

機械の基礎力学

工学博士 安田 仁彦 著

コロナ社

まえがき

機械工学における「力学」の意味は、機械に生じる力学の諸問題を力学の法則に基づいて検討し、解決策を見出す基礎を提供してくれることである。機械の運動を正確・確実・安全・快適なものとするため、力学が果たす役割は大きい。本書は、機械系工学の分野で学ぶ学生、あるいはこの分野で仕事をする若い技術者を対象に、力学の基礎を解説したものである。

本書の執筆にあたって著者は二つの目標を掲げた。一つは、とっつきにくい力学上の概念をできる限り日常の経験と結びつけ、直感的に理解されやすい形で示したいということである。もう一つは、数学に惑わされないで力学の道筋を示し、一方で、実際問題に力学を応用する際に必要とされる、数学的な扱いに慣れていただくようにしたいということである。

第二の目標とした、数学に惑わされないで力学の道筋を示すことは、著者にとって難しい、しかしやりがいのある課題であった。この課題の解決のため、本書では、本文と密接に結びついた形で補章「数学入門」を用意した。本文だけで独立して読んでいただけるが、道筋を見失わないという目標のため、本文では、数学的な説明を最小限にとどめた。このため、本文の指示を参考にして、必要に応じて「数学入門」を読んでいただければ、応用に際して必要な数学的な扱いにも慣れていただけるものと確信している。

これまで著者は何冊かの著書を出版し、幸いにも好評をいただいた。本書で機械の力学を解説するに当たっても、著者のこれまでの執筆の方針を踏襲し、多数の例題を配しながら、易から難へゆっくり話を進めたつもりである。

本書は、著者が名古屋大学や愛知工業大学で行ってきた講義のノートを整理してでき上がったものである。講義に際して多くの受講生からいただいた質問やコメントは、本書を仕上げるにきわめて有用であった。

本書の草稿に対して多くの同僚から貴重なコメントをいただき、本書を改善するのに役立たせていただいた。お名前は申し上げないが、感謝申し上げます。

本書を教科書として用いる場合、教員の立場からつぎのような利用法が考えられる。本文は12章からなる。各章を1回分の講義にあて、受講生のこれまでの履修状況に応じて、「数学入門」の数章を付け加えて15週の講義とする。講義をゆっくり進めたい場合は、8, 9章を省略する。各章に配した問題のうちはじめの3問（数学入門では2問）は基本問題として比較的詳細な解答を付したので、演習はこれを中心に行う。なおこれ以外の問題は答のみを本書に記載し、解説はコロナ社のホームページを参照いただく形とした。

機械の力学の基礎を学び、正確・確実・安全・快適な機械の開発・設計の際に本書が少しでも役立つならば、著者のこの上ない喜びである。

2009年8月

安田 仁彦

目 次

1. 緒 論

1.1 機械工学と力学	1
1.2 運動の法則	2
1.2.1 第1法則の意味	3
1.2.2 第2法則の意味	4
1.2.3 第3法則の意味	7
1.3 ベクトル	8
演習問題	10

2. 力と力のモーメント

2.1 力	11
2.1.1 力	11
2.1.2 力に関する平行四辺形の法則	12
2.1.3 合力	13
2.2 力のモーメント	16
2.2.1 力のモーメント	16
2.2.2 モーメントベクトル	19
2.2.3 モーメントの成分表示	21
2.2.4 合モーメント	23
2.3 偶力のモーメント	24
2.3.1 偶力のモーメント	24
2.3.2 偶力の合モーメント	27
2.4 力の置き換え	27
演習問題	29

3. 重 心

3.1 重心	31
3.2 質点系の重心	34
3.2.1 質点系の重心の式	34
3.2.2 質点系の重心の性質	35
3.3 連続体の重心	36
演習問題	39

4. つり合い

4.1 つり合い	40
4.1.1 つり合いの条件	40
4.1.2 つり合いの問題の解析	42
4.2 接触点と支持点の力	45
4.2.1 接触点の力	45
4.2.2 支持点の力	46
4.3 摩擦力	48
演習問題	51

5. 点の速度と加速度

5.1 点の位置	52
5.2 点の速度	53
5.3 点の加速度	57
演習問題	61

6. 質点の運動—既知の力が働く場合—

6.1 運動の決定	63
6.1.1 運動方程式	63
6.1.2 運動の決定	64
6.2 重力が働く質点の運動	65
6.2.1 重力が働く質点の上下運動	66
6.2.2 重力が働く質点の放物運動	68
6.3 既知の力が働く質点の運動	70
演習問題	73

7. 質点の運動—運動に依存する力が働く場合—

7.1 運動の決定	74
7.2 減衰力が働く質点の運動	76
7.2.1 減衰力	76
7.2.2 粘性減衰が働く質点の運動	77
7.3 復元力が働く質点の運動	80
7.3.1 復元力	80
7.3.2 質点の自由振動	81
7.3.3 粘性減衰が働く質点の自由振動	85
7.3.4 質点の強制振動	87
演習問題	90

8. 運動量と角運動量

8.1 運動量と力積	91
------------	----

8.1.1 運動量	91
8.1.2 運動量の式	92
8.1.3 力積とその応用	93
8.2 角運動量と角力積	95
8.2.1 角運動量	95
8.2.2 角運動量の式	96
8.2.3 角力積とその応用	100
演習問題	100

9. 仕事とエネルギー

9.1 仕事と運動エネルギー	102
9.1.1 仕事	102
9.1.2 運動エネルギー	107
9.2 エネルギー原理	108
9.3 力学的エネルギー保存の法則	110
9.3.1 保存力	110
9.3.2 ポテンシャルエネルギー	112
9.3.3 ポテンシャルエネルギーから力を導く方法	114
9.3.4 力学的エネルギー保存の法則	115
演習問題	117

10. 質点系の運動

10.1 質点系の運動	118
10.2 重心の運動	120
10.3 全運動量の式	122
10.3.1 全運動量の式	122
10.3.2 全運動量保存の法則	123
10.4 衝突する質点系の運動	125
10.5 全角運動量の式	128
10.5.1 固定点まわりの全角運動量の式	128
10.5.2 重心まわりの全角運動量の式	131
演習問題	133

11. 慣性モーメント

11.1 慣性モーメント	134
11.1.1 質点の慣性モーメント	134
11.1.2 質点系と連続体の慣性モーメント	137
11.2 慣性モーメントに関する定理	138
11.3 各種形状の物体の慣性モーメント	140
演習問題	145

12. 剛体の運動

12.1 剛体の運動方程式	146
12.1.1 剛体の自由度	146
12.1.2 運動方程式	147
12.2 固定軸を持つ剛体	149
12.3 平面運動する剛体	153
演習問題	157

補章 数学入門

A1 ベクトル入門	159
A1.1 ベクトル	159
A1.2 ベクトルの合成と分解	160
A1.3 ベクトルの成分表示	162
A1.4 ベクトルの積	164
演習問題	167
A2 関数入門	169
A2.1 関数	169
A2.2 関数の級数展開	175
A2.3 オイラーの公式	176
演習問題	178
A3 微分入門	179
A3.1 変化率と微分係数	179
A3.2 導関数	181
A3.3 導関数の公式	185
A3.4 導関数の応用	186
演習問題	187
A4 積分入門	188
A4.1 不定積分	188
A4.2 定積分	191
演習問題	193
A5 微分方程式入門	195
A5.1 微分方程式	195
A5.2 変数分離形の微分方程式	196
A5.3 定数係数の線形微分方程式	198
演習問題	200
参考文献	201
演習問題解答	202
索引	214

1

緒 論

この章では、はじめに機械工学における「力学」の意味を考える。つぎに力学の基本となるニュートンの運動の法則を述べる。最後にベクトルについて、当面必要となる基礎事項を述べる。

1.1 機械工学と力学

機械工学における**力学** (mechanics) の意味は、機械に生じる力学の諸問題を力学の法則に基づいて検討し、解決策を見出す基礎を提供してくれることである。自動車、ロボット、航空機など、各種機械の運動を正確、确实、安全、快適に実現するために、機械の力学の担う役割は大きい (図 1.1)。

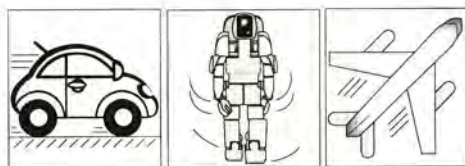


図 1.1 各種機械

力学は静力学と動力学とに大別される。**静力学** (statics) はつり合い状態の物体の力学、**動力学** (dynamics) は運動状態の物体の力学である。

力学の起源はギリシア時代にさかのぼる。この時代、建築・土木の分野において斜面やてこなどが利用され、物体のつり合いが関心を引いた。この頃から静力学が徐々に形成された。

動力学は静力学よりはるかに遅れて発達した。16世紀頃から物体の運動について関心と呼ぶようになった。17世紀になって実験や観測の手段が発達し、徐々に動力学が形成された。この頃の研究者として、コペルニクス、ガリレイ、ケプラーなどが挙げられる。コペルニクス（1473～1543）は、天体運行を支配する数学が簡潔でしかも合理的であることから地動説を唱えた。ガリレイ（1564～1642）は、望遠鏡を用いて地球と他の惑星との類似性を直接観測し、また物体の運動を実験的に調べて落下の法則や慣性の法則を見出した。ケプラー（1571～1630）は、惑星運動が太陽を焦点とする楕円軌道であることを発見した。これらの成果の上に、17世紀後半ニュートン（1642～1727）が、著書「プリンキピア」で力学の体系を確立し、18世紀後半ラグランジュ（1736～1813）が、著書「解析力学」で解析力学の基礎を確立した。

力学と工学は力学の誕生のときから結ばれている。機械工学への応用でいえば、16世紀、力学は生産技術の発達に大きく貢献した。18世紀、力学は、大型化・高速化された蒸気機関の運動の安定化のために大きな役割を果たした。このときの安定化の技術から**制御工学**（control engineering）が誕生し、現在の多くの機械の必須技術となっている。回転機械の高速化とともに**ロータダイナミクス**（rotor dynamics）が発展し、今日、安定したタービンやモータを生み出している。また、部品の増加による機械の複雑化に伴って**マルチボディダイナミクス**（multibody dynamics）が発展し、ロボット、航空機、車両などの分野で重要な役割を果たしている。力学は、技術の進歩に合わせ、新しい分野を切り開きながら発展を続けている。

本書では、機械工学への応用を念頭において力学の基本的な問題を扱う。これは最新の機械の開発設計の基礎であり、また上述のような新しい力学分野を学ぶ基礎でもある。

1.2 運動の法則

物体の運動はニュートンの**運動の法則**（Newton's laws of motion）、略して

運動の法則 (laws of motion) に従う。機械工学における力学の問題もこの法則に基づいて解決される。この法則はつぎの三つからなる。

第1法則 (慣性の法則)：外から力を受けない物体は、現在の運動状態を変えないで、そのまま静止あるいは等速直線運動を続ける。

第2法則 (運動の法則)：物体に力が作用するとき、物体は加速される。加速度の大きさは、力の大きさに比例し、物体の質量に反比例する。加速度の方向は、力の方向と一致する。

第3法則 (作用反作用の法則)：二つの物体がたがいに力を及ぼすとき、それぞれの力の大きさは等しく、方向は反対である。

この法則の意味を、身近な例に基づいて納得しながら理解し、次章以下の議論の基礎としよう。

1.2.1 第1法則の意味

第1法則は、物体が力を受けなければ運動状態を変えないと述べている。したがってこの法則は、経験的に当り前のことを述べているにすぎないと思える。しかしこの法則はつぎのように理解するのが正しい。

小さなアリが走っている列車に紛れ込んだとしよう。窓は閉められ、外は見えないとする。アリにとって列車の中の空間が全世界である。この列車の床の上に空き缶が置かれていたとする。この空き缶はアリにとって簡単には動かすことができない大きな物体である。列車が一定速度で走っている間空き缶は静止しているが、列車が止まろうとすると転がり始める。列車の外から見れば、列車が止まろうとするとき空き缶が転がるのは不思議ではない。しかしアリにとって、力が加えられないのに大きな物体が突然動き出すのは驚きである。このように列車の中に限定して物体の運動を見てみると、力を受けないのに物体が動くことがある。したがって列車の中では第1法則は成り立たない。これに対し地上に固定された空間にある物体は、力を加えない限り運動状態を変えない。したがってこの空間では第1法則が成り立つ。第1法則が成り立つ空間を**慣性系** (inertial system)、成り立たない空間を**非慣性系** (noninertial

system) という。列車に固定された空間は非慣性系であり、地上に固定された空間は慣性系である[†]。第1法則は、物体の運動を慣性系で考えることにするという、力学の前提の宣言である。

1.2.2 第2法則の意味

第2法則の意味を理解するため、この法則に含まれる力、質量、加速度などの意味を確認することから議論をはじめよう。

■ **力** これまで意識しないで「力」という言葉を用いてきた。ここであらためて力の意味を考える。滑らかな水平な床の上に静止して置かれている物体を横に押すと物体は動き出す。床の上に置かれた柔らかい物体を上から押すと物体は形を変える。この場合の「押す」という動作のように、物体の運動状態や形を変える働きをするものを**力 (force)** という。

■ **質 量** つぎに質量の意味を考える。**質量 (mass)** は、物体の重さや動きにくさに関する物体に固有の物理量である。まず重さに関するということの意味を考えよう。例として質量1 kgの物体があったとする。この物体の重さを地球上で重量計を用いて計ると目盛りが1 kgとなる。重さは、地球から受ける力すなわち重力で、目盛りは重力の大きさを示している。この物体を、例えば月に持って行くと、月から受ける重力が変わるので、重量計の目盛りは変わる。しかし質量を表す1 kgは材質や寸法などから決まる物体に固有の値で、月にあっても変わらない。質量はこのような意味の物理量である。地球上で質量と重さの数値が同じになるため混同されやすいが、いま述べたように、両者の意味は異なる。

つぎに質量が動きにくさに関することの意味を考えよう。質量の異なる二つの物体を水平で滑らかな床の上に置いて動かそうとする場合を考える。経験によれば、質量の大きいものほど動かしにくい。質量はこの動きにくさを表す。重さから定められる質量と動きにくさから定められる質量は同じかという

[†] 自転などの影響により、厳密には、地上に固定された空間は慣性系でないが、ほとんどの場合慣性系と考えてよい。

疑問がわくが、詳細な実験で両者は一致すると認められている。

質量の具体的な数値は、パリ近郊にある国際度量衡局に保管されている国際キログラム原器の質量を、SI 単位の 1 kg としている。この原器は、白金 90 %、イリジウム 10 % の合金で作られた、直径、高さとも 39 mm の円柱形のものである。

【例題 1.1】 国際キログラム原器と同じ材質の合金が得られたとして、この合金を用いて、直径と高さがいずれも原器の 2 倍の円柱形を作ったとする。この円柱の質量はいくらか。

解答 国際キログラム原器の直径を d 、高さを h と表すと、国際キログラム原器の体積 V_0 は、円柱の体積の公式を用いて

$$V_0 = \frac{1}{4} \pi d^2 h \quad (1)$$

である。直径、高さともに 2 倍としたときの体積 V は、上式の直径 d を $2d$ で、高さ h を $2h$ で置き換えて得られ

$$V = \frac{1}{4} \pi (2d)^2 (2h) = 8V_0 \quad (2)$$

となる。この式から、問題の円柱の体積 V は国際キログラム原器の体積 V_0 の 8 倍となることがわかる。材質は国際キログラム原器と同じであるので、この円柱の質量は 8 kg である。

■ 加 速 度 加速度の意味を考えよう。自動車のアクセルの踏み方を一定に保てば自動車は一定の速度で走る。ここで**速度** (velocity) とは単位時間あたりの物体の移動距離をいい、速度の単位は、SI 単位で 1 秒あたりの移動距離を意味する [m/s] である。一定の速度で走っていたこの自動車のアクセルをこれまでより踏み込んだとする。自動車は速度を上げ、この間、身体はシートに押し付けられる。この感覚は、アクセルを強く踏めば踏むほど大きく、身体は速度の変化を感じとっているということができる。このような速度の変化を**加速度** (acceleration) といい、その大きさは単位時間あたりの速度の変化で表される。加速度の単位は、SI 単位で 1 秒あたりの速度の変化を意味する [m/s²] である。

【例題 1.2】 自動車を停止状態から時速 100 km の走行状態まで加速するの

索 引

	【い】				
位 相	89	基準点	113	三角関数	174
位置ベクトル	9	軌 道	53	三角比	173
一般解	65,195	共 振	90	【し】	
移動支持	46	強制振動	89	仕 事	102
		極小値	187	指数関数	171
【う】		極大値	187	指数法則	169
腕の長さ	18	極 値	187	自然対数	172
運動エネルギー	107			実体振り子	152
運動の法則	3	【く】		質 点	31,63
運動方程式	64,147	偶 力	24	質点系	31,118
運動量	91	—の腕の長さ	25	質 量	4
運動量保存の法則	93	—のモーメント	24	質量中心	33
				周 期	174
【え】		【け】		周期関数	174
エネルギー原理	109	経 路	53	重 心	33
		減衰係数	76	自由振動	82
【お】		減衰自由振動	87	自由度	146
オイラーの公式	178	減衰力	76	自由物体線図	42
		減数固有角振動数	87	重 力	7
【か】		【こ】		重力加速度	7
解	65,195	合 成	160	衝 突	125
階 数	195	合成関数	185	常用対数	172
回転支持	47	合成ベクトル	160	初期位置	65
外 力	118	剛 体	12,146	初期条件	65
角運動量	96	勾 配	179	初期速度	65
角運動量保存の法則	99	合モーメント	24,27	振 幅	84
角振動数	84	合 力	12	【す】	
角力積	100	固定支持	47	随 伴	199
重ね合わせの原理	196	固有角振動数	84	スカラー	8,159
加速度	5,57			スカラー積	164
加速度ベクトル	60	【さ】		【せ】	
加法定理	178	最大静摩擦力	49	制御工学	2
慣性系	3	作 用	8	成 分	9,163
慣性モーメント	136	作用線	11	成分表示	9,163
		作用点	11	成分ベクトル	161

静摩擦係数	49	同 次	196	平均変化率	180
静摩擦力	48	動摩擦係数	49	平衡位置	81
静力学	1	動摩擦力	49	平行軸の定理	139
積 分	189	動力学	1	平行四辺形の法則	12
積分定数	189	特 解	199	平面運動	153
全運動量	122			ベクトル	8, 11, 159
——の式	123	【な】		——の差	160
全運動量保存の法則	123	内 力	118	——の和	160
全角運動量	128	【に】		ベクトル積	166
——の式	130	ニュートンの運動の法則	2	変化率	180
全角運動量保存の法則	131	【ね】		変数分離形	196
線 形	196	粘性減衰	76	変数分離の方法	196
【そ】		粘性減衰係数	76	【ほ】	
速 度	5, 53, 179	粘性抵抗	76	保存力	110
速度ベクトル	56	粘性抵抗係数	76	ポテンシャルエネルギー	113
【た】		【は】		【ま】	
対 数	171	ぼね定数	81	マクローリン級数	175
対数関数	172	反作用	8	摩擦力	48
単純支持	47	反発係数	126	マルチボディダイナミックス	2
単振動	84	【ひ】		【も】	
単振り子	97	非慣性系	3	モーメント	16
【ち】		非線形	196	モーメントベクトル	20
力	4	非同次	196	【り】	
——のモーメント	16	微 分	181	力 学	1
調和運動	84	微分係数	180	力学的エネルギー	116
直線運動量	91	微分方程式	65, 195	力学的エネルギー保存の	
直交軸の定理	140	非保存力	110	法則	116
【つ】		【ふ】		力 積	93
つり合い	40	復元力	80	【れ】	
——の条件	41	フックの法則	80	連続体	36
【て】		不定積分	189	【ろ】	
抵抗力	76	分 解	161	ロータダイナミックス	2
定積分	191	分 力	12		
【と】		【へ】			
等 価	25	平均加速度	58		
導関数	181	平均速度	53		

— 著者略歴 —

- 1963年 名古屋大学工学部機械学科卒業
1968年 名古屋大学大学院工学研究科博士課程修了（機械工学専攻）
工学博士
1968年 名古屋大学助手
1970年 名古屋大学講師
1976年 名古屋大学助教授
1985年 名古屋大学教授
2004年 名古屋大学名誉教授
愛知工業大学教授
2011年 愛知工業大学特任教授
2013年 愛知工業大学退職

機械の基礎力学

Fundamental Mechanics of Machines

© Kimihiko Yasuda 2009

2009年10月16日 初版第1刷発行

2020年9月5日 初版第8刷発行

検印省略

著者	安 田 仁 彦
発行者	株式会社 コロナ社
代表者	牛来真也
印刷所	壮光舎印刷株式会社
製本所	株式会社 グリーン

112-0011 東京都文京区千石4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)

ホームページ <https://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-04602-1 C3053 Printed in Japan

(河村)



JCOPY <出版者著作権管理機構 委託出版物>

本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつど事前に、出版者著作権管理機構（電話 03-5244-5088, FAX 03-5244-5089, e-mail: info@jcopy.or.jp）の許諾を得てください。

本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めていません。落丁・乱丁はお取替えいたします。