

ま え が き

人工衛星が軌道を描いて動く現象を、初学者に向けて平易に、叙述的に語ることを本書はねらいとする。軌道の力学を少し進んで説こうとすると、込み入った数学解析がたくさん現れて読み手の負担になることが多い。そういう負担をできるだけ避けながら現象を語ることを本書は試みる。学部初年級の数学と物理学の用意があれば、たどるのに困難はないであろう。

本書では特に、軌道に関連するいろいろな現象がどういう背景からどういうプロセスで生じるのか、その物理的ないし幾何学的なイメージが浮かぶように語ろうとつとめた。そういうイメージを通じて現象になじむことが、きちんとした理解につながっていくような叙述を目指した。ときに叙述は長くなるが、そういうねらいのためなのでどうか了解を願いたい。もし、続いてもっと高度な理論形式を学ぼうとする場合でも、現象のイメージを得ておくことは助走としておおいに役立つであろう。

全体を通じてケプラーの法則が基調をなしているが、はじめのほうでは法則を解き明かすことが主眼で、先へ進むにつれて法則は前提になり、そこからいろいろな現象を導き出すようになっていく。おもな話題はもちろん地球をまわる衛星にあるが、論じる幅を^{ひろ}拡げるためには惑星やそのほかの天体にも登場してもらおう。そのときは対応して法則の語句を読みかえることとする。

使用する記号類はそのつど説明するが、記号 μ は一貫して「万有引力定数」×「地球の質量」を表す。この記号は至るところに現れるので、いちいち説明する煩わしさがないようにした。

本書を通読することで、軌道に関するおもな事象や概念が一通りカバーされよう。はじめに一読するとき、*をつけた節は各論的なので素通りしても支障はない。おわりの二章では静止軌道を取り上げるが、これは特定の軌道を掘り

下げる例と見てもよいし、あるいは実用上の重要性から取り上げたと見てもよい。

軌道を描く衛星の動きについて、いろいろと想像をめぐらせることを、本書において楽しんでいただければと思う。最後に、このような企てを形にする機会を与えていただいたコロナ社に、心からお礼を申し上げたい。

2015年3月

川瀬成一郎

目 次

1. ケプラーの法則

1.1 ケプラーの第1法則	1
1.2 ケプラーの第2法則	5
1.3 ケプラーの第3法則	7
1.4 適用例：月，地球，惑星	8
コラム [楕円軌道を描く]	11

2. ケプラーの法則を導く

2.1 法則の背景と検証	12
2.2 座標と運動方程式	13
2.3 衛星に働く力	14
2.4 検証と問題点	19
2.5 中心天体の動き	20
2.6 球体が生み出す引力	22
2.7 球体の引力と銀河回転*	24
コラム [火星が促した発見]	27

3. 力学と幾何学

3.1 軌道力学に独特な表記	28
3.2 軌道の角運動量	29

3.3 軌道のエネルギー	31
3.4 力学と幾何学の対応	33
3.5 座標系を定める	36
3.6 軌道の配置と軌道要素	38
3.7 座標系に生じる変化*	41
コラム [春分点とは]	43

4. 軌道を予測する

4.1 面積則を使う	44
4.2 軌道の予測	47
4.3 地球局での予測	51
4.4 地球の自転*	54
コラム [自転の進み遅れ*]	56

5. 軌道を変える

5.1 軌道を抜げる	57
5.2 待機軌道と移行軌道	59
5.3 静止軌道への投入	62
5.4 ホーマン移行	65
5.5 軌道面を変える	66
5.6 静止投入と軌道傾斜	67
5.7 軌道面変更の配分*	70
コラム [楕円軌道からの脱出]	71

6. 軌道の摂動

6.1 軌道を乱す力	72
------------	----

6.2	空 気 抵 抗	74
6.3	地球の形と円軌道	76
6.4	理想外引力の鉛直成分	81
6.5	太陽同期軌道	83
6.6	地球の形と楕円軌道	85
6.7	地球の形と凍結軌道*	89
	コラム 「摂動」という用語]	95

7. 摂 動 II

7.1	惑星に働く力	96
7.2	惑星の発見と摂動	99
7.3	軌 道 の 共 鳴	104
7.4	共軌道天体の動き	106
	コラム [別種の釣り合い点]	110

8. 双 曲 線 軌 道

8.1	軌道と双曲線	111
8.2	双曲線軌道への投入	114
8.3	双曲線と散乱	117
8.4	惑星通過飛行	119
8.5	自由帰還軌道	121
	コラム [アポロ 13 と自由帰還軌道]	124

9. 目 標 を ね ら う

9.1	固定点をねらう	125
9.2	最小エネルギー軌道	126

9.3 動く点をねらう	130
9.4 時間合わせの原理	132
コラム [ねらう精度と地球引力]	138

10. ラ ン デ ヲ

10.1 打ち上げと軌道面合わせ	139
10.2 位 相 合 わ せ	140
10.3 相対静止と待機点	142
10.4 到着のコース	143
10.5 到着の別コース	146
コラム [打ち上げと安全]	150

11. 近円軌道と相対運動

11.1 近円軌道と偏心円	151
11.2 時間にもなう動き	153
11.3 相 対 表 示	155
11.4 いろいろな相対運動	158
11.5 相対運動の直接導出	162
コラム [月のまわりでの安全]	164

12. 静 止 軌 道

12.1 近円軌道の小変化	165
12.2 地球の形による力	167
12.3 経度変化のパターン	171
12.4 太陽光の圧力	173
12.5 太陽位置と中心点の動き	177

12.6 太陽の引力	181
12.7 軌道面の傾き	183
12.8 月の引力と合計成長	186
コラム [インド洋]	189

13. 静止を保つ

13.1 衛星経度と軌道半径	190
13.2 衛星経度と離心率	192
13.3 衛星緯度と軌道面傾斜	195
13.4 静止軌道の半径	197
13.5 太陽・月引力の効果	198
13.6 接触軌道要素*	200
コラム [静止軌道の利用]	203

付 録

付録A 円錐曲線	204
付録B 軌道予測プログラム	206
付録C 数値積分の演算 (エンケ法)	209
付録D 数値積分の演算 (通常法)	211
付録E 相対運動方程式を導く	212
付録F 力の成分 F_r と F_θ の算出	214

参 考 文 献	216
索 引	217

1. ケプラーの法則

古く17世紀にケプラー (Johannes Kepler, 1571–1630) は、太陽をまわる惑星の動きを支配する法則を発見した。法則は三つ一組で、あわせてケプラーの法則 (Kepler's laws) という。法則は地球をまわる衛星にも成り立つので、今日では衛星の軌道を扱うために欠かせない基本となった。ここでは地球をまわる軌道について法則を記述するが、ほかの天体をまわる軌道でも法則の形は変わらない。

1.1 ケプラーの第1法則：Kepler's first law

「地球をまわる衛星の軌道は楕円を描き、楕円の焦点に地球の中心がある」

楕円 (ellipse) という図形は、以下のように定義される (図 1.1 を参照)。固定点 F , G からそれぞれ距離 r , s のところに動点 P があって、距離の和が一定値 L を保つ、すなわち

$$r + s = L \quad (1.1)$$

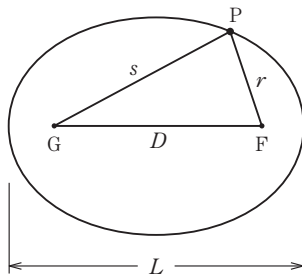


図 1.1 楕円の定義

2 1. ケプラーの法則

という関係を満たすとき、Pの軌跡は楕円を描く。固定点F、Gを焦点（focus, 複数なら foci）と呼ぶ。描き方はつぎのように表現してもよい。

長さ L の糸を用意して、両端をそれぞれピンで点F、Gに留める。鉛筆の先を糸に当てて、糸が張った状態を保ちながら鉛筆を動かすと、鉛筆の先は楕円を描く。

楕円の幾何学的な性質をここで確かめておきたい。楕円の直径のなかで最大のものを長軸という。長軸の長さは、上記の糸の長さ L に等しい。楕円のサイズを表すものとして、長軸の半分を考え、それを長半径（semi-major axis）と呼んで a で表す。すると式(1.1)は

$$r+s=2a=L \quad (1.2)$$

とも書けるが、この関係は後でしばしば用いられる。

もし焦点F、Gが同じところにあれば、軌跡は円になる。そしてFとGが離れるに従い、円は伸びて楕円になる。FとGが離れる間隔を D とすると、 D/L という比を離心率（eccentricity）と呼んで e で表す。離心率の値は0以上で1よりは小さく、もし0なら円であることを表す。長半径を一定に保ちながら、離心率 e を変えていくと、楕円は図1.2に示すように変わる。このように離心率は、楕円の形を定める役目をもつ。長半径 a と離心率 e を与えると楕円は一意に定まる。

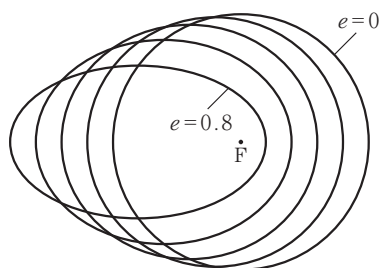


図1.2 楕円の形と離心率
(e を0から0.8まで順
に0.2おきに変える)

注意として、第1法則には明記していないが、楕円のサイズも形も、楕円が置かれる向きも、さらには楕円が横たわる平面の向きも、みな一定不変だということを経験法則は暗黙にうたっている。

楕円は、長半径のほかに短半径 (semi-minor axis) をもつので (図 1.3 を参照), 両者の関係を知りたい。それには図 1.1 において, P が短軸上に来た場合を考えると, 図 1.3 において直角三角形の斜辺は長半径 a に等しい。よって短半径 b は

$$b = a\sqrt{1-e^2} \quad (1.3)$$

として定まる。短半径 b が, 離心率 e に応じてどう変わるかを, 図 1.2 では例示したことになる。

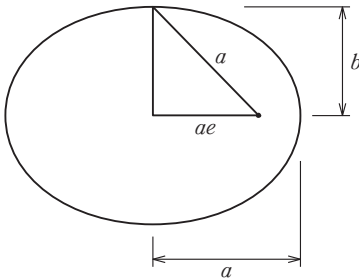


図 1.3 長半径 a と短半径 b

衛星が地球に最も近づく点を近地点 (perigee), 地球から最も遠くなる点を遠地点 (apogee) という。近地点と遠地点における動径 r_p , r_a は, 図 1.3 の関係により, それぞれ

$$r_p = a(1-e); r_a = a(1+e) \quad (1.4)$$

という長さをもつ。

もし離心率が 0 ではないが小さい, つまり F と G は重なっていないが間隔は小さいとき, 楕円の形はどうなるだろうか。図 1.4 において, F と G の中央にある点 C を考えると, 楕円のどこに P があっても, 長さ CP は $L/2$ にほとんど等しい。つまり楕円は, 半径 $L/2$ の円にほとんど重なる。この性質は, 後で近円軌道を調べるときに利用されるであろう。

一方, 離心率が 1 に近づいたときはどうなるか。図 1.2 から推測すれば, 楕円は限りなく細長くなって, 形がわからなくなってしまふ。そこで図 1.1 において, L と D は一定の差を保ちながら, L と D が両方とも限りなく大きくなっ

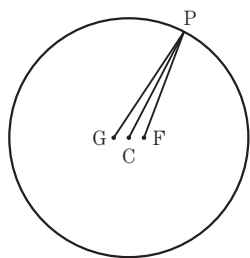


図 1.4 円に近い楕円

たとして。すると F の近くでは軌跡が図 1.5 のように現れるであろう。点 G は左手の遠方にあり、P から G に向かう直線は FG にほとんど平行になるから、 $r+s=L$ という関係を、 $t+s=L$ という関係に置き換えることが許される。ただし直線 AB は長軸に垂直で、F から $L-D$ という距離にあるとした。すると動点 P が従うべき条件は $r=t$ となるから、軌跡は放物線 (parabola) を描く。つまり F 付近で見ていると、離心率が 1 に近づくにつれて、楕円は放物線に近づく。こういうケースは太陽系において、非常に遠いところから太陽付近へ飛来する彗星に当てはまる。そのような彗星の軌道を太陽付近で観察すると、放物線とほとんど見分けがつかない。

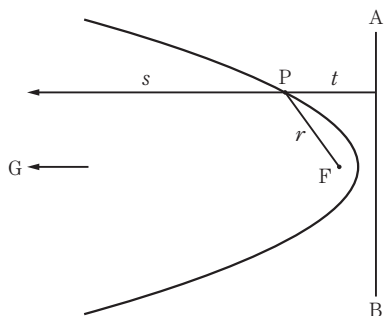


図 1.5 放物線に近い楕円

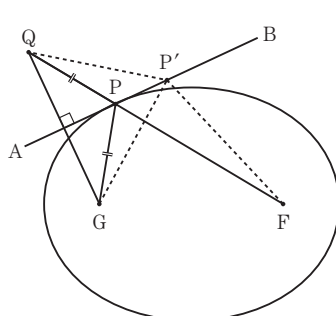


図 1.6 楕円の性質：焦点と光線の関係

さて楕円に関して、F と G を焦点と呼ぶのはなぜだろうか。図 1.6 において、楕円の曲線は鏡面として働くとすると、G から出発した光線は P で反射した後、必ず F を通る。つまり G から出発する光線はどれも F に集まる。焦

点という呼び名はこの性質に基づく。この性質は後で重要になるので、ここで確認しておきたい。直線 FP を延長して、長さ PG と同じだけ先のところに点 Q を置く。線分 QG を垂直に 2 等分する直線 AB を引くと、それは楕円の接線になることがつぎのように示される。

AB 上で P と異なる点 P' を考えると、長さ QP'F は、長さ QPF より大きい。よって長さ GP'F は長さ GPF より大きい。すると点 P' は関係式 (1.1) を満たさない。つまり点 P' は楕円上にない。AB 上の点のなかで、楕円上にあるのはただ P だけだから、AB は P で楕円に接する。点 P において、二つの角 $\angle GPA$ と $\angle FPB$ は等しい。ゆえに、光線 GP が P で反射すると光線 PF になる。

楕円には焦点が二つあるが、幾何学を考えるのなら二つに区別はない。しかし軌道を表す楕円においては、一つの焦点に地球や太陽などの中心天体があり、もう一つの焦点には何もない。本書では、中心天体があるほうの焦点を単に焦点と呼び、何もないほうの焦点を副焦点と呼んで区別することにしたい。

楕円の定義として、図 1.1 とは別の定義がある。それによれば、円錐と平面が交差してつくる切り口の形を楕円という。その定義をふまえて、楕円のことを円錐曲線 (conic section) と呼ぶことがある。切り口が楕円をなすことは、付録 A.1 に示した。

1.2 ケプラーの第2法則：Kepler's second law

「衛星の動径は同じ時間に同じ面積を塗りつぶす」

この法則は、衛星が軌道上を動く速度がどう変わるか、ということに関連している。図 1.7 において、ある時間のあいだ、例えば 5 分間のあいだに、衛星が A から B まで動いたとする。その後、別の 5 分間に衛星は C から D まで動いたとする。楕円の内部において動径 FA と FB が挟む面積を S_1 と置き、また FC と FD が挟む面積を S_2 と置く。すると第 2 法則によれば、 S_1 と S_2 は必ず等しいのであって、それは弧 AB と CD が軌道のどこにあるかによらない。上

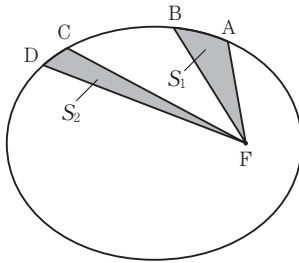


図 1.7 動径が塗りつぶす面積

記の時間を 5 分間のかわりに任意の時間間隔にとったとしても、やはり面積 S_1 と S_2 は等しい。

もしも動径が、伸び縮みできる細長い刷毛でできていて、インクを染みこませてあったなら、動径は FA から FB まで動くにつれて面積 S_1 を塗りつぶすであろう。面積を塗りつぶすとは、このことを意味している。

時間間隔を単位時間 dt にとって、 dt のあいだに塗りつぶす面積を dS としたとき、 dS/dt を面積速度 (areal velocity) という。第 2 法則はつぎのようにいい換えてもよい。「**面積速度は一定に保たれる**」

離心率が 0、つまり円軌道であれば、動径の長さは一定だから、衛星は軌道上を一定速度で進まなければならない。それに対して楕円軌道では、図 1.7 から了解されるように、衛星が地球に近づけば速度が増し、地球から遠ざかれば速度は減る。すると図 1.8 に描くように、速度は近地点において最大になり、遠地点において最小になる。近地点と遠地点における速度を v_p 、 v_a とすると、その比は式 (1.4) から

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{1+e}{1-e} \tag{1.5}$$

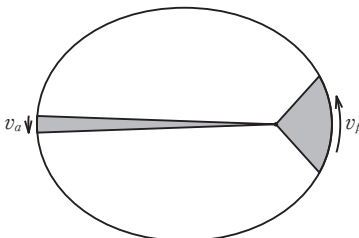


図 1.8 近地点と遠地点での速度関係

となる。速度の大小比は、離心率が1に近づけばいくらかでも大きくなる。

面積の比率を見ることによって、例えばつぎのような算定ができる。図1.9では、長楕円の軌道において、地球に近い一定の距離範囲（点線）の内側に衛星がある時間を求めようとしている。アミ掛け部分の面積を S_1 、楕円の全面積を S とすると、衛星が1周する時間に対して、範囲内にある時間は S_1/S という比率にある。もし軌道の長径が大きく、離心率が1に近ければ、比率は小さい。そういう例は、遠方から飛来する彗星に見られる。軌道を1周するのに数百年や数千年かかるような彗星でも、太陽のほうへ飛来したときには数年のうちに木星軌道の内側の範囲を走り抜ける、といったケースがありうる。「彗星のごとく現れる」、「彗星のように駆け抜ける」などの表現を日常の場でも聞くことがあるが、その表現は第2法則に支えられたものといえよう。

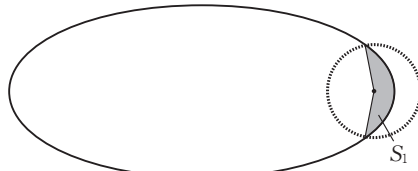


図1.9 長楕円軌道の特徴

1.3 ケプラーの第3法則：Kepler's third law

「周期の2乗は長半径の3乗に比例する」

周期 (period) とは、軌道上の一点を出発した衛星が、1周して同じ点に戻って来るまでに要する時間をいう。第1法則と第2法則は、一つの軌道に着目してその性質を述べていた。それに対して第3法則は、違うサイズをもつ複数の軌道を比べながら、軌道の周期がどう定まるかを述べている。比例するのなら比例係数があるはずだが、その係数は中心天体の質量によって定まるもので、具体的な値は2章で明らかになる。法則をいい換えると、「周期は長半径

索 引

<p>【あ】</p> <p>安 全 123, 140, 149, 150, 164, 196</p> <p>【い】</p> <p>移行軌道 59, 63 位相合わせ 142 移動距離 161 移動コース 149, 160</p> <p>【う】</p> <p>打ち出し角 125, 127 打ち出し初速度 127</p> <p>【え】</p> <p>衛 星 ——の寿命 196 ——の落下 76 衛星配置 80, 89 永年成長 186, 187 永年摂動 79, 80, 83, 85, 86, 90, 93 エンケの方法 209 遠日点 9 円錐曲線 5, 114 遠地点 3, 35, 58 遠地点速度 31</p> <p>【お】</p> <p>追いつく 143 大回り往復 106, 108, 172, 173</p>	<p>【か】</p> <p>海王星 99 回帰軌道 84 角運動量の保存 29 重ね合わせ 158, 163, 186, 187 ガスジェット 73, 195, 196 火 星 12, 27 カルテシアン軌道要素 40 慣性系 36, 37 慣性質量 28, 143 観測事実 13, 19</p> <p>【き】</p> <p>軌 道 ——のエネルギー 31, 33 ——の角運動量 29 ——の共鳴 104, 105 ——の中心点 152, 174, 192, 196 ——の半径 152 ——を乱す力 73, 98 軌道円の半径 152 軌道修正 190, 191, 192, 193, 194, 196 軌道推定 102 ——の誤差 103 軌道配置 80, 88 軌道面 29, 66 ——の配置 38 ——の向き 29, 36, 66, 67, 181, 195 軌道要素 39 ——の変換 49</p>	<p>球 殻 22, 23, 24 仰 角 53 共通重心 20, 21, 98 協定世界時 40 共 鳴 105, 106, 173 極軌道 83 曲率円 60 曲率半径 61 距 離 52 ——の変化率 52 近円軌道 3, 151, 165, 167 銀 河 25 ——の回転 25 近日点 9 近地点 3, 35, 59, 71 ——の引数 39 近地点速度 31 近地点通過の時刻 39</p> <p>【く】</p> <p>空気抵抗 73, 74 空気密度 74, 75 グリニジ恒星時 51, 54 グリニジ時角 51 グリニジ視恒星時 53, 54, 55 グリニジ平均恒星時 53, 54</p> <p>【け】</p> <p>系外惑星 10, 22 傾斜角 38 ケプラー 1 ——の軌道要素 39 ——の第1法則 1 ——の第2法則 5 ——の第3法則 7</p>
---	---	---

- の方程式 47
- 【こ】**
- 光学航法 121
- 交線 38, 39
- の赤経 39
- 国際宇宙ステーション 22
- コリオリの力 145, 148
- 【さ】**
- 歳差 41, 55
- 最終接近 144
- 最小エネルギー軌道 126, 134, 138
- 最小2乗法 102, 103
- 最大射程 129
- 最良な打ち出し角 129
- 散乱角 117
- 【し】**
- 時間合わせ 131, 132
- 視恒星時 54
- 視線速度 21, 22
- 自転 56, 63
- 自転角 51, 53
- 自転角速度 54
- ジャイロスコープ 67, 77
- 射場 68, 69, 139, 140, 150
- 射程 126
- 周期 7
- 自由帰還軌道 124
- 周期摂動 79, 86
- 秋分 9, 38
- 重力質量 29, 143
- 重力場 169, 173
- 準帰還軌道 85
- 春分 9, 38
- 春分点 43
- 春分点方向 38, 41
- 焦点 2
- 小天体 104, 105, 106, 107, 108, 109
- 章動 42, 54, 55
- 衝突パラメータ 119, 121
- 真の座標系 42, 54
- 【す】**
- 数値積分 73, 85, 86, 90, 93, 94, 100, 104, 107, 117, 172, 187
- 【せ】**
- 正三角形 108
- 静止移行軌道 64
- 静止軌道 62, 165
- 静止半径 192, 197
- 静止保持 197
- 成長率 176, 177, 179, 184, 185
- 赤緯 178
- 赤道半径 52
- 赤径 178
- 接触軌道 201
- 接触軌道長半径 201
- 接触軌道要素 201
- 接触長半径 202, 203
- 摂動 73
- 漸近線 113, 116, 117, 119
- 線形独立 102, 103
- 【そ】**
- 双曲線 111
- 増速比 61
- 相対運動 158, 162, 164
- 相対座標 156, 162, 163, 164, 197
- 相対静止 142
- 相対表示 155, 157, 163, 164
- 速度線接近 144, 163
- 【た】**
- 待機軌道 59, 63
- 待機点 142, 144, 146, 147, 148
- 太陽系 4, 21, 96, 120, 121
- 太陽光 83, 84, 173, 178
- 太陽光圧力 173
- 太陽同期軌道 84
- 太陽の位置 177, 178, 181
- 楕円 1
- 楕円体 52
- ダークマター 26
- 脱出 62, 116
- 単位質量 28, 96, 97, 98
- 弾道軌道 125
- 短半径 3
- 断面積 74, 178, 192
- 【ち】**
- 地球
- と月往復 123
- の形 51, 76, 89, 167, 168
- の自転 51, 63, 84
- 地球観測衛星 83, 90
- 地球局
- の位置 51, 52
- の緯度 51
- の径度 51
- の速度 52
- の高さ 51
- 地心慣性座標系 37
- 中心点 152, 193, 194
- の動き 177, 179, 180
- 潮汐 99
- 潮汐力 99
- 長半径 2
- 直交軌道要素 40
- 【つ】**
- 継ぎ合わせ 120, 122
- 釣り合い点 94, 108, 110
- 【て】**
- 天王星 99
- 【と】**
- 等価原理 29
- 等価断面積 179

動径接近	148, 163	平均恒星時	54	モルニヤ軌道	88
凍結軌道	94	平均座標系	42, 54		
到着コース	143, 146, 148	偏心円	151, 152	【ら】	
ドッキング	145	扁 平	52, 76, 77, 188	ラグランジュ点	110
ドブラー効果	53			ランデヴ	139, 160, 163
ドブラーシフト	21	【ほ】		【り】	
ドリフト	64, 157, 158, 159	方位角	53	離心率	2
【ね】		放物線	4, 116	【る】	
燃料の消耗	145, 148, 192, 196	補給船	139, 160	ルール	190, 196, 203
		保存則	36	【わ】	
【は】		ポテンシャル	24, 171, 172, 214, 215	惑星通過飛行	120
廃棄軌道	196	ホーマン移行	65, 191	割り当て	190, 191
万有引力定数	18	【ま】		【その他】	
万有引力の法則	18	満 月	8	2分の3乗則	8
【ひ】		【み】		DUT1	55
飛行時間	131, 132, 134, 137	見えない質量	26	Δ UT1	55
【ふ】		【め】		ΔV 節減	69, 70
副焦点	5	面積速度	6, 14, 17, 30, 135, 137	Δv 節減	195
——の動き	87, 93	【も】		J2000系	42, 55
【へ】		木 星	21, 104		
平均近点角	40, 46				

— 著者略歴 —

1972年 東京工業大学工学部機械物理工学科卒業
1975年 東京工業大学大学院修士課程修了（精密機械システム専攻）
1994年 博士（工学）（東京大学）
1972～ 宇宙開発事業団勤務
1973年
1975～ 郵政省電波研究所（現 情報通信研究機構）勤務， 上席研究員，
2010年 鹿島宇宙技術センター長を歴任
2010～ 防衛大学校航空宇宙工学科教授
2015年

人工衛星の軌道 概論

Artificial Satellite Orbits

© Seichiro Kawase 2015

2015年5月15日 初版第1刷発行



検印省略

著者 かわ せ せい いち ろう
川 瀬 成 一 郎
発行者 株式会社 コロナ社
代表者 牛来真也
印刷所 新日本印刷株式会社

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844・電話 (03) 3941-3131 (代)

ホームページ <http://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-04640-3 (新井) (製本：愛千製本所)

Printed in Japan



本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられております。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めておりません。

落丁・乱丁本はお取替えいたします