まえがき

コンピュータ技術の発展に伴い，以前では考えられないような複雑な現象を汎用ソフトウェアで簡単に扱えるようになってきている。これはたいへん喜ばしいことである反面，手法の中身を理解することなく解析者が扱えるということから，誤った解析結果を導いてしまう危険性をはらんでいる。

固体力学分野においても，コンピュータがない時代には扱えなかったさまざまな非線形問題を汎用ソフトウェアで処理することができる。ここで，解析者が十分に手法の原理を理解することなく問題が解かれるからといって，問題そのものが簡単になったわけではないことに注意が必要である。複雑な現象は，やはり注意深い考察に基づく裏づけがあって初めて解かれるものである。

固体力学を深く理解するためには，テンソル解析の知識が重要である。これなしには，ひずみや応力といったきわめて基本的な物理量すら定義することができない。

さて，前著『ベクトル解析からはじめる固体力学入門』では，できる限り証明や丁寧な説明は避け，直観的でかつ最短距離で理解できるようにテンソル解析を導入し，固体力学の基礎について説明を行った。しかし，研究者や技術者が実際に解析にあたるには，前著だけではいささか不十分である。やはり，きちんと理解するためには，それなりの厳密な議論が必要である。本著では，大学院生向けにテンソル解析から固体力学の応用までをしっかりと理解してもらえるように書き上げた。

前著では，ベクトル解析・テンソル解析を簡単に導入した上で，微小な弾性変形に限定して固体力学の説明を行い，有限要素法までを紹介した。一方，本著では，1〜4 章まででテンソル解析を詳細に説明する。その上で，5 章では，このテンソル解析を駆使して，固体力学と有限要素法について非線形を含めた

応用的な内容まで紹介する。6 章では，はりや柱に絞り，典型的な非線形問題である座屈を説明している。さらに，7 章では，直交座標で議論されてきたテンソル解析を一般座標にまで拡張し，それをもとに 8 章では有限変形理論を説明する。また，付録には弾性力学，塑性論，動力学などの基礎的な事項も掲載した。入門書である前著と本著により，固体力学の変形に関する研究や解析に支障なく取り組むことができるであろう。

おそらく本著は，初学者には多少読むのが難しいだろう。前著を含む入門書をしっかり読んだ上で，気長に付き合ってもらいたい。そうすれば，固体力学を体系的に理解できるはずである。

本著の執筆にあたり，静岡大学の矢代茂樹先生，京都大学の西川雅章先生，東北大学の青柳吉輝先生，東京理科大学の松崎亮介先生，JAXA の吉村彰記博士にはたいへん丁寧に原稿に目を通していただき，数多くのご指摘をいただいた。また，原稿の作成においては，東北大学の樋口諒君にたいへんご支援をいただいた。心より感謝の意を表します。

2015 年 4 月

岡部朋永

本著のためにホームページを開設しました：http://www.plum.mech.tohoku.ac.jp/
質問はつぎのアドレスまでお送りください：tensor@plum.mech.tohoku.ac.jp

目　　　　次

1. ベ ク ト ル

2. テ ン ソ ル

3.　2 階テンソルの性質

4.　テンソル場

5.　固体力学と有限要素法

6.　はりと柱の変形

7. 一般テンソル解析

8. 有限変形理論

付　　　　録

1 ベクトル

1.1 ベクトルと成分

大きさと向きとを持った量をベクトルという[†]。これをベクトルにおける定義とする。ここではまず，ベクトルに関する演算の基本的な事項を証明なしに述べる。

図 1.1 のように原点 O とたがいに垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ を考えよう。このとき，任意の点の座標は (x_1, x_2, x_3) として表すことができる。この座標のことを直交座標系 (x_1, x_2, x_3) と呼び，Σ と表すことにしよう。また，図中のたがいに垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ を Σ の基本ベクトルという。

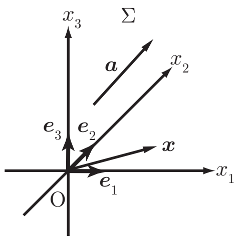

図 1.1 単位ベクトルと基本ベクトル

任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ は，基本ベクトルの 1 次結合

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 \tag{1.1}$$

† 例えば，速度や加速度，力はベクトルである。ベクトルという用語はハミルトンによってスカラーなどの用語とともに導入された。

で一意に表される。また，ベクトルの始点を原点とした位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 \tag{1.2}$$

のように，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ の 1 次結合で表される†。

また，x_1, x_2, x_3 や a_1, a_2, a_3 などを成分という。この成分を以後では x_i とも表し，このとき i は $\{1, 2, 3\}$ のうち任意の値をとるものとする。また，他の添字についても同様である。

1.2　内　　　積

ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の内積をつぎのように定義する。

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = |\,\boldsymbol{x}\,||\,\boldsymbol{y}\,| \cos\theta \tag{1.3}$$

θ は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の作る角を表し，$|\ |$ はベクトルの大きさを表す。式 (1.3) を用いると

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{1.4}$$

を得る。この δ_{ij} をクロネッカーのデルタという。このことを利用して $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ を成分で表すと

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} &= (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) \cdot (y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + y_3\boldsymbol{e}_3) \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \end{aligned} \tag{1.5}$$

を得る。

また，ベクトル $\boldsymbol{x}$ の大きさ $|\,\boldsymbol{x}\,|$ は，式 (1.3) より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} &= |\,\boldsymbol{x}\,||\,\boldsymbol{x}\,| \cos 0 \qquad (\theta = 0^\circ) \\ &= |\,\boldsymbol{x}\,||\,\boldsymbol{x}\,| \end{aligned}$$

† 以下，任意のベクトルを中心に説明を行うが，時として位置ベクトルであることもある。その都度，前後を見ながら読み替えてほしい。

$$= |\,\boldsymbol{x}\,|^2 \tag{1.6}$$

となり，したがって，式 (1.5), (1.6) より

$$\begin{aligned} |\,\boldsymbol{x}\,| &= \sqrt{x_1x_1 + x_2x_2 + x_3x_3} \\ &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \end{aligned} \tag{1.7}$$

となる。

1.3　外　　　　積

$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に対して $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ を満たすベクトルを $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の外積という。外積 $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ はつぎの性質を有する。

$$\text{(i)}\quad \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\perp\boldsymbol{x},\ \ \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\perp\boldsymbol{y} \tag{1.8}$$

$$\text{(ii)}\quad |\,\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\,| = |\,\boldsymbol{x}\,||\,\boldsymbol{y}\,|\sin\theta \tag{1.9}$$

また，それぞれの基本ベクトルに対して

$$\left.\begin{array}{lll} \boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_2 \end{array}\right\} \tag{1.10}$$

と定義する。すると，外積 $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ はつぎのように与えられる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y} &= (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3)\times(y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + y_3\boldsymbol{e}_3) \\ &= (x_2y_3 - x_3y_2)\,\boldsymbol{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\,\boldsymbol{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\,\boldsymbol{e}_3 \\ &= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_3 \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{1.11}$$

ただし，ベクトルの演算において分配法則が成り立つことは既知とした。

1.4　3　重　積

$\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z})$ をスカラー 3 重積という。これを成分で表すと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z}) &= (x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3)\\ &\qquad\cdot\left(\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1+\begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ z_3 & z_1\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_2+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_3\right)\\ &= x_1\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3\end{vmatrix}+x_2\begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ z_3 & z_1\end{vmatrix}+x_3\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}\end{aligned}\tag{1.12}$$

となる。通常この 3 重積をつぎの記号で表す。

$$|\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{z}| = \boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z})\tag{1.13}$$

この式 (1.13) は少し違和感があるかもしれない。つまり，式 (1.13) では，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ は横に並ぶにもかかわらず，その成分は行ごとに並ぶ。ただし，行列式では転置（行と列を入れ替えること）をしても，その値は変わらないことを思い出せば

$$|\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{z}| = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}\tag{1.14}$$

と書け，この表記法に納得してもらえるだろう。行列式では，二つの列（あるいは行）を奇数回入れ替えたときは符号が変わり，偶数回入れ替えたときは変わらない。このことより，次式が成り立つ。

$$|\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{z}| = -|\boldsymbol{y}\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{z}| = |\boldsymbol{y}\ \boldsymbol{z}\ \boldsymbol{x}| = -|\boldsymbol{z}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{z}\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}| = -|\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{z}\ \boldsymbol{y}|\tag{1.15}$$

1.5　平行四辺形・平行六面体

「ベクトル解析」の教科書によく書かれているように，先ほど述べた外積 $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ の大きさは，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積 S に等しい。このことは，**図 1.2** のように $\boldsymbol{y}$ の終点から $\boldsymbol{x}$ へと垂線を下ろし，式 (1.9) と見比べれば，容易に理解できる。

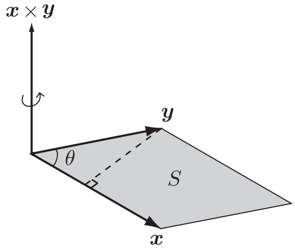

図 1.2　外積と面積

したがって，先ほど定義した外積は，つぎの二つの性質によっても定義することができる。

(1)　外積 $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ の大きさ $|\,\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\,|$ は，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積 S に等しい（式 (1.9)）。

(2)　外積 $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ の方向は，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ が右手系になるように与えられる（式 (1.8), (1.10)）。

つぎに，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ が同一の平面にないとする。このとき，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ を 3 辺とする平行六面体の体積 V は，高さを h とし，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の作る平行四辺形の面積を S，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の法線と $\boldsymbol{z}$ との角度を ϕ とすると

$$\begin{aligned} V = hS &= |\,\boldsymbol{x}\,|\,|\cos\phi|\,|\,\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z}\,| \\ &= \pm|\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}\,\boldsymbol{z}| \quad (\cos\phi > 0 : +,\ \ \cos\phi < 0 : -) \end{aligned} \tag{1.16}$$

となる。$\phi = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $V = 0$ となり，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ は同一平面上にある。

1.6 ベクトル3重積

ベクトル $\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z})$ をベクトル 3 重積といい，つぎの公式が成り立つことが知られている。

$$\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z})\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})\boldsymbol{z} \tag{1.17}$$

簡単なので，成分を入れ替えて確認しよう。すると

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}) + \boldsymbol{y} \times (\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{z} \times (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \\ &\quad = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z})\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})\boldsymbol{z} + (\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{z} - (\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z})\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{y})\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{y} \\ &\quad = \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{1.18}$$

と書ける。これをヤコビの恒等式という[1)†]。

1.7 ベクトル変換

図 1.3 のように原点を固定して座標軸を変化させたときの 2 組の直交座標系 Σ と Σ' を考える。このとき，2 組の基本ベクトル間には，つぎのような関係が成り立つと仮定する。

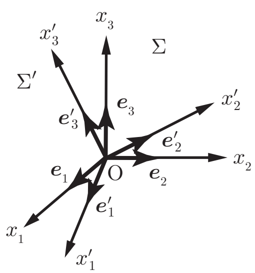

図 1.3　ベクトル変換

† 肩付き番号は巻末の引用・参考文献を示す。

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = a_{11}\boldsymbol{e}'_1 + a_{21}\boldsymbol{e}'_2 + a_{31}\boldsymbol{e}'_3 \\ \boldsymbol{e}_2 = a_{12}\boldsymbol{e}'_1 + a_{22}\boldsymbol{e}'_2 + a_{32}\boldsymbol{e}'_3 \\ \boldsymbol{e}_3 = a_{13}\boldsymbol{e}'_1 + a_{23}\boldsymbol{e}'_2 + a_{33}\boldsymbol{e}'_3 \end{cases} \tag{1.19}$$

任意ベクトル $\boldsymbol{x}$ をそれぞれの基本ベクトルで表せば

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = x'_1\boldsymbol{e}'_1 + x'_2\boldsymbol{e}'_2 + x'_3\boldsymbol{e}'_3 \tag{1.20}$$

と書ける。この式 (1.20) に式 (1.19) を代入して，整理すると

$$\begin{aligned}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\boldsymbol{e}'_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\boldsymbol{e}'_2 \\ + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)\boldsymbol{e}'_3 = x'_1\boldsymbol{e}'_1 + x'_2\boldsymbol{e}'_2 + x'_3\boldsymbol{e}'_3\end{aligned} \tag{1.21}$$

となる。両辺の $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$, $\boldsymbol{e}'_3$ の係数を比較すると

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \tag{1.22}$$

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

と書ける。式 (1.23) の行列

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{1.24}$$

を座標変換行列という†。式 (1.22) は

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j \tag{1.25}$$

† 前著では座標変換行列の成分を β_{ij} としたが，本著では a_{ij} とした。

索　　　　引

―― 著 者 略 歴 ――

1996 年　慶應義塾大学理工学部機械工学科卒業
1998 年　慶應義塾大学大学院理工学研究科前期博士課程修了（機械工学専攻）
1999 年　慶應義塾大学大学院理工学研究科後期博士課程修了（機械工学専攻）
　　　　博士（工学）
2001 年　独立行政法人産業技術総合研究所研究員
2002 年　東北大学助教授
2007 年　東北大学准教授
2014 年　東北大学教授
　　　　現在に至る

テンソル解析からはじめる応用固体力学
Introduction to Tensor Analysis and Applied Solid Mechanics

2015 年 6 月 12 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略

著　者　岡（おか） 部（べ） 朋（とも） 永（なが）
発 行 者　株式会社　コ ロ ナ 社
　　　　　代 表 者　牛 来 真 也
印 刷 所　三 美 印 刷 株 式 会 社

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発行所　株式会社　コ　ロ　ナ　社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ　http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–04641–0（新宅）（製本：愛千製本所）G
Printed in Japan