振　動　工　学

——応用編——

工学博士　安　田　仁　彦著

コ　ロ　ナ　社

ま え が き

この本は，著者が先に上梓した「振動工学」の「基礎編」に続く「応用編」である。基礎編，応用編を合わせた本書「振動工学」によって，動的設計・構造解析の分野の技術者が必要とする基礎知識を統一した形で提示するという，著者の永年の夢が実現できたと考えている。

基礎編では，機械・構造物の基本的な振動である自由振動と強制振動を解説し，また現実の機械や構造物をモデル化し解析するのに必要となる，解析力学の基礎，有限要素法の基本的な考え方を述べた。これらは，動的設計・構造解析の分野の技術者が修得しておくべき最小限の基礎知識である。

機械や構造物に対して高速化・軽量化・高性能化の要求がますます厳しくなっている今日，設計・開発の現場で技術者が解決を迫られる問題は多岐にわたる。その解決に当たって技術者は，基礎編に含まれる以上の多くの知識と，それに基づく問題解決能力を必要とする。応用編では，このような場合に必要となる項目として，波動，音波，自励振動とパラメータ振動，回転体の振動，非線形振動といった種々の振動現象，最後に振動のアクティブ制御を取り上げた。これらはいずれも動的設計・構造解析の技術者が修得しておくべき重要なことばかりである。

基礎編のときと同じように，応用編を著すにあたって著者は，全体を統一した取り扱いをすることと，各章を易から難に順を追って説明することを心がけた。基礎編に書かれているある程度の予備知識があれば，応用編の各章とも，それほど困難を感じないで読み進むことができると信じている。それぞれの章には，適切な例題を配し，それを解くことによって問題解決の能力を養えるように心がけた。

基礎編，応用編を合わせた本書は，著者が名古屋大学および他の大学と高専

で長年にわたって行ってきた講義のノートと，いくつかの企業で行った研修の資料を整理してできあがったものである。講義や研修の際に寄せられた学生や受講者からの質問やコメントは，本書を仕上げるにあたってきわめて有用であった。

応用編の原稿に対しても基礎編と同様に，多くの同僚，後輩から貴重なコメントをいただき，この本を改善するのに役立たせていただいた。お名前はいちいち申し上げないが，これらの方々に感謝申し上げたい。

振動工学を学ぶうえで，また動的設計・構造解析の仕事を進めるうえで，本書が読者に少しでも役立つならば，著者のこの上ない喜びである。

2001年6月

安田仁彦

目　次

9 波　動

10 音　波

11　自励振動とパラメータ振動

12　回転体の振動

13 非線形系の振動

14 振動のアクティブ制御

基礎編主要目次

9

波　　　動

この章では，波動の基本的な事項を述べる。また振動と波動の関連を考える。

9.1 1次元の波動

9.1.1 波動方程式

長い弦の1点に運動を与えると，その運動は弦を伝わっていく。空間内のある点で音を発すると，その音は四方八方に伝わっていく。これらの例のように，ある点に生じた物理量の変動が，空間的に広がった物質中に伝えられる現象を**波動**（wave motion）といい，この場合の物質を**媒質**（medium）という。また波動の発生源を**波源**（wave source）という。

波動には，弦の波動のように1次元的に伝わっていくもの，膜や水面の波動のように2次元的に伝わっていくもの，空間内の音のように3次元的に伝わっていくものがある。この節では，弦を例にして，1次元の波動を考える。

図 9.1 に示すように，単位長さあたりの質量 ρ の弦が張力 T_0 で張られているとする。運動を与える点を原点とし，静止状態の弦に沿って x 軸を定める。x 軸の正の側に張られた弦を考える。時刻 t における，座標 x の位置の弦のたわみを u とおく。第6章で導いたように，弦を支配する運動方程式は

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{9.1}$$

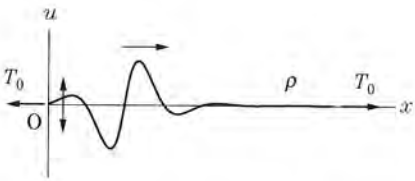

図 9.1 波 動

である。波動も運動の一種であるから，弦の波動はこの式で支配される。そこでこの同じ式を，波動の問題に対して，**波動方程式** (wave equation) という。ρ が一様なとき，定数

$$c=\sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \tag{9.2}$$

を導入すると，式 (9.1) は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{9.3}$$

と書くことができる。以下この節では，この式で支配される弦の波動を考える。

式 (9.3) の形の波動方程式は，1 次元の波動に対して，多くの系で成り立つ基本的な方程式である。したがって式 (9.3) に基づいて弦に対して得られる結論は，同じ方程式で支配される多くの系に対して成り立つ。

【例題 9.1】

図 9.2 に示すように，縦弾性係数 E，密度 ρ，断面積 A の一様な棒に軸方向の変位を与えるときの棒の波動方程式を導け。

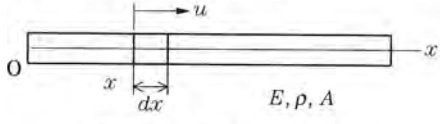

図 9.2 棒の軸方向の波動

〔**解答**〕 棒の軸方向に x 軸を定め，時刻 t において，x の位置における軸方向の変位を u とおく。座標 x，$x+dx$ の断面で切り取られる微小要素を考えると，質量は $\rho A dx$，加速度は $\partial^2 u/\partial t^2$ である。座標 x の断面の応力は $E(\partial u/\partial x)$ である。微小

要素が受ける力は，座標 x の断面で $-EA(\partial u/\partial x)$，座標 $x+dx$ の断面で $E(\partial u/\partial x)+(\partial/\partial x)\{EA(\partial u/\partial x)\}dx$ である。したがって波動方程式は

$$\rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -EA\frac{\partial u}{\partial x} + EA\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx$$

である。一様な棒に対して EA は定数だから，これを微分記号の外に出すと

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

を得る。この式で $c=\sqrt{E/\rho}$ とおけば，式 (9.3) に一致する波動方程式を得る。

9.1.2 波動の伝播

波動の最初の問題として，図 9.1 に示すような半無限長の弦において，$x=0$ の点で角振動数 ω の調和運動 $u=u_0\cos\omega t$ が与えられる場合を考える。このときの境界条件は

$$x=0 \text{ において}\quad u=u_0\cos\omega t \tag{9.4}$$

である。求める波動は，この条件を満たす式 (9.3) の解によって与えられる。

解析の便利のため，この問題を，2.2 節で強制振動に対して行ったと同じように別の問題に置き換える。このため，式 (9.4) の境界条件の右辺に $ju_0\sin\omega t$ を加える。このとき式 (9.4) は

$$x=0 \text{ において}\quad u=u_0 e^{j\omega t} \tag{9.5}$$

となる。この条件を満たす式 (9.3) を解けば，その解の実部が，もとの問題の解となる。

式 (9.5) の境界条件を満たす式 (9.3) の解を求めよう。境界条件の形を考慮して，解を

$$u=Ue^{j\omega t} \tag{9.6}$$

とおく。ここで U は x の未知関数である。式 (9.6) を式 (9.3) に代入すると，U を定める式

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}U = 0 \tag{9.7}$$

を得る。この形の方程式を**ヘルムホルツの方程式** (Helmholtz equation) という。この式の一般解は，A, B を任意定数として

$$U = Ae^{-j\frac{\omega}{c}x} + Be^{j\frac{\omega}{c}x} \tag{9.8}$$

となる。したがって式 (9.6) より

$$u = Ae^{j\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)} + Be^{j\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)} \tag{9.9}$$

を得る。

後に示すように，式 (9.9) の右辺の第 1 項は x 軸の正の向きに伝わる波動，第 2 項は負の向きに伝わる波動を表す。いまの問題では，波動は，x 軸の正の向きに進み，無限遠方から戻ることはないと考えてよい。そこで式 (9.9) で $B=0$ とおくと

$$u = Ae^{j\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)} \tag{9.10}$$

を得る。この式を式 (9.5) に代入して，境界条件を満たすように任意定数 A を定めると

$$u = u_0 e^{j\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)} \tag{9.11}$$

を得る。これが式 (9.5) の境界条件を満たす解である。式 (9.4) の境界条件を満たすもとの問題の解は，上式の解の実部として得られ

$$u = u_0 \cos \omega\left(t-\frac{x}{c}\right) \tag{9.12}$$

となる。

波動の問題では，以上のように，複素数を用いて問題を扱うことが多い。この場合に，求める解は，得られた解の実部である。ただし便宜的には，複素数の解をそのまま解ということも多い。以下本書でもこの慣例に従う。最終的には，実部をとる演算が必要なことを記憶しておこう。

式 (9.11) の解に基づいて，弦の波動がどのようなものかを見ておこう。この式によれば，ある時刻 $t=t_1$ におけるたわみ u は

$$u = u_0 e^{j\omega\left(t_1-\frac{x}{c}\right)} \tag{9.13}$$

である。この時刻から Δt だけ時間が経過したときのたわみ u は

$$u = u_0 e^{j\omega\left(t_1+\Delta t-\frac{x}{c}\right)} = u_0 e^{j\omega\left(t_1-\frac{x-c\Delta t}{c}\right)} \tag{9.14}$$

である。式 (9.13)，(9.14) を比較すると，任意の点 $x=x_1$ における式 (9.13) の u と，点 $x=x_1+c\Delta t$ における式 (9.14) の u が同じであることがわかる。

x_1 は任意であるから，この結果は，**図 9.3** に示されるように，時間 Δt の間に，弦の波形がそのまま $c\Delta t$ だけ移動することを示す。このようにして式 (9.11) の解は，x 軸の正の向きに速さ c で伝わる波動を表していることがわかる。一般に一方向に進む波動を**進行波** (traveling wave) という。式 (9.11) の解は正の向きに進む進行波を表す。

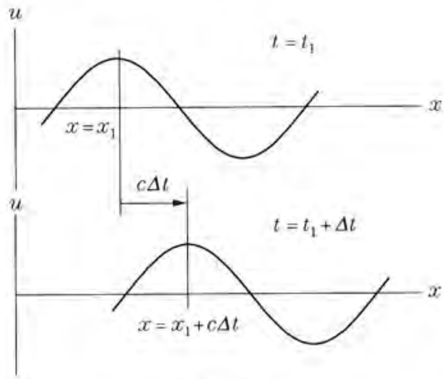

図 9.3 進行波

式 (9.9) の第 2 項は，変数を $t+x/c$ の形で含んでいる。第 1 項と同じように考察すれば，第 2 項は，x 軸の負の向きに速さ c で伝わる進行波を表すことがわかる。

式 (9.11) において，定数

$$k=\frac{\omega}{c} \tag{9.15}$$

を導入すれば，式 (9.11) は

$$u=u_0e^{j(\omega t-kx)} \tag{9.16}$$

と書くことができる。波動 u をこの形に表すと，変数 x に対する k の値は，変数 t に対する ω と同じような意味をもつ。すなわち時刻 t を $t=t_1$ に固定して u を x の関数と見るとき，k は座標 x に対する u の変化の速さを表す。k を**波数** (wave number) という。また

索　　　引

—— 著 者 略 歴 ——

1963 年　名古屋大学工学部機械学科卒業
1968 年　名古屋大学大学院工学研究科博士課程修了
　　　　工学博士（名古屋大学）
1968 年　名古屋大学助手
1970 年　名古屋大学講師
1976 年　名古屋大学助教授
1985 年　名古屋大学教授
2004 年　名古屋大学名誉教授
2004 年　愛知工業大学教授
2013 年　愛知工業大学退職

振動工学—応用編—

Vibration Engineering——A Second Course　　

2001 年 8 月 2 日　初版第 1 刷発行
2021 年 5 月 5 日　初版第 5 刷発行

検印省略

著　　者　安田仁彦（やすだ きみひこ）
発 行 者　株式会社　コロナ社
　　　　　代 表 者　牛来真也
印 刷 所　新日本印刷株式会社
製 本 所　有限会社　愛千製本所

112-0011　東京都文京区千石 4-46-10
発 行 所　株式会社　**コ ロ ナ 社**
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)
ホームページ　https://www.coronasha.co.jp

ISBN 978-4-339-04558-1　C3053　Printed in Japan　（柳生）