応力解析のための 有限要素法理論と プログラム実装の基礎

博士（工学）　長嶋　利夫【著】

コロナ社

ま　え　が　き

構造物の強度信頼性評価のためには，応力解析を実施する必要があります。いまやコンピュータを利用する有限要素法（finite element method：FEM）は，応力解析を実行するための標準的な手法であり，汎用 FEM ソフトウェアが市販され，広く用いられるようになっています。実務では，もっぱらそのような汎用 FEM ソフトウェアが利用されるために，利用者が自らプログラム開発をする機会は以前に比べて減っているようです。しかしながら，著者は，つぎのような理由から，いまもなお，有限要素法の理論およびプログラミングの技能が重要であると考えています。

・応力解析や有限要素法の理論やプログラミングの基礎を理解していないと，実務上，汎用 FEM ソフトウェアを高度に使いこなすことは非常に困難です。
・研究開発では，汎用 FEM ソフトウェアのユーザサブルーチン機能を用いて利用者側でカスタマイズすることが，しばしば行われます。いうまでもなく，ユーザサブルーチンの開発にはプログラミング技能が必須です。
・汎用 FEM ソフトウェアの機能は進歩向上し続けており，その提供元である計算力学研究の最前線では，有限要素法の理論の理解を大前提としたプログラミングがつねに要求されています。
・研究開発の実務においては，もはや当たり前のように汎用 FEM ソフトウェアを用いた非線形解析が行われており，そこには拡張有限要素法（XFEM）のような新しい解析機能も順次追加されています。しかし，そのどちらの実行にも線形静弾性問題の解法が基本となります。

このような現状を鑑み，本書は線形静弾性問題の応力解析に絞り，有限要素法の理論とプログラム実装方法の基本事項を詳しく解説することを目的としています。

本書の特徴はつぎのとおりです。

・固体分野の有限要素法解析の基礎となる応力解析の理論と数値計算の理論（第１部），それらを用いた有限要素の定式化（第２部），有限要素法解析のプログラム実装（第３部）を明確に分けて記述しています。

・一貫して仮想仕事の原理を指導原理として，非線形有限要素法や拡張有限要素法にも応用できる基本的な理論と実装方法を自習できるように意図しています。そのため仮想仕事の原理式の導出方法および使い方を丁寧に説明することを心がけました。

・他書を開かなくても，なるべく本書だけで一通り学べるようにしました。

・最近は Fortran や C 言語よりも MATLAB などの数値計算ツールのほうが多く用いられているという状況に配慮し，MATLAB の基本的な演算とほぼ同じことができるフリーソフトウェア Octave を用いた有限要素法解析プログラムの実装例を示しました[†1, †2]。解析結果は，同じくフリーソフトウェアである ParaView で可視化できるようにしています。

なお，本文の解説の流れから少しそれてしまうが是非知っておいていただきたい項目については，「囲み記事」で紹介しました。必要に応じて参照してください。

構造強度設計に関係する技術者・研究者の方々が，本書を読み，有限要素法の理論とプログラム実装方法の基本の理解を深め，さらには複雑難解な構造強度問題を解決する一助となれば，著者にとって望外の喜びです。

末筆ながら，コロナ社関係各位には，本書の出版にあたりたいへんお世話になりました。ここに御礼申し上げます。

2018 年 3 月

長嶋　利夫

---

†1　本書に記載したプログラム（スクリプト）は，下記 URL よりダウンロードできます。
http://www.coronasha.co.jp/np/isbn/9784339046564/

†2　本書に記載した Octave 用のプログラムを MATLAB で実行する際の注意点や，これらのプログラムを C 言語で記述する場合のコツなどを巻末の付録にまとめました。

目　　　次

〈第 1 部：理　論〉

1.　応力解析の基礎

2.　数値計算の基礎

〈第 2 部：定式化〉

3.　有限要素の定式化

〈第 3 部：プログラム実装〉

4. Octave によるプログラム実装

囲み記事

〈第 1 部：理　論〉

1 応力解析の基礎

1.1　力

1.1.1　構造物と力

航空機，車両など，複数の材料からなる部材を組み合わせて構成されたものを**構造物**と呼ぶ。本書では，構造物を「力を受け，これに耐えて力を空間に伝達するもの」と定義する。ここで**力**とは，物理学においては「物体の運動に変化を与える原因となるもの」の総称である。力は，向きと大きさを有するベクトル量として表される。静止状態にある構造物に加わる力および力のモーメントは釣り合っていなければならない。すなわち，静止状態にある構造物に加わるすべての力の総和と，力のモーメントの総和はゼロベクトルになっている。**図 1.1** に任意の N 個の力が作用する物体を示す。

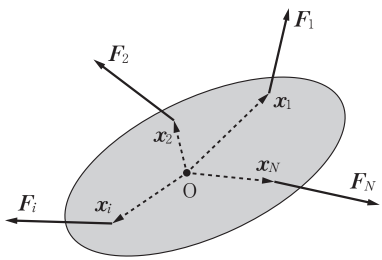


図 1.1　任意の N 個の力が作用する物体

図において，力はベクトルであるので矢印で描き，着力点を明記する。本書では $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{P}$ のようにベクトル量を太文字のイタリック体で表すことにする。力 $\boldsymbol{F}_i$ の作用点の原点 O に対する位置ベクトルを $\boldsymbol{x}_i$（$i=1, 2, \cdots, N$）とすると，力およびモーメントの釣合い式は次式で与えられる。

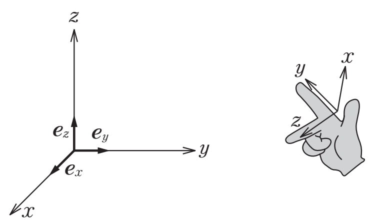
$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0} \tag{1.1a}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0} \tag{1.1b}$$

ここに，式 (1.1b) における記号「×」はベクトルの**外積**を表し，式 (1.1a) および式 (1.1b) の左辺は，それぞれ力のモーメントおよび原点 O に関する力のモーメントの総和を表している。

右手座標系

三次元直交座標系において x，y，z 軸の方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$ を基底ベクトルとして定義する。**図**（a）に示す $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$ が，それぞれ図（b）に示すように，右手の親指，人差し指，中指の上にあるものとする座標系を**右手座標系**と呼び，これを標準的な座標系とする。



（a）　（b）

図　右手系の直交座標系

ベクトルの内積と外積

右手座標系の基底ベクトル $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$ を用いて任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ を次式のように表すことができる。

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{e}_x + a_y\boldsymbol{e}_y + a_z\boldsymbol{e}_z$$

a_x，a_y，a_z を，基底ベクトル $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$ で定められる座標系における，ベクトル $\boldsymbol{a}$ の成分という。

二つのベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ の大きさを $\|\boldsymbol{a}\|$，$\|\boldsymbol{b}\|$ とし，そのなす角を θ とするとき，ベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ のスカラ積あるいは内積を演算子「$\cdot$」を用いて次式のように定義する。

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta$$

基底ベクトル $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$ の大きさは 1 のベクトルなので，$\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$ についての内積は次式のようになる。

$$\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_x=1,\quad \boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_y=1,\quad \boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_z=1$$

また，たがいに直交するので次式が成立する。

$$\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y=0,\quad \boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_z=0,\quad \boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_z=0$$

一方，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ は次式のように表すことができる。

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{e}_x+a_y\boldsymbol{e}_y+a_z\boldsymbol{e}_z,\quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{e}_x+b_y\boldsymbol{e}_y+b_z\boldsymbol{e}_z$$

したがって

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{e}_x+a_y\boldsymbol{e}_y+a_z\boldsymbol{e}_z)\cdot(b_x\boldsymbol{e}_x+b_y\boldsymbol{e}_y+b_z\boldsymbol{e}_z)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

となる。

二つのベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ のベクトルの外積 $\boldsymbol{c}$ を演算子「×」を用いて次式のように定義する。

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

図に示すように，$\boldsymbol{c}$ は二つのベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ と直交し，その大きさが $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形の面積となり，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ が右手系をなすように定められる。

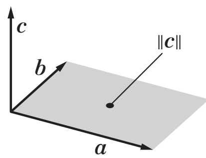


図　ベクトルの外積の定義

基底ベクトル $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$ についての外積を考える。同じ基底ベクトルどうしの外積はゼロベクトルになる。

$$\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_x=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{0}$$

また，$\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$ は，右手系をなすので，次式が成立する。

$$\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{e}_z,\quad \boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_x=\boldsymbol{e}_y,\quad \boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_x,$$
$$\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_x=-\boldsymbol{e}_z,\quad \boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_z=-\boldsymbol{e}_y,\quad \boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_y=-\boldsymbol{e}_x$$

したがって

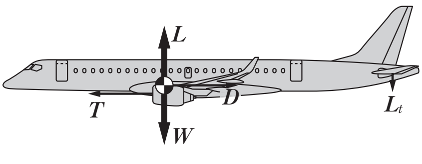
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{e}_x+a_y\boldsymbol{e}_y+a_z\boldsymbol{e}_z)\times(b_x\boldsymbol{e}_x+b_y\boldsymbol{e}_y+b_z\boldsymbol{e}_z)\\&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{e}_x+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{e}_y+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

となる。

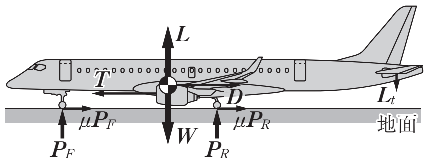
1.1.2　フリーボディーダイアグラム

構造物の全体あるいはその一部を考え，それに加わる力と力のモーメントを記入した図を**フリーボディーダイアグラム**（**FBD**：free body diagram，**自由体図**）と呼ぶ。構造物の強度を評価するには，まず構造物に加わる力をすべて記述する必要がある。一般に，物体に作用する力は，面積領域に作用する**表面力**と体積領域に作用する**物体力**に分類できる。前者の例として圧力や摩擦力が，後者の例として重力や遠心力があげられる。

図 1.2 に機械構造物の例として航空機についての FBD の例を示す。定常水平飛行時および地上滑走時の航空機に加わる揚力 $\boldsymbol{L}$，重力 $\boldsymbol{W}$，推進力 $\boldsymbol{T}$，空気抵抗力 $\boldsymbol{D}$ などを示している。FBD はここで示したように実際の構造物の釣合いを考えるときだけではなく，後述するように固体の基礎方程式を導出する際に用いる微小六面体や微小四面体にも適用される。



（a） 定常水平飛行時



（b） 地上滑走時

図 1.2　航空機の FBD

1.1.3　外力と内力

着目する構造物が受ける力を**外力**あるいは**荷重**と呼ぶ。**図 1.3** に示すように丸棒の両端に引張り荷重 $\boldsymbol{P}$ を与えた場合を考える。

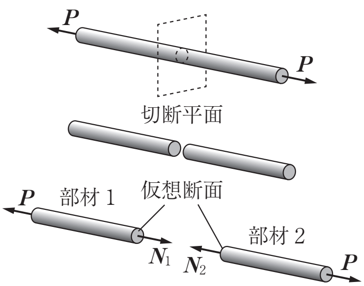


図 1.3　両端に引張り荷重 P を受ける丸棒

そのような荷重を与えてもなお，丸棒が釣合い状態を保っているのであれば，丸棒の内部には，外力に耐えて抵抗する力が作用していなければならない。そのことを示すために，丸棒の任意の断面を仮想的に切断した状態を考える。これを**仮想断面**と呼ぶ。ここでは丸棒の中間に，丸棒の軸に垂直な断面を考える。仮想断面で切断することによって，丸棒は二つの部分，部材 1 と部材 2 に分かれる。仮想的に切断しただけであるので，釣合い状態は引き続き維持されている。したがって，部材 1，部材 2 の仮想断面には，外力 $\boldsymbol{P}$ に抵抗する力が作用していなければならない。このような力 $\boldsymbol{N}_1$，$\boldsymbol{N}_2$ が**内力**である。仮想断面は丸棒の任意の位置に設けることができ

るので，丸棒の内部における任意の位置において内力が存在していることを説明することができる。

1.2 応　　　　　力

1.2.1　応力ベクトルと応力成分

前述した仮想断面は丸棒の軸に垂直に切断したが，仮想断面は任意に設定できる。ここでは**図 1.4** に示すように，外向き法線方向 $\boldsymbol{n}$ が軸と θ だけ傾いた切断平面を仮想断面とした場合について考察する。

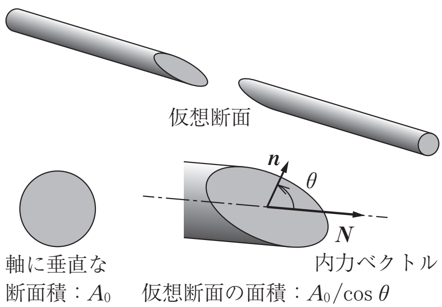


図 1.4　任意方向の切断面を有する丸棒

ここで外向きとは，切断面に垂直な二つの方向のうち物体（丸棒）が属していない側の方向である。丸棒の断面積を A_0 とすると，切断面の断面積 A は次式で与えられる。

$$A = \frac{A_0}{\cos\theta} \tag{1.2}$$

この切断面に内力 $\boldsymbol{N}$ が作用していることになる。内力 $\boldsymbol{N}$ の大きさは外力 $\boldsymbol{P}$ と等しく向きは反対である。内力ベクトルを，それが作用する断面積で割った量を**応力ベクトル**と呼ぶ。ここでは，応力ベクトル $\boldsymbol{t}$ を次式で定義する。

$$\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{N}}{A} \tag{1.3}$$

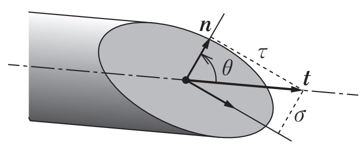


図 1.5　応力ベクトルの分解

図 1.5 に示すように応力ベクトル $\boldsymbol{t}$ は断

索　　引

—— 著 者 略 歴 ——

1985 年　東京大学工学部航空学科卒業
1987 年　東京大学大学院工学系研究科航空学専門課程修士課程修了
1987 ～　株式会社日立製作所機械研究所勤務
1990 年
1990 ～　株式会社三菱総合研究所勤務
2001 年
1999 年　博士（工学）（東京大学）
2001 年　上智大学講師
2002 年　上智大学助教授
2007 年　上智大学教授
　　　　　現在に至る

応力解析のための有限要素法理論とプログラム実装の基礎

Fundamentals of Finite Element Method and Program Implementation for Stress Analysis

2018 年 5 月 10 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略

著　者　長嶋（ながしま）　利夫（としお）
発 行 者　株式会社　コ ロ ナ 社
　　　　　代 表 者　牛 来 真 也
印 刷 所　新 日 本 印 刷 株 式 会 社
製 本 所　有限会社　愛 千 製 本 所

112-0011　東京都文京区千石 4-46-10
発 行 所　株式会社　**コ ロ ナ 社**
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140-8-14844・電話（03）3941-3131（代）
ホームページ　http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978-4-339-04656-4　C3053　Printed in Japan　（柏原）