

振 動 工 学

—応用編—

工学博士 安 田 仁 彦 著

コ 口 ナ 社

まえがき

この本は、著者が先に上梓した「振動工学」の「基礎編」に続く「応用編」である。基礎編、応用編を合わせた本書「振動工学」によって、動的設計・構造解析の分野の技術者が必要とする基礎知識を統一した形で提示するという、著者の永年の夢が実現できたと考えている。

基礎編では、機械・構造物の基本的な振動である自由振動と強制振動を解説し、また現実の機械や構造物をモデル化し解析するのに必要となる、解析力学の基礎、有限要素法の基本的な考え方を述べた。これらは、動的設計・構造解析の分野の技術者が修得しておくべき最小限の基礎知識である。

機械や構造物に対して高速化・軽量化・高性能化の要求がますます厳しくなっている今日、設計・開発の現場で技術者が解決を迫られる問題は多岐にわたる。その解決に当たって技術者は、基礎編に含まれる以上の多くの知識と、それに基づく問題解決能力を必要とする。応用編では、このような場合に必要となる項目として、波動、音波、自励振動とパラメータ振動、回転体の振動、非線形振動といった種々の振動現象、最後に振動のアクティブ制御を取り上げた。これらはいずれも動的設計・構造解析の技術者が修得しておくべき重要なことばかりである。

基礎編のときと同じように、応用編を著すにあたって著者は、全体を統一した取り扱いをすることと、各章を易から難に順を追って説明することを心がけた。基礎編に書かれているある程度の予備知識があれば、応用編の各章とも、それほど困難を感じないで読み進むことができると信じている。それぞれの章には、適切な例題を配し、それを解くことによって問題解決の能力を養えるように心がけた。

基礎編、応用編を合わせた本書は、著者が名古屋大学および他の大学と高専

で長年にわたって行ってきた講義のノートと、いくつかの企業で行った研修の資料を整理してできあがったものである。講義や研修の際に寄せられた学生や受講者からの質問やコメントは、本書を仕上げるにあたってきわめて有用であった。

応用編の原稿に対しても基礎編と同様に、多くの同僚、後輩から貴重なコメントをいただき、この本を改善するのに役立たせていただいた。お名前はいちいち申し上げないが、これらの方々に感謝申し上げたい。

振動工学を学ぼうえで、また動的設計・構造解析の仕事を進めるうえで、本書が読者に少しでも役立つならば、著者のこの上ない喜びである。

2001年6月

安田仁彦

目 次

9 波 動

9.1 1次元の波動	1
9.1.1 波動方程式	1
9.1.2 波動の伝播	3
9.1.3 インピーダンスと波動のエネルギー	7
9.1.4 波動の反射	9
9.1.5 波動の透過	12
9.2 2次元・3次元の波動	17
9.2.1 波動方程式	17
9.2.2 2次元の波動の伝播	17
9.2.3 3次元の波動の伝播	19
9.2.4 平面波の反射と屈折	22
9.3 波動の干渉と定常波	25
9.3.1 1次元の波動の干渉	25
9.3.2 1次元の定常波	28
9.3.3 3次元の波動の干渉	30
9.3.4 2次元・3次元の定常波	32
演習問題	34

10 音 波

10.1 音 波	36
----------------	----

10.2	1次元の音波	37
10.2.1	基礎式	37
10.2.2	音波の伝播	40
10.3	音圧と音の強さ	43
10.3.1	音圧と音圧レベル	43
10.3.2	音のエネルギーと音の強さ	44
10.4	音響管	46
10.4.1	閉口音響管	47
10.4.2	開口音響管	49
10.4.3	音響インピーダンス密度が与えられた値となる音響管	50
10.4.4	音響管における定常波	51
10.5	3次元の音波	52
10.5.1	基礎式	52
10.5.2	音波の伝播	55
10.6	自由空間の音波	56
10.6.1	呼吸球による放射	56
10.6.2	点音源による放射	59
10.6.3	二重音源による放射	61
10.6.4	平面音源による放射	63
10.7	閉空間の中の音波	66
10.7.1	直方体の閉空間	66
10.7.2	円筒形の閉空間	69
	演習問題	72

11

自励振動とパラメータ振動

11.1	自励振動	73
11.1.1	自励振動の発生	73
11.1.2	自励振動の解析	75
11.2	平衡状態の安定性の判別法	77

11.2.1	平衡状態の安定性	77
11.2.2	安定性の判別法	79
11.3	種々の自励振動	80
11.3.1	乾性摩擦による自励振動	80
11.3.2	調速機のハンティング	83
11.3.3	車輪のシミー	85
11.4	パラメータ振動	87
11.5	1 自由度系のパラメータ振動	89
11.5.1	マシューの方程式	89
11.5.2	数値積分法によるマシューの方程式の解	91
11.5.3	マシューの方程式の近似解	92
11.5.4	パラメータ振動の発生	95
11.5.5	パラメータ振動の発生領域外の振動	99
11.6	連続体のパラメータ振動	100
	演習問題	102

12 回転体の振動

12.1	回 転 体	103
12.2	2 自由度回転体のたわみ振動	104
12.2.1	運動方程式	104
12.2.2	自由振動	106
12.2.3	不釣合いによる強制振動	108
12.3	減衰が作用する2 自由度回転体のたわみ振動	111
12.3.1	運動方程式	111
12.3.2	自由振動の解析	113
12.3.3	不釣合いによる強制振動	118
12.4	扁平軸で支えられた回転体の振動	119
12.4.1	運動方程式	120
12.4.2	自由振動の解析	121

12.4.3	安定領域内における振動	122
12.4.4	不安定領域内における振動	124
12.5	2 自由度回転体の傾き振動	126
12.5.1	運動方程式	126
12.5.2	自由振動	129
12.5.3	不釣合いによる強制振動	132
12.6	4 自由度回転体の振動	134
12.6.1	運動方程式	134
12.6.2	自由振動	137
12.6.3	不釣合いによる強制振動	141
	演習問題	143

13 非線形系の振動

13.1	非線形系	144
13.2	自由振動	146
13.2.1	運動方程式	146
13.2.2	数値積分による自由振動の解	147
13.2.3	自由振動の理論解析	148
13.3	強制振動	151
13.3.1	調和共振	151
13.3.2	分数調波共振	156
13.3.3	結合共振	160
13.4	自励振動とパラメータ振動	167
13.4.1	自励振動	167
13.4.2	パラメータ振動	169
13.5	カオス振動	172
13.5.1	カオス振動の特徴	173
13.5.2	カオス振動の発生	177
	演習問題	178

14 振動のアクティブ制御

14.1 振動のアクティブ制御	179
14.2 1 自由度系の振動のアクティブ制御	180
14.2.1 状態方程式	181
14.2.2 状態フィードバック制御	183
14.2.3 極配置による状態フィードバック制御	184
14.2.4 最適フィードバック制御	186
14.3 多自由度系のシステム方程式	189
14.3.1 状態方程式	189
14.3.2 出力方程式	192
14.3.3 可制御性と可観測性	194
14.4 多自由度系の振動のアクティブ制御	198
14.4.1 極配置による状態フィードバック制御	198
14.4.2 最適フィードバック制御	200
14.4.3 オブザーバを用いた状態フィードバック制御	201
14.5 モード解析と振動制御	205
14.5.1 理論モード解析によるモデルの低次元化	206
14.5.2 スピルオーバ	207
14.5.3 スピルオーバの回避	209
演習問題	211
参考文献	212
演習問題略解	214
索引	219

基礎編主要目次

- | | |
|----------------|-----------------|
| 1. 緒論 | 5. 多自由度系の振動 |
| 2. 1自由度無減衰系の振動 | 6. 連続体の振動 |
| 3. 1自由度減衰系の振動 | 7. 解析力学の基礎 |
| 4. 2自由度系の振動 | 8. 有限要素法による振動解析 |

9

波 動



この章では、波動の基本的な事項を述べる。また振動と波動の関連を考える。

9.1 1次元の波動

9.1.1 波動方程式

長い弦の1点に運動を与えると、その運動は弦を伝わっていく。空間内のある点で音を発すると、その音は四方八方に伝わっていく。これらの例のように、ある点に生じた物理量の変動が、空間的に広がった物質中に伝えられる現象を**波動** (wave motion) といい、この場合の物質を**媒質** (medium) という。また波動の発生源を**波源** (wave source) という。

波動には、弦の波動のように1次元的に伝わっていくもの、膜や水面の波動のように2次元的に伝わっていくもの、空間内の音のように3次元的に伝わっていくものがある。この節では、弦を例にして、1次元の波動を考える。

図9.1に示すように、単位長さあたりの質量 ρ の弦が張力 T_0 で張られているとする。運動を与える点を原点とし、静止状態の弦に沿って x 軸を定める。 x 軸の正の側に張られた弦を考える。時刻 t における、座標 x の位置の弦のたわみを u とおく。第6章で導いたように、弦を支配する運動方程式は

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (9.1)$$

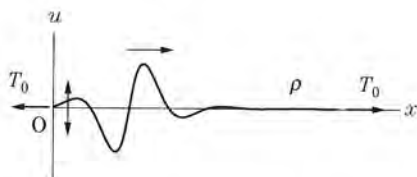


図 9.1 波 動

である。波動も運動の一種であるから、弦の波動はこの式で支配される。そこでこの同じ式を、波動の問題に対して、**波動方程式** (wave equation) という。 ρ が一様なとき、定数

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \quad (9.2)$$

を導入すると、式 (9.1) は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (9.3)$$

と書くことができる。以下この節では、この式で支配される弦の波動を考える。

式 (9.3) の形の波動方程式は、1次元の波動に対して、多くの系で成り立つ基本的な方程式である。したがって式 (9.3) に基づいて弦に対して得られる結論は、同じ方程式で支配される多くの系に対して成り立つ。

【例題 9.1】

図 9.2 に示すように、縦弾性係数 E 、密度 ρ 、断面積 A の一様な棒に軸方向の変位を与えよときの棒の波動方程式を導け。



図 9.2 棒の軸方向の波動

【解答】 棒の軸方向に x 軸を定め、時刻 t において、 x の位置における軸方向の変位を u とおく。座標 x 、 $x+dx$ の断面で切り取られる微小要素を考えると、質量は $\rho A dx$ 、加速度は $\partial^2 u / \partial t^2$ である。座標 x の断面の応力は $E(\partial u / \partial x)$ である。微小

要素が受ける力は、座標 x の断面で $-EA(\partial u/\partial x)$ 、座標 $x+dx$ の断面で $E(\partial u/\partial x) + (\partial/\partial x)\{EA(\partial u/\partial x)\}dx$ である。したがって波動方程式は

$$\rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -EA \frac{\partial u}{\partial x} + EA \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx$$

である。一様な棒に対して EA は定数だから、これを微分記号の外に出すと

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

を得る。この式で $c = \sqrt{E/\rho}$ とおけば、式 (9.3) に一致する波動方程式を得る。

9.1.2 波動の伝播

波動の最初の問題として、図 9.1 に示すような半無限長の弦において、 $x=0$ の点で角振動数 ω の調和運動 $u = u_0 \cos \omega t$ が与えられる場合を考える。このときの境界条件は

$$x=0 \text{ において } u = u_0 \cos \omega t \quad (9.4)$$

である。求める波動は、この条件を満たす式 (9.3) の解によって与えられる。

解析の便利のため、この問題を、2.2 節で強制振動に対して行ったと同じように別の問題に置き換える。このため、式 (9.4) の境界条件の右辺に $j u_0 \sin \omega t$ を加える。このとき式 (9.4) は

$$x=0 \text{ において } u = u_0 e^{j\omega t} \quad (9.5)$$

となる。この条件を満たす式 (9.3) を解けば、その解の実部が、もとの問題の解となる。

式 (9.5) の境界条件を満たす式 (9.3) の解を求めよう。境界条件の形を考慮して、解を

$$u = U e^{j\omega t} \quad (9.6)$$

とおく。ここで U は x の未知関数である。式 (9.6) を式 (9.3) に代入すると、 U を定める式

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} U = 0 \quad (9.7)$$

を得る。この形の方程式をヘルムホルツの方程式 (Helmholtz equation) という。この式の一般解は、 A, B を任意定数として

$$U = Ae^{-j\frac{\omega}{c}x} + Be^{j\frac{\omega}{c}x} \quad (9.8)$$

となる。したがって式 (9.6) より

$$u = Ae^{j\omega(t-\frac{x}{c})} + Be^{j\omega(t+\frac{x}{c})} \quad (9.9)$$

を得る。

後に示すように、式 (9.9) の右辺の第 1 項は x 軸の正の向きに伝わる波動、第 2 項は負の向きに伝わる波動を表す。いまの問題では、波動は、 x 軸の正の向きに進み、無限遠方から戻ることはないと考えてよい。そこで式 (9.9) で $B=0$ とおくと

$$u = Ae^{j\omega(t-\frac{x}{c})} \quad (9.10)$$

を得る。この式を式 (9.5) に代入して、境界条件を満たすように任意定数 A を定めると

$$u = u_0 e^{j\omega(t-\frac{x}{c})} \quad (9.11)$$

を得る。これが式 (9.5) の境界条件を満たす解である。式 (9.4) の境界条件を満たすもとの問題の解は、上式の解の実部として得られ

$$u = u_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad (9.12)$$

となる。

波動の問題では、以上のように、複素数を用いて問題を扱うことが多い。この場合に、求める解は、得られた解の実部である。ただし便宜的には、複素数の解をそのまま解ということも多い。以下本書でもこの慣例に従う。最終的には、実部をとる演算が必要なことを記憶しておこう。

式 (9.11) の解に基づいて、弦の波動がどのようなものかを見ておこう。この式によれば、ある時刻 $t=t_1$ におけるたわみ u は

$$u = u_0 e^{j\omega(t_1-\frac{x}{c})} \quad (9.13)$$

である。この時刻から Δt だけ時間が経過したときのたわみ u は

$$u = u_0 e^{j\omega(t_1+\Delta t-\frac{x}{c})} = u_0 e^{j\omega(t_1-\frac{x}{c}+\Delta t)} \quad (9.14)$$

である。式 (9.13)、(9.14) を比較すると、任意の点 $x=x_1$ における式 (9.13) の u と、点 $x=x_1+c\Delta t$ における式 (9.14) の u が同じであることがわかる。

x_1 は任意であるから、この結果は、**図 9.3**に示されるように、時間 Δt の間に、弦の波形がそのまま $c\Delta t$ だけ移動することを示す。このようにして式 (9.11) の解は、 x 軸の正の向きに速さ c で伝わる波動を表していることがわかる。一般に一方方向に進む波動を**進行波** (traveling wave) という。式 (9.11) の解は正の向きに進む進行波を表す。

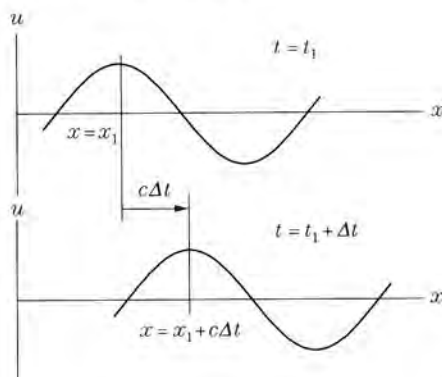


図 9.3 進行波

式 (9.9) の第2項は、変数を $t + x/c$ の形で含んでいる。第1項と同じように考察すれば、第2項は、 x 軸の負の向きに速さ c で伝わる進行波を表すことがわかる。

式 (9.11) において、定数

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (9.15)$$

を導入すれば、式 (9.11) は

$$u = u_0 e^{j(\omega t - kx)} \quad (9.16)$$

と書くことができる。波動 u をこの形に表すと、変数 x に対する k の値は、変数 t に対する ω と同じような意味をもつ。すなわち時刻 t を $t = t_1$ に固定して u を x の関数と見るとき、 k は座標 x に対する u の変化の速さを表す。 k を**波数** (wave number) という。また

索 引

	【あ】		
アクチュエータ	180	音 場	39
アクティブ制御	179	音 波	37
アトラクタ	177	【か】	【け】
安 定	77	開口音響管	49
【い】		回転体	103
位相軌跡	174	外部減衰	111
位相空間	174	カオス振動	173
位相射影	175	可観測	195
インピーダンス	7	可観測マトリックス	195
【う】		可制御	194
後向き	107	可制御マトリックス	194
【え】		干 渉	25, 30
エネルギー密度	8	乾性摩擦	80
エネルギー流密度	8	観測器	202
【お】		観測スピルオーバー	208
応答曲線	109	【き】	【し】
音の強さ	45	危険速度	109, 133, 142
音の強さのレベル	45	球音源	56
オブザーバ	202	球面波	21, 56
オブザーバゲイン	202	共 振	48
音 圧	37	共振曲線	109
音圧レベル	44	共 鳴	48
音響管	46	極	184
音響インピーダンス密度	42	極慣性モーメント	126
音 速	37	極配置	185, 198
		【く】	
		屈 折	23
		屈折角	25
		屈折の法則	25
		屈折波	23
		係数励振振動	89
		ゲイン	183
		ゲインマトリックス	183
		結合共振	166
		【こ】	
		呼吸球	56
		固有音響インピーダンス	42
		【さ】	
		最適フィードバック制御	186, 200
		【し】	
		ジェフコットロータ	104
		指向性	63
		指向性パターン	63
		自己センタリング	109
		システム方程式	194
		実効値	43
		シミー	85
		ジャイロ項	129
		自由空間	56
		主共振	156
		出力方程式	193
		受動制御	179
		状態ベクトル	181

状態フィードバック制御		126	パワー	45	
	183		反 射	9	
状態変数	181	【て】	反射角	25	
状態方程式	181, 190	低次元化	205	反射の法則	25
自励振動	74, 167	定常波	27, 30, 32	反射波	9
進行波	5	デシベル	44	ハンティング	83
振幅依存性	151	点音源	60	【ひ】	
振幅透過率	15			非線形系	145
振幅反射率	15	【と】		非線形項	145
【す】		透過波	13	非線形性	145
ストレージアトラクタ	177	動不釣合い	126	評価関数	187
スピルオーバー	208	特性方程式	182	【ふ】	
【せ】		【な】		不安定	77
制御器	180	内部減衰	111	ファンデルポールの方程式	167
制御系	180	【に】		フィードバックゲイン	183
制御ゲイン	183	二重音源	62	フィードバック制御	179
制御スピルオーバー	208	入射角	25	副共振	156
制御対象	180	入射波	9	節	27, 48
静不釣合い	105	【の】		ふれまわり運動	110
線形系	145	能動制御	179	分数調波共振	159
センサ	180	【は】		【へ】	
【そ】		媒 質	1	平均法	92, 149
速度ポテンシャル	39	波 源	1	閉口音響管	47
【た】		波 数	5	平面音源	64
体積速度	59	波数ベクトル	19, 21	平面波	20, 55
体積弾性率	38	波 長	6	ベルヌーイの定理	74
ダフィングの方程式	146	バッシブ制御	179	ヘルムホルツの方程式	3
ダランベールの波動方程式	40	波 動	1	扁平軸	119
【ち】		波動方程式	2	【ほ】	
跳躍現象	156	パフル	63	ポアンカレ写像	176
調和共振	156	波 面	19, 20	放射インピーダンス	58
直径に関するモーメント		腹	27, 48	放射インピーダンス密度	58
		パラメータ振動		放射抵抗	59
			89, 100, 169		

— 著者略歴 —

- 1963年 名古屋大学工学部機械学科卒業
1968年 名古屋大学大学院工学研究科博士課程修了
工学博士（名古屋大学）
1968年 名古屋大学助手
1970年 名古屋大学講師
1976年 名古屋大学助教授
1985年 名古屋大学教授
2004年 名古屋大学名誉教授
2004年 愛知工業大学教授
2013年 愛知工業大学退職

振動工学—応用編—

Vibration Engineering—A Second Course

© Kimihiko Yasuda 2001

2001年8月2日 初版第1刷発行

2021年5月5日 初版第5刷発行

検印省略

著者 安田 仁彦
発行者 株式会社 コロナ社
代表者 牛来真也
印刷所 新日本印刷株式会社
製本所 有限会社 愛千製本所

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)

ホームページ <https://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-04558-1 C3053 Printed in Japan

(柳生)



JCOPY <出版者著作権管理機構委託出版物>

本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつと事前に、出版者著作権管理機構(電話 03-5244-5088, FAX 03-5244-5089, e-mail: info@jcopy.or.jp)の許諾を得てください。

本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めていません。落丁・乱丁はお取替えいたします。