長所をもっている。

- 流体運動の支配方程式は，強い非線形性があり，限られた簡略モデルを除き，解析解を求めることができない。一方 CFD を用いれば，適切な初期条件・境界条件の下で支配方程式の数値解を求めることができる。また，数値実験の活用により，流体運動の仕組みを調べることが可能となり，理論研究を大きく前進させることも期待できる。
- 研究対象によっては，実験は膨大な費用がかかる。また，宇宙・地球流体，生物流体，原子炉内部の熱流動など，実験が困難あるいは危険を伴う場合に，数値シミュレーションが威力を発揮できる。
- 実験では，断片的で限られた物理量の計測しかできないが，CFD は計算領域全体においてすべての変数を再現できる。さらに，可視化などの後処理ツールによって流れ現象に関する包括的な情報を提供できる。
- 物理モデル，数値解法，計算条件によって，CFD の計算結果に誤差や不確かさが存在するが，実験に比べ，誤差のコントロールをしやすく，結果の再現性が優れている。
- コンピュータの性能向上とハードウェアのコスト削減により，数値シミュレーションの実施環境を整えやすくなっている。CFD は費用対効

果（cost–performance）に優れたCAE（computer–aided engineering）ツールとして，実験ベースのアプローチに比べ，生産性が大幅に向上し，製品の設計期間およびコストを大幅に削減することができる。

図 1.2 に示すように，CFD 解析は概（おおむ）ね，前処理，CFD ソルバ，後処理の三つの部分から構成される。そのうち CFD ソルバは，支配方程式を離散化する方法，いわゆる数値解法によって構築され，これまでにさまざまな数値解法が開発されてきた。流体運動を記述する物理モデルないし支配方程式によって，数値解法の種類は以下に大別することができる。(1) 粒子に基づく手法[5),6)†]，(2) 速度分布関数に基づく手法[1),7)]，(3) 連続体モデルに基づく手法。特に，ナビエ・ストークス方程式に代表される連続体モデルに基づく手法は，数値流体力学分野において最も広く使われる主流の手法である。本書では，ナビエ・ストークス方程式に基づく CFD を中心に論じ，(1) と (2) の手法はそれぞれの専門書に譲る。

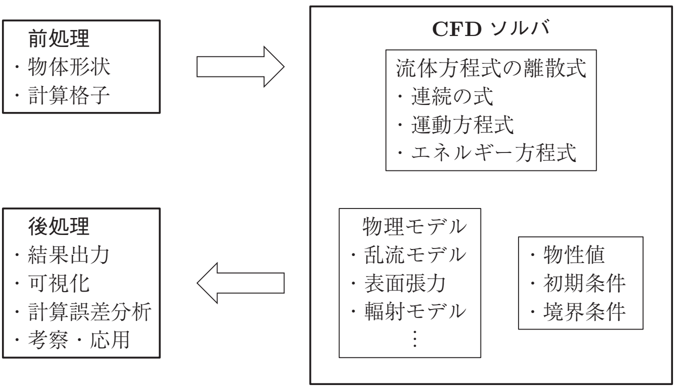

図 1.2　数値流体解析の流れ

連続体力学モデルに基づく手法は，CFD の主流として理論および数値解法開発の両面において数多くの研究成果が上げられている。以下，その代表的な研究を取り上げる。

† 肩付き数字は，巻末の引用・参考文献の番号を表す。

計算流体力学の歴史は1910年代までさかのぼることができ，差分法を用いて微分方程式を数値的に解くRichardsonの研究は，CFD最初の試みと思われる[42]。その後，Courant，FriedrichsとLewy (1928)[15]，von Neumann (1940年代)[39]，LaxとRichtmyer（1956）[33]などにより，数値解法の整合性，安定性，収束性といったCFDの基礎理論に関する研究が行われ，この分野の礎となった。また，数値解法の開発は，歴史上，圧縮性流れと非圧縮性流れを対象としてそれぞれ異なる枠組で行われてきた。

圧縮性流体では衝撃波などの不連続解が含まれるので，その数値解法の構築は難しく，これまでに数多くの研究者が努力を注いできた。Lax（1954）[32]が保存則の弱解の概念に基づき，不連続解を捕獲する解法を提案した。Godunov (1959)[21]が格子セル間の境界においてリーマン問題の解を求めることで，双曲型偏微分方程式を解く解法を提案した。この解法は厳密にリーマン問題を計算するが，区分的に一定な（piecewise constant）空間補間を用いるため，1次精度の解法である。この解法は当初有限差分法と称されたが，後に圧縮性流体数値計算において最も広く使われている高解像度有限体積法の原型となっている。Godunov法を大きく発展させたのはvan Leer (1970年代)[52)〜54]の研究である。区分的に一定の補間関数を使う代わりに，区分的に線形補間（piecewise linear）を用いることでより高精度な解法を提案した。また，厳密リーマンソルバの代わりに，StegerとWarming（1981）[48]，Roe（1981）[43]らが近似リーマンソルバを提案した。高次精度（2次以上）解法に伴う数値振動を抑えるため，Harten（1983）がTVD性，OsherとChakravarthy（1983）が単調性など，本来微分方程式がもつ特性を保持できる高解像度解法を提案した。その後の研究では，非線形リミタを用いた高解像度数値解法の研究が盛んに行われ，より高精度な解法が提案されてきた[26,31,37]。

非圧縮性流体では速度の発散（divergence）が0になる条件から，連続の式は時間発展の方程式ではなくなり，流れ場の拘束条件となる。密度の変化はないので，状態方程式のような熱力学変数間の関係式は成り立たなくなる。非圧縮近似は流体の音速が無限大に相当し，流れ場の変化は瞬間的に全空間に伝わ

り，支配方程式は楕円型の特徴が顕著になる。このため領域全体において計算結果を調整する必要がある。このような非圧縮性流れの解法として Harlow と Welch（1965）は MAC（marker and cell）法を提案し[23]，さらに Amsden と Harlow（1970）からは SMAC 法が提案されている[9]。類似の手法として射影法（projection method）[13]が Chorin（1968）より提案された。これらの手法では，速度の発散場が 0 である制約条件から，圧力のポアソン（Poisson）方程式を導き，それを反復法で解いて圧力の解を求める。この圧力を用いて速度場を修正し，圧力と速度の計算は交互に行う。Patankar（1980）が圧力と速度をより強い連成で求める SIMPLE 法（semi–implicit method for pressure–linked equations）[8]を提案した。さらに，時間発展問題において計算精度および安定性に優れた PISO 法[30]も開発された。

現在，これらの手法は商用 CFD ソフトウェアを含む実問題の数値解析ツールに広く使われているが，さまざまな応用問題に対して，より高性能な数値解法が求められる。このような要請から，CFD の数値解法に関する研究開発は，いまも盛んに行われている。例えば，乱流や流体音響などの解析に数値散逸，数値分散誤差の少ない高精度の解法が望まれる。一方，圧縮性流れ，多相流や反応性流れのような強い不連続解を伴う複雑流れを計算する場合，数値振動の少ない堅牢な数値解法が必要である。これらすべての性質を併せもつ数値解法は，まだ存在せず，さらなる努力が必要である。

さらに，CFD の応用範囲が急速に拡大しており，流体支配方程式の数値解法以外に，応用問題に応じてさまざまな物理過程や化学過程のモデル化も行う必要がある。例として，乱流，相変化，化学反応，表面張力，電磁力，弾塑性効果，生体効果などが挙げられる。これらの過程による効果をいかに CFD 解析モデルに組み込むかも，非常に重要な研究テーマである。

索　　引

―― 著 者 略 歴 ――

肖　　鋒（しゃお　ふぇん）
1983年　雲南大学理学部地球物理学科卒業
1989年　蘭州大学大学院修士課程修了
　　　　（大気物理専攻）
1996年　博士（理学）（東京工業大学）
1997年　理化学研究所基礎科学特別研究員
1999年　東京工業大学助教授
2007年　東京工業大学准教授
2017年　東京工業大学教授
　　　　現在に至る

長﨑　孝夫（ながさき　たかお）
1978年　東京工業大学工学部機械物理工学科卒業
1980年　東京工業大学大学院修士課程修了
　　　　（機械物理工学専攻）
1982年　東京工業大学助手
1989年　工学博士（東京工業大学）
1991年　東京工業大学助教授
2007年　東京工業大学准教授
　　　　現在に至る

数値流体解析の基礎

―Visual C++と gnuplot による圧縮性・非圧縮性流体解析―

Fundamentals of Computational Fluid Dynamics for Both Compressible and Incompressible Flows ―An Introductory Textbook with C Source Programs―

2020 年 1 月 23 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略

著　者	肖	鋒
	長　﨑	孝　夫
発行者	株式会社	コ ロ ナ 社
	代 表 者	牛 来 真 也
印刷所	三美印刷株式会社	
製本所	有限会社	愛千製本所

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発 行 所　株式会社　コ ロ ナ 社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ　https://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–04664–9　C3053　Printed in Japan　（金）