

# 複素流体力学ノート

—— 理想流体の基礎から粘性流への展開 ——

工学博士 新井 紀夫 著

コロナ社

# ま え が き

本書では、理想流体の概念と粘性流におけるせん断流（渦度の集まり）とを複素数（関数論）を用いて結び付けることにより、流体力学の基本概念を理解することを目指している。粘性流を解くには、現実的にはナビエ・ストークス方程式を数値的に解くことになるが、粘性流、せん断流とはなんぞやという物理的理解がなくても、ある程度解けてしまう。しかし、物理的理解が欠けた状態で数値解を眺めても、間違いのどつぼにはまるだけである。

そこで、本書では複素速度ポテンシャルの考え方のみで粘性流を理解していくことを目指す。そうすることによって、物理的理解を伴いながら粘性流を捉えていくことができるようになるからである。その意味で、これは粘性流に対する究極のモデル化ということができる。

本書の内容は、流体力学の初学者が最初に習う部分であるので、機械系、航空系の学生たちに読んでもらいたい（特に航空系）。工学部における関数論に関する講義は、学生にとって目的が不明確であったり、ただ問題を解くだけになっていたりして、概念の理解すらあいまいなまま終わっていることが多い。しかし、関数論の概念は、見方によっては流体力学と密接な関係にあるので、物理的概念とともに学ぶことにより、面白さの本質を知ることができるのである。

また、本書の内容は関数論を基盤としているので、理学部数学科の基礎応用科目の一端も担えるであろう。日本における理学部数学科は、純粋数学に重心があり、応用数学は軽んじられているとの懸念を持っており、本書がそれを少しでも払拭できればと期待している。

本書の構成はつぎのとおりである。1章では、本書で扱う関数論の基礎を、復習を交えつつ明確に述べている。特に複素数の微分可能性、積分などに関しては詳細に述べている。2～5章では、流体力学の基礎を復習し、複素速度ポテン

シャルの理解を深める。6章では、典型的な円周りの流れに焦点を絞って詳細に解説している。7章からは、等角写像を説明し、写像による流れ場の解析の典型例として Joukowski 変換を、また、物体に働く流体力 (Blasius の定理) を詳細に解説している。10, 11 章では、本書の大きな目的の一つである「複素速度ポテンシャルによる粘性流の解析」の基礎となる鏡像の方法を説明し、粘性流の解析につなげている。12 章では、複素速度ポテンシャルによる仮想質量の求め方を説明し、本書の目的とする「複素速度ポテンシャルのみによる流体现象の解明」に向けた拡張性を説明している。

2012 年 8 月吉日

新井紀夫

# 目 次

## 1. 複素数の基礎

1.1 複素数	1
1.2 複素数の幾何学的意味	4
1.2.1 実数倍	4
1.2.2 和と差	5
1.2.3 積と商	5
1.3 複素数による直線の方程式の表現	6
1.4 複素数による円の方程式の表現	7
1.4.1 円に関する鏡像	7
1.4.2 直線の円に関する鏡像	9
1.4.3 円の円に関する鏡像	10
1.5 複素変数の関数	11
1.5.1 複素関数の微分可能性	11
1.5.2 複素数の指数関数	14
1.5.3 複素数の三角関数	15
1.5.4 複素数の $n$ 乗根	15
1.5.5 複素数の対数関数	17
1.6 複素関数の積分	18
1.7 コーシーの積分定理	20
1.8 コーシーの積分公式	21
1.9 留数定理	22

## 2. 速度ポテンシャルと流れ関数

2.1 速度ポテンシャル	26
2.2 流れ関数	27
2.3 渦度	28

## 3. 複素速度ポテンシャル

3.1 複素速度	32
3.2 流線と等ポテンシャル線	34

## 4. 複素速度ポテンシャルを用いて表す流れ

4.1 平行な流れ	36
4.2 凹状角部 ( $90^\circ$ ) を回る流れ	37
4.3 凹状もしくは凸状角部 (任意の角度) を回る流れ	38
4.4 湧き出し, 吸い込み	40
4.5 回転流, 渦	42
4.6 二重湧き出し	44

## 5. 流れの合成

5.1 強さの等しい湧き出しと吸い込み	49
5.2 一様流と湧き出し	52
5.3 一様流と湧き出し, 吸い込み	55
5.4 一様流と二重湧き出し	56
5.5 流線の合成	58

## 6. 種々の円柱周りの流れ

- 6.1 円柱周りに循環がある流れ ..... 60
- 6.2 静止した流体中を等速運動する円柱 ..... 64

## 7. 等角写像

- 7.1 等角写像 ..... 67
- 7.2 流れ場における等角写像 ..... 71

## 8. Joukowski 翼

- 8.1 Joukowski変換 ..... 75
- 8.2 楕円柱周りの流れ ..... 77
- 8.3 楕円柱周りに循環がある流れ ..... 80
- 8.4 Joukowski 翼 ..... 82

## 9. Blasiusの定理

- 9.1 線素  $ds$  に働く力とモーメント ..... 84
- 9.2 物体全体に働く力とモーメント ..... 85

## 10. 鏡像の方法

- 10.1 壁が平板の場合 ..... 89
  - 10.1.1 湧き出しの鏡像 ..... 89
  - 10.1.2 渦糸の鏡像 ..... 90

10.1.3	二重湧き出しの鏡像	91
10.2	壁が円の場合 (Milne-Thomson の円定理)	92
10.2.1	一様流の鏡像	93
10.2.2	湧き出しの鏡像	93
10.2.3	渦糸の鏡像	100
10.2.4	二重湧き出しの鏡像	101
10.2.5	双子渦の鏡像	103
10.2.6	強さの異なる二つの渦糸の鏡像	106

## 11. 非粘性渦 (渦糸) による粘性流のモデル化—渦糸近似法

11.1	渦点による速度成層の表現	110
11.2	渦点による物体の表現	111
11.3	渦点による粘性流の表現	112

## 12. 仮 想 質 量

12.1	仮想質量の計算	116
12.2	離散渦法の応用	117

## 付 録

A.1	変数変換	121
A.2	直交する流線	123
A.3	コーシーの積分定理	126

引用・参考文献	129
---------	-----

索 引	131
-----	-----

# 1

## 複素数の基礎

すでにいろいろなところで学んでいるはずであるが、複素数の領域において、特徴的な虚数単位  $i$  が出てくる。これは

$$i^2 = -1 \quad (1.1)$$

という性質を有している。複素数はこれを用いて表現され、数学による記述の世界を一段高めるのにたいへん有効な役目を果たしている。

ここでは、その基本的性質として是非とも知っておいてほしい関係について述べる。それを理解することにより、本書で目的としている「複素流体力学」を、より有効に習得することができる。基本的には、複素流体力学は理想流体に関するものであるが、本書では粘性流体の表現にも十二分に役立つ流れのモデル化を導いていく。

### 1.1 複素数

いま、実数定数  $a, b$  と実変数  $x, y$  に対して、つぎのような式を考える。

$$c = a + ib \quad (1.2)$$

$$z = x + iy \quad (1.3)$$

この場合、 $c$  を複素数の定数、 $z$  を複素数の変数という。これらを図示する際には、実数を  $x$  軸上に、虚数を  $y$  軸上にとり、複素数  $z$  を  $xy$  平面上の点  $(x, y)$  として表す。この  $xy$  平面を**複素平面**と呼ぶ（もしくは  $z$  平面）。また、 $x$  軸を



実数軸,  $y$  軸を虚数軸と呼ぶ。

便宜上, 直角座標  $(x, y)$  だけでなく, 極座標  $(r, \theta)$  もよく用いられる (図 1.1)。その関係は次式で与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{array} \right\} \quad (1.4)$$

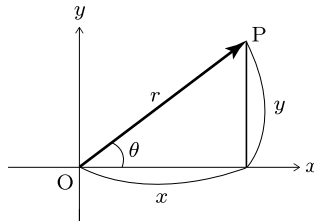


図 1.1  $(x, y)$  座標と  $(r, \theta)$  座標

以上の表現を用いて  $xy$  平面を複素平面と考えると, 複素数  $z = x + iy$  は平面上の点を表す複素座標である。ここで複素数  $z$  の絶対値  $|z|$  を  $\sqrt{x^2 + y^2}$  と定義すると, 式 (1.4) の関係式より

$$r = |z| \quad (1.5)$$

であり,  $\theta$  は複素数  $z$  の偏角と呼ばれ

$$\theta = \arg z \quad (1.6)$$

のように表す。複素数  $z$  は絶対値  $r$  と偏角  $\theta$  を用いて

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (1.7)$$

と表すことができる。

つぎに, 複素数の積について考える。複素数  $z_\alpha = r_\alpha(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  と  $z_\beta = r_\beta(\cos \beta + i \sin \beta)$  の積は

$$z_\alpha z_\beta = r_\alpha(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot r_\beta(\cos \beta + i \sin \beta)$$

$$\begin{aligned}
&= r_\alpha r_\beta (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha)) \\
&= r_\alpha r_\beta (\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))
\end{aligned} \tag{1.8}$$

となる。つまり、二つの複素数の積により、それぞれの絶対値の積が新たな絶対値、それぞれの偏角の和が新たな偏角となるような、新たな複素数が得られる。

このことを見やすくするために

$$e^{i\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \cos \theta + i \sin \theta \tag{1.9}$$

で定義される関数  $e^{i\theta}$  を導入する。この関数がつぎのような性質を持つことは、三角関数の加法定理を使用することにより、簡単に確かめられる。

$$e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} \tag{1.10}$$

また、その微分に関しても、関数  $e^{i\theta}$  からつぎの式が成り立つことがわかる。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta} e^{i\theta} &= \frac{d}{d\theta} (\cos \theta + i \sin \theta) \\
&= -\sin \theta + i \cos \theta \\
&= i e^{i\theta}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

この関数  $e^{i\theta}$  を使用することにより、式 (1.7) の形で表された複素数  $z$  は

$$z = r e^{i\theta} \tag{1.12}$$

と書け、これを複素数  $z$  の**極形式**という。複素数をこの極形式で表すと、複素数の積は

$$\begin{aligned}
z_\alpha z_\beta &= r_\alpha e^{i\alpha} \cdot r_\beta e^{i\beta} \\
&= r_\alpha r_\beta e^{i(\alpha + \beta)}
\end{aligned} \tag{1.13}$$

と、たいへん簡潔に表すことができる。なお、先ほど式 (1.9) で定義した

$$e^{i\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \cos \theta + i \sin \theta \tag{1.14}$$

をオイラー (Euler) の公式と呼ぶ。

## 4 1. 複素数の基礎

また、オイラーの公式から、つぎの式が導かれる。

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (1.15)$$

これがいわゆるド・モアブル (De Moivre) の公式である。

ここで、 $e^{i\theta}$  の複素共役  $\overline{e^{i\theta}}$  を考えよう。式 (1.14) の定義により、その複素共役をとると

$$\begin{aligned} \overline{e^{i\theta}} &= \overline{\cos \theta + i \sin \theta} \\ &= \cos \theta - i \sin \theta \\ &= \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) \\ &= e^{i(-\theta)} \end{aligned} \quad (1.16)$$

となる。ここで、式 (1.14) の定義と同様に

$$e^{-i\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \cos \theta - i \sin \theta \quad (1.17)$$

を導入することにより、 $e^{i\theta}$  の複素共役として

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad (1.18)$$

の結果を得ることができる。

## 1.2 複素数の幾何学的意味

複素数  $z = x + iy$  を表す複素平面において、その加減乗除の四則演算を考えよう。複素数  $z$  を表す点  $z$  を考えたとき、 $-z$  は原点に対して対称な点であり、原点に対する  $z$  の鏡像である。また、 $\bar{z}$  を  $x$  軸 (実数軸) に対して対称な点と定義すると、 $\bar{z}$  は実数軸に対する  $z$  の鏡像である。

### 1.2.1 実数倍

$a$  を実数とし、 $z$  に対して  $az$  を考える。極形式  $z = re^{i\theta}$  で考えると、 $az = are^{i\theta}$  となるので、 $a > 0$  のときは偏角  $\theta$  は同じままで、絶対値だけが  $a$  倍される。

$a < 0$  のときは  $az = -|a|z$  であるので、 $a > 0$  のときとは原点に対して対称、すなわち原点に関して鏡像となる（あるいは絶対値は  $a > 0$  のときと同じで、偏角が  $\pi$  だけ増えたともいえる）。

### 1.2.2 和 と 差

二つの複素数  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  の和と差を考えると

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2) \tag{1.19}$$

となり、複素平面上において、いわゆるベクトルの和と差と同じ図が描ける。

### 1.2.3 積 と 商

二つの複素数  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ,  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$  の積と商を考える。積は

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \tag{1.20}$$

となる。すなわち、 $z_1$  に  $z_2$  を掛けるということは、 $z_1$  側から見れば、その大きさ（絶対値）を  $r_2$  倍し、偏角  $\theta_1$  を  $\theta_2$  だけ増すことになる。 $z_2$  側から見た場合も同様の議論ができる。これらの関係を図示すると図 1.2 のようになる。影を施した  $\triangle O-1-z_1$  と  $\triangle O-z_2-z_1 z_2$  は相似形になっている（ $\triangle O-z_2-z_1 z_2$  は  $\triangle O-1-z_1$  の  $r_2$  倍になっている）。

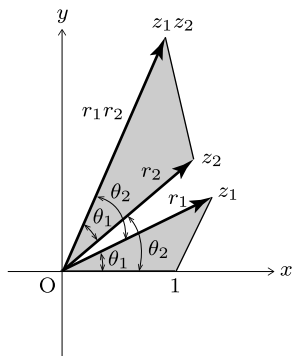


図 1.2 複素数の積

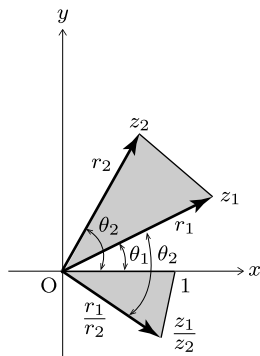


図 1.3 複素数の商

商は

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (1.21)$$

となる。すなわち、 $z_1$  を  $z_2$  で割るということは、 $z_1$  側から見れば、その大きさ（絶対値） $r_1$  を  $r_2$  で割り、偏角  $\theta_1$  から  $\theta_2$  を減ずることになる。 $z_2$  側から見た場合も同様の議論ができる。これらの関係を図示すると図 1.3 のようになり、影を施した  $\triangle O-z_1-z_2$  と  $\triangle O-1-z_1/z_2$  とが相似形になっている（ $\triangle O-1-z_1/z_2$  は  $\triangle O-z_1-z_2$  の  $1/r_2$  倍になっている）。

### 1.3 複素数による直線の方程式の表現

複素平面上の 2 点  $z_1, z_2$  を通る直線の方程式は、これら 2 点を結ぶ直線上のある点を  $z$  とすると、 $k$  を任意の実数として、 $z - z_1 = k(z_2 - z_1)$  と表される。 $z$  について整理すれば

$$z = (1 - k)z_1 + kz_2 \quad (1.22)$$

と表される。また、式 (1.22) とその共役の式

$$\bar{z} = (1 - k)\bar{z}_1 + k\bar{z}_2 \quad (1.23)$$

から  $k$  について整理すると、つぎのように表せる。

$$k = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} \quad (1.24)$$

さらに、この式を変形すると、つぎの式が得られる。

$$(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z - z_1\bar{z}_2 = (z_2 - z_1)\bar{z} - \bar{z}_1z_2$$

ここで、 $\bar{z}_2 - \bar{z}_1 = -ic$ 、 $z_2 - z_1 = ic$ 、 $z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 = iA$  と置くと

$$cz + \bar{c}\bar{z} + A = 0 \quad (c: \text{複素数}, A, a, b: \text{実数}) \quad (1.25)$$

# 索引

	<b>【あ】</b>		<b>【さ】</b>			
鞍点	125		三角関数	15	等ポテンシャル線	34
	<b>【う】</b>				ド・モアブルの公式	4
渦糸近似法	110		<b>【し】</b>		鈍頭物体周りの流れ	54
渦点	44		指数関数	14	<b>【な】</b>	
渦度	26, 29		写像	67	流れ	
渦なし流れ	26		循環	29	円柱周りの —	57, 60
	<b>【え】</b>		循環流	44	正方形柱周りの —	114
円柱周りの流れ	57, 60		<b>【す】</b>		楕円柱周りの —	78
円の方程式	7		吸い込み	41	鈍頭物体周りの —	54
	<b>【お】</b>		ストークスの定理	29	任意形状物体周りの —	75
オイラーの公式	3		<b>【せ】</b>		二つの正方形柱周りの —	115
	<b>【か】</b>		正則	11	平板周りの —	78, 82
回転	30		正方形柱周りの流れ	114	流れ関数	28
回転流	42		積分路	18	<b>【に】</b>	
仮想質量	116		線積分	18	二重湧き出し	45
	<b>【き】</b>		<b>【そ】</b>		任意形状物体周りの流れ	75
鏡像	7, 88		速度成層	110	<b>【ね】</b>	
共役関数	33		速度ポテンシャル	26	粘性流	110
	<b>【こ】</b>		<b>【た】</b>		<b>【は】</b>	
交互渦	109		対数関数	17	発散	30
コーシー			楕円柱周りの流れ	78	<b>【ひ】</b>	
—の積分公式	22		ダランベールのパラドックス	58, 64	非回転運動	29
—の積分定理	20		<b>【ち】</b>		微分係数	11
—・リーマンの			直線の方程式	7	<b>【ふ】</b>	
微分方程式	12, 32, 123		<b>【と】</b>		付加質量	116
孤立特異点	22		等角写像	68	複素関数の微分可能性	11
					複素速度	33

複素速度ポテンシャル	32
複素平面	1
双子渦	105
二つの正方形柱周りの流れ	115
<b>【へ】</b>	
平行流	36
平板周りの流れ	78, 82
ベルヌーイの定理	54
変数変換	121
<b>【ほ】</b>	
ポテンシャル流れ	26

<b>【ま】</b>	
マグナス効果	64
<b>【む】</b>	
無限多価関数	17
<b>【や】</b>	
ヤコビアン	121
<b>【よ】</b>	
淀み点	54
淀み点圧力	54
<b>【ら】</b>	
ランキンの楕円	55

<b>【り】</b>	
離散渦法	117
リーマン面	17
留数	24
留数定理	22, 24, 87
流線	28, 34
<b>【ろ】</b>	
ローラン展開	22
<b>【わ】</b>	
湧き出し	41

<b>【B】</b>	
Blasius の定理	84
<b>【J】</b>	
Jacobian	121
Joukowski の仮説	82

Joukowski 変換	75
Joukowski 翼	83
<b>【K】</b>	
Kelvin の渦保存則	112
Kutta の条件	82

<b>【M】</b>	
Milne-Thomson の円定理	93
<b>【N】</b>	
$n$ 乗根	15

— 著者略歴 —

- 1976年 東京大学大学院工学系研究科博士課程修了(航空宇宙工学専攻)  
工学博士  
1977年 NASA(アメリカ航空宇宙局) Ames Research Center 客員研究員  
1979年 東京農工大学助手  
以後、講師、助教授を経て教授  
現在に至る

複素流体力学ノート

理想流体の基礎から粘性流への展開

Fluid Dynamics by Complex Velocity Potential

—From Ideal to Viscous Flows—

© Norio Arai 2012

2012年10月26日 初版第1刷発行

★

検印省略

著者 新井 紀夫  
発行者 株式会社 コロナ社  
代表者 牛来真也  
印刷所 三美印刷株式会社

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)

ホームページ <http://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-04622-9 (柏原) (製本:愛千製本所) G

Printed in Japan



本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めておりません。

落丁・乱丁本はお取替えいたします