

応力解析のための 有限要素法理論と プログラム実装の基礎

博士(工学) 長嶋 利夫 [著]

コロナ社

まえがき

構造物の強度信頼性評価のためには、応力解析を実施する必要があります。いまやコンピュータを利用する有限要素法（finite element method：FEM）は、応力解析を実行するための標準的な手法であり、汎用 FEM ソフトウェアが市販され、広く用いられるようになってきました。実務では、もっぱらそのような汎用 FEM ソフトウェアが利用されるために、利用者が自らプログラム開発をする機会は以前に比べて減っているようです。しかしながら、著者は、つぎのような理由から、いまもなお、有限要素法の理論およびプログラミングの技能が重要であると考えています。

- ・ 応力解析や有限要素法の理論やプログラミングの基礎を理解していないと、実務上、汎用 FEM ソフトウェアを高度に使いこなすことは非常に困難です。
- ・ 研究開発では、汎用 FEM ソフトウェアのユーザサブルーチン機能を用いて利用者側でカスタマイズすることが、しばしば行われます。いうまでもなく、ユーザサブルーチンの開発にはプログラミング技能が必須です。
- ・ 汎用 FEM ソフトウェアの機能は進歩向上し続けており、その提供元である計算力学研究の最前線では、有限要素法の理論の理解を大前提としたプログラミングがつねに要求されています。
- ・ 研究開発の実務においては、もはや当たり前のように汎用 FEM ソフトウェアを用いた非線形解析が行われており、そこには拡張有限要素法（XFEM）のような新しい解析機能も順次追加されています。しかし、そのどちらの実行にも線形静弾性問題の解法が基本となります。

このような現状を鑑み、本書は線形静弾性問題の応力解析に絞り、有限要素法の理論とプログラム実装方法の基本事項を詳しく解説することを目的としています。

ii ま え が き

本書の特徴はつぎのとおりです。

- ・ 固体分野の有限要素法解析の基礎となる応力解析の理論と数値計算の理論（第1部）、それらを用いた有限要素の定式化（第2部）、有限要素法解析のプログラム実装（第3部）を明確に分けて記述しています。
- ・ 一貫して仮想仕事の原理を指導原理として、非線形有限要素法や拡張有限要素法にも応用できる基本的な理論と実装方法を自習できるように意図しています。そのため仮想仕事の原理式の導出方法および使い方を丁寧に説明することを心がけました。
- ・ 他書を開かなくても、なるべく本書だけで一通り学べるようにしました。
- ・ 最近では Fortran や C 言語よりも MATLAB などの数値計算ツールのほうが多く用いられているという状況に配慮し、MATLAB の基本的な演算とほぼ同じことができるフリーソフトウェア Octave を用いた有限要素法解析プログラムの実装例を示しました^{†1,†2}。解析結果は、同じくフリーソフトウェアである ParaView で可視化できるようにしています。

なお、本文の解説の流れから少し忘れてしまうが是非知っておいていただきたい項目については、「囲み記事」で紹介しました。必要に応じて参照してください。

構造強度設計に関係する技術者・研究者の方々が、本書を読み、有限要素法の理論とプログラム実装方法の基本を理解を深め、さらには複雑難解な構造強度問題を解決する一助となれば、著者にとって望外の喜びです。

末筆ながら、コロナ社関係各位には、本書の出版にあたりたいへんお世話になりました。ここに御礼申し上げます。

2018年3月

長嶋 利夫

†1 本書に記載したプログラム（スクリプト）は、下記 URL よりダウンロードできます。
<http://www.coronasha.co.jp/np/isbn/9784339046564/>

†2 本書に記載した Octave 用のプログラムを MATLAB で実行する際の注意点や、これらのプログラムを C 言語で記述する場合のコツなどを巻末の付録にまとめました。

目 次

〈第 1 部：理 論〉

1. 応力解析の基礎

1.1 力	1
1.1.1 構造物と力	1
1.1.2 フリーボディーダイアグラム	3
1.1.3 外力と内力	4
1.2 応力	5
1.2.1 応力ベクトルと応力成分	5
1.2.2 応力成分の定義	7
1.2.3 応力で表した平衡方程式	8
1.2.4 コーシーの公式	13
1.2.5 応力成分の座標変換	15
1.2.6 主 応 力	17
1.2.7 主せん断応力	23
1.3 変形とひずみ	24
1.3.1 変位と変形	24
1.3.2 ひ ず み	25
1.3.3 ひずみ成分の座標変換	27
1.3.4 主 ひ ず み	30
1.4 応力ひずみ関係式	30

1.4.1	一般化フックの法則	30
1.4.2	等方性弾性体のフックの法則	31
1.5	弾性力学の基礎方程式	33
1.5.1	偏微分方程式の境界値問題	33
1.5.2	二次元問題	35
1.6	仮想仕事の原理	41
1.6.1	仮想仕事の原理式の導出	41
1.6.2	ひずみエネルギー	49
1.7	材料強度	52
1.7.1	材料試験	52
1.7.2	破損の法則	53
1.8	材料力学	55
1.8.1	材料力学の考え方	55
1.8.2	トラス問題	56
1.8.3	はり問題	60
1.9	仮想仕事の原理の使い方	72
1.9.1	二次元不静定トラス問題	72
1.9.2	片持ばり問題	73

2. 数値計算の基礎

2.1	マトリクスの計算	76
2.1.1	マトリクスの定義と演算規則	76
2.1.2	さまざまな形式のマトリクス	79
2.2	連立一次方程式の解法	82
2.2.1	連立一次方程式の一般的表現	82
2.2.2	マトリクスの基本変形	83
2.2.3	ガウスの消去法	85

2.2.4	LU 分 解 法	88
2.3	補 間	94
2.3.1	線 形 補 間	95
2.3.2	ラグランジュ補間	95
2.4	数 値 積 分 法	97
2.4.1	台 形 公 式	98
2.4.2	シンプソンの公式	98
2.4.3	ニュートン・コーツの公式	99
2.4.4	ルジャンドル・ガウスの公式	101
2.5	Octave による数値計算	104
2.5.1	マトリクスの定義と演算規則	105
2.5.2	連立一次方程式の解法	111
2.5.3	スパースマトリクスの定義と演算	112
2.5.4	m ファイル	115
2.5.5	Octave によるプログラミング	116

〈第 2 部：定式化〉

3. 有限要素の定式化

3.1	一次元 2 節点棒要素	119
3.1.1	仮想仕事の原理による定式化	119
3.1.2	有限要素近似	120
3.1.3	要素剛性マトリクスと要素荷重ベクトルの重ね合わせ	122
3.1.4	拘束条件の処理	123
3.1.5	拘束点反力	125
3.1.6	ひずみ・応力の算出	125
3.1.7	解 析 例	125

3.2	二次元2節点トラス要素	131
3.2.1	要素剛性マトリクスと要素荷重ベクトル	132
3.2.2	要素剛性マトリクスと要素荷重ベクトルの重ね合わせ	136
3.2.3	システム方程式の導出	139
3.2.4	拘束点反力	140
3.2.5	内力の算出	140
3.2.6	解析例	140
3.3	二次元2節点はり要素	144
3.3.1	要素剛性マトリクスと要素荷重ベクトル	145
3.3.2	内力の算出	150
3.3.3	解析例	150
3.4	二次元3節点三角形要素	161
3.4.1	要素剛性マトリクスと要素荷重ベクトル	161
3.4.2	要素荷重ベクトルの具体的な計算法	169
3.5	二次元4節点四角形アイソパラメトリック要素	172
3.5.1	要素剛性マトリクスと要素荷重ベクトル	172
3.5.2	要素剛性マトリクスおよび物体力による要素荷重ベクトルの 具体的な計算法	178
3.5.3	ひずみ・応力の算出	180
3.6	三次元8節点六面体アイソパラメトリック要素	181
3.6.1	要素剛性マトリクスと要素荷重ベクトル	181
3.6.2	要素剛性マトリクスおよび要素荷重ベクトルの 具体的な計算法	190
3.6.3	ひずみ・応力の算出	193

〈第3部：プログラム実装〉

4. Octave によるプログラム実装

4.1	一次元2節点棒要素を用いた有限要素法解析プログラム	194
4.1.1	スクリプト bar3.m	194
4.1.2	スクリプト bar20.m	199
4.2	二次元2節点トラス要素を用いた有限要素法解析プログラム	200
4.2.1	スクリプト truss3.m	200
4.2.2	スクリプト truss3vtk.m	207
4.2.3	スクリプト truss22vtk.m	209
4.3	二次元2節点はり要素を用いた有限要素法解析プログラム	214
4.3.1	スクリプト beam2P.m	215
4.3.2	beam20P.m による解析例	217
4.4	二次元3節点三角形要素を用いた有限要素法解析プログラム	221
4.4.1	スクリプト triaFEM.m	221
4.4.2	triaFEM.m による解析例	227
4.5	二次元4節点四角形アイソパラメトリック要素を用いた 有限要素法解析プログラム	228
4.5.1	スクリプト quadFEM.m	229
4.5.2	quadFEM.m による解析例	233
4.6	三次元8節点六面体アイソパラメトリック要素を用いた 有限要素法解析プログラム	234
4.6.1	スクリプト hexaFEM.m	235
4.6.2	hexaFEM.m による解析例	241

付 録	243
A1. MATLAB で実行する場合の注意点	243
A2. C 言語によるプログラミングのコツ	244
参 考 文 献	258
索 引	259

困み記事

・右手座標系	2
・ベクトルの内積と外積	2
・ラグランジュの未定乗数法	19
・実対称マトリクスの固有値, 固有ベクトル	20
・ガウスの発散定理	44
・強形式と弱形式	45
・軸対称問題	48
・ V & V	56
・曲率半径	69
・ひと富士見ろや	70
・反復法による連立一次方程式の解法	91
・マトリクスの固有値解析	93
・ルジャンドル関数とルジャンドル・ガウスの積分法	102
・Octave のインストール	117
・面積座標	171
・ParaView のインストール	213

MATLAB は Math Works, Inc. の登録商標です。本書では, MATLAB およびその他の製品名に TM, ® マークは明記しておりません。

本書を発行するにあたって, 記載内容に誤りがないように可能な限り注意を払いましたが, 本書の内容を適用した結果生じたこと, また, 適用できなかったことに関して, 著者, 出版社とも一切の責任は負いませんのでご了承ください。

1

応力解析の基礎

1.1 力

1.1.1 構造物と力

航空機、車両など、複数の材料からなる部材を組み合わせで構成されたものを**構造物**と呼ぶ。本書では、構造物を「力を受け、これに耐えて力を空間に伝達するもの」と定義する。ここで**力**とは、物理学においては「物体の運動に変化を与える原因となるもの」の総称である。力は、向きと大きさを有するベクトル量として表される。静止状態にある構造物に加わる力および力のモーメントは釣り合っていないなければならない。すなわち、静止状態にある構造物に加わるすべての力の総和と、力のモーメントの総和はゼロベクトルになっている。図 1.1 に任意の N 個の力が作用する物体を示す。

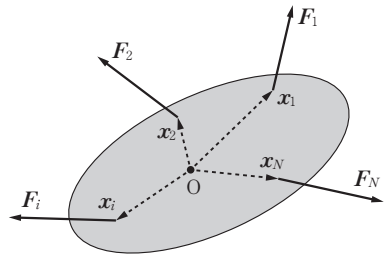


図 1.1 任意の N 個の力が作用する物体

図において、力はベクトルであるので矢印で描き、着力点を明記する。本書では F , P のようにベクトル量を太文字のイタリック体で表すことにする。力 F_i の作用点の原点 O に対する位置ベクトルを x_i ($i=1, 2, \dots, N$) とすると、力およびモーメントの釣り合い式は次式で与えられる。

2 1. 応力解析の基礎

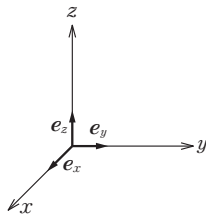
$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad (1.1a)$$

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad (1.1b)$$

ここに、式(1.1b)における記号「 \times 」はベクトルの外積を表し、式(1.1a)および式(1.1b)の左辺は、それぞれ力のモーメントおよび原点Oに関する力のモーメントの総和を表している。

右手座標系

三次元直交座標系において x , y , z 軸の方向の単位ベクトル \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z を基底ベクトルとして定義する。図(a)に示す \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z が、それぞれ図(b)に示すように、右手の親指、人差し指、中指の上にあるものとする座標系を**右手座標系**と呼び、これを標準的な座標系とする。



(a)



(b)

図 右手系の直交座標系

ベクトルの内積と外積

右手座標系の基底ベクトル \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z を用いて任意のベクトル \mathbf{a} を次式のように表すことができる。

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z$$

a_x , a_y , a_z を、基底ベクトル \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z で定められる座標系における、ベクトル \mathbf{a} の成分という。

二つのベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} の大きさを $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$ とし、そのなす角を θ とするとき、ベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} のスカラー積あるいは内積を演算子「 \cdot 」を用いて次式のように定義する。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$$

基底ベクトル \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z の大きさは1のベクトルなので、 \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z について内積は次式のようにになる。

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = 1, \quad \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = 1, \quad \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1$$

また、たがいに直交するので次式が成立する。

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = 0, \quad \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_z = 0, \quad \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = 0$$

一方、 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} は次式のように表すことができる。

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z$$

したがって

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z) \cdot (b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

となる。

二つのベクトル \mathbf{a} 、 \mathbf{b} のベクトルの外積 \mathbf{c} を演算子「 \times 」を用いて次式のように定義する。

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

図に示すように、 \mathbf{c} は二つのベクトル \mathbf{a} 、 \mathbf{b} と直交し、その大きさが \mathbf{a} 、 \mathbf{b} の張る平行四辺形の面積となり、 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} が右手系をなすように定められる。

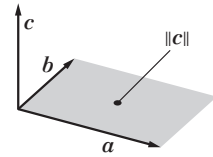


図 ベクトルの外積の定義

基底ベクトル \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y 、 \mathbf{e}_z についての外積を考える。同じ基底ベクトルどうしの外積はゼロベクトルになる。

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = \mathbf{0}, \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y = \mathbf{0}, \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = \mathbf{0}$$

また、 \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y 、 \mathbf{e}_z は、右手系をなすので、次式が成立する。

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x,$$

$$\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_x$$

したがって

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z) \times (b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

となる。

1.1.2 フリーボディーダイアグラム

構造物の全体あるいはその一部を考え、それに加わる力と力のモーメントを記入した図をフリーボディーダイアグラム (FBD: free body diagram, 自由体図) と呼ぶ。構造物の強度を評価するには、まず構造物に加わる力をすべて記述する必要がある。一般に、物体に作用する力は、面積領域に作用する表面力と体積領域に作用する物体力に分類できる。前者の例として圧力や摩擦力が、後者の例として重力や遠心力があげられる。

図 1.2 に機械構造物の例として航空機についての FBD の例を示す。定常水平飛行時および地上滑走時の航空機に加わる揚力 L 、重力 W 、推進力 T 、空気抵抗力 D などを示している。FBD はここで示したように実際の構造物の釣合いを考えるとときだけではなく、後述するように固体の基礎方程式を導出する際に用いる微小六面体や微小四面体にも適用される。

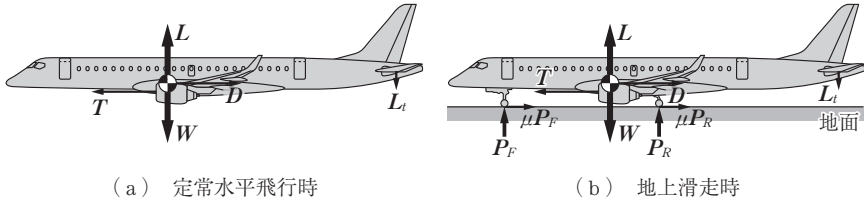


図 1.2 航空機の FBD

1.1.3 外力と内力

着目する構造物が受ける力を**外力**あるいは**荷重**と呼ぶ。図 1.3 に示すように

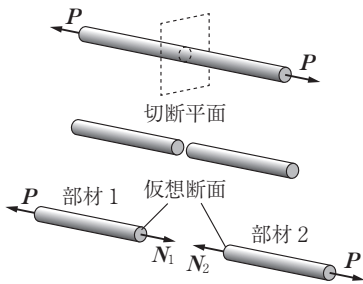


図 1.3 両端に引張り荷重 P を受ける丸棒

丸棒の両端に引張り荷重 P を与えた場合を考える。

そのような荷重を与えてもなお、丸棒が釣合い状態を保っているのであれば、丸棒の内部には、外力に耐えて抵抗する力が作用していなければならない。そのことを示すために、丸棒の任意の断面を仮想的に切断した状態を考える。これを**仮想断面**と呼ぶ。ここでは丸棒の中間

に、丸棒の軸に垂直な断面を考える。仮想断面で切断することによって、丸棒は二つの部分、部材 1 と部材 2 に分かれる。仮想的に切断しただけであるので、釣合い状態は引き続き維持されている。したがって、部材 1、部材 2 の仮想断面には、外力 P に抵抗する力が作用していなければならない。このような力 N_1 、 N_2 が**内力**である。仮想断面は丸棒の任意の位置に設けることができ

るので、丸棒の内部における任意の位置において内力が存在していることを説明することができる。

1.2 応 力

1.2.1 応力ベクトルと応力成分

前述した仮想断面は丸棒の軸に垂直に切断したが、仮想断面は任意に設定できる。ここでは図 1.4 に示すように、外向き法線方向 n が軸と θ だけ傾いた切断平面を仮想断面とした場合について考察する。

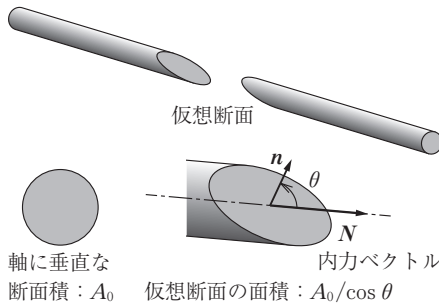


図 1.4 任意方向の切断面を有する丸棒

ここで外向きとは、切断面に垂直な二つの方向のうち物体（丸棒）が属していない側の方向である。丸棒の断面積を A_0 とすると、切断面の断面積 A は次式で与えられる。

$$A = \frac{A_0}{\cos\theta} \tag{1.2}$$

この切断面に内力 N が作用していることになる。内力 N の大きさは外力 P と等しく向きは反対である。内力ベクトルを、それが作用する断面積で割った量を応力ベクトルと呼ぶ。ここでは、応力ベクトル t を次式で定義する。

$$t = \frac{N}{A} \tag{1.3}$$

図 1.5 に示すように応力ベクトル t は断

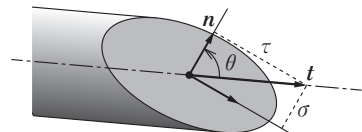


図 1.5 応力ベクトルの分解

索 引

【い】		逆べき乗法	93	自然境界条件	48
一次元 2 節点棒要素	120	逆マトリクス	78	自然座標	97
一般化フックの法則	31, 32	行	76	下三角マトリクス	80
【う】		強形式	45	弱形式	45
上三角マトリクス	80	行列	76	自由体図	3
【え】		曲率半径	66, 70	主応力	18
延性材料	53	【け】		——の主軸	18
【お】		検 証	56	主応力面	18
応力ひずみ関係式	34	【こ】		主せん断応力	24
応力ベクトル	5	構成式	30	主ひずみ	30
帯マトリクス	80	構造物	1	主ひずみ面	30
【か】		拘束点反力	125	シンプソンの公式	99
階 数	110	後退代入	86	【す】	
外 積	2	コーシーの公式	15	垂直応力成分	6
外 挿	180	固有値	20	垂直ひずみ	24, 26
外部仮想仕事	121	固有ベクトル	20	数値積分の重み係数	100
外 力	4	【さ】		数値積分法	97
ガウスザイデル法	92	最大主応力説	53	スカイラインマトリクス	81
ガウスの消去法	86	最大せん断応力説	53	スパースソルバー	82
ガウスの発散定理	42, 44	最大せん断ひずみ		スパースマトリクス	79, 81
荷 重	4	エネルギー説	54	【せ】	
仮想仕事の原理式	44	材料試験	52	正 解	41
仮想断面	4	材料力学	55	正規化	21
仮想変位	41	三角形の面積座標	169	脆性材料	53
片持ばり	61	三角マトリクス	80	静定問題	57
間接法	92	三次元 8 節点六面体アイン		正方マトリクス	77
【き】		パラメトリック要素	181	積分点	101
幾何学的境界条件	35	【し】		ゼロマトリクス	109
基本境界条件	48	軸対称問題	48	線形弾性体	31
		次元解析	71	線形補間	95
		システム方程式	124	前進消去	86
				全体荷重ベクトル	123
				全体剛性方程式	123

全体剛性マトリクス	123
せん断応力成分	6
せん断弾性係数	32
せん断ひずみ	24, 27
せん断力	24
せん断力図	61

【そ】

疎マトリクス	79
--------	----

【た】

対角マトリクス	77
台形公式	98
対称マトリクス	78
縦弾性係数	31
妥当性確認	56
単位マトリクス	77
弾性線の式	65
弾性体	31
弾性定数	30, 31
断面二次モーメント	66

【ち】

チェーンルール	175
力	1
中立面	65
直接法	91
直交マトリクス	16

【て】

転置マトリクス	78
---------	----

【と】

等方性	31
特異	78
特性方程式	21
トラス	56
トラス部材	131

【な】

内部仮想仕事	121
内力	4

【に】

二次元4節点四角形アイソ パラメトリック要素	172
ニュートン・コーツの公式	100

【は】

配列	76
破損の法則	53
はり	60
バンド幅	80
バンドマトリクス	80
半バンド幅	80
反復法	92

【ひ】

ひずみエネルギー	51
ひずみ変位関係式	34
引張り試験	53
微分の鎖	175
表面力	3
比例負荷	51

【ふ】

フォークト表記	31
不静定問題	59
物体力	3
フリーボディダイアグラム	3

【へ】

平衡方程式	33
平面応力状態	36
平面ひずみ状態	37
べき乗法	93
変位	24
偏微分方程式の境界値問題	33

【ほ】

ポアソン比	32
補間	94

補間式	95
-----	----

【ま】

曲げモーメント図	61
マトリクス	76
——の基本変形	84
——の行列式	78
——の成分	76

【み】

右手座標系	2
ミーゼスの降伏条件	55
ミーゼスの相当応力	55
密マトリクス	79

【め】

面積座標	171
------	-----

【も】

モールの応力円	6
---------	---

【や】

ヤコビアン	176
ヤコビマトリクス	175
ヤング率	32

【よ】

余因子マトリクス	79
要素荷重ベクトル	122
要素剛性マトリクス	121
横弾性係数	31

【ら】

ラグランジュ乗数	20
ラグランジュの未定乗数法	17, 19, 20
ラグランジュ補間多項式	95
ランク	110

【り】

力学的境界条件	35
---------	----

<p>【る】 ルジャンドル・ガウスの公式 101</p>	<p>ルジャンドルの多項式 102 【れ】 列 76</p>	<p>連立一次方程式 82</p>
◇		
<p>【B】 BMD 61</p> <p>【C】 calculation verification 56 code verification 56</p> <p>【F】 FBD 3</p>	<p>【L】 LU 分解 88</p> <p>【M】 m ファイル 115</p> <p>【O】 Octave 105, 117</p>	<p>【S】 SFD 61</p> <p>【V】 validation 56 verification 56</p>

— 著者略歴 —

1985年 東京大学工学部航空学科卒業
1987年 東京大学大学院工学系研究科航空学専門課程修士課程修了
1987～ 株式会社日立製作所機械研究所勤務
1990年
1990～ 株式会社三菱総合研究所勤務
2001年
1999年 博士（工学）（東京大学）
2001年 上智大学講師
2002年 上智大学助教授
2007年 上智大学教授
現在に至る

応力解析のための有限要素法理論とプログラム実装の基礎

Fundamentals of Finite Element Method and Program Implementation for Stress Analysis

© Toshio Nagashima 2018

2018年5月10日 初版第1刷発行



検印省略

著者 ^{なが}長 ^{しま}嶋 ^{とし}利 ^お夫
発行者 株式会社 コロナ社
代表者 牛来真也
印刷所 新日本印刷株式会社
製本所 有限会社 愛千製本所

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan

振替00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)
ホームページ <http://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-04656-4 C3053 Printed in Japan

(柏原)



JCOPY <出版者著作権管理機構 委託出版物>

本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつど事前に、出版者著作権管理機構(電話 03-3513-6969, FAX 03-3513-6979, e-mail: info@jcopy.or.jp)の許諾を得てください。

本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めていません。落丁・乱丁はお取替えいたします。