

ロボティクスシリーズ 7

モデリングと制御

工学博士 平井 慎一
工学博士 坪内 孝司 共著
工学博士 秋下 貞夫

コロナ社

ロボティクスシリーズ編集委員会

編集委員長 有本 卓 (立命館大学)

幹 事 川村貞夫 (立命館大学)

編 集 委 員 石井 明 (立命館大学)

(五十音順) 手嶋教之 (立命館大学)

渡部 透 (立命館大学)

(2009 年 1 月現在)

刊行のことば

本シリーズは、1996年、わが国の大学で初めてロボティクス学科が設立された機会に企画された。それからほぼ10年を経て、卒業生を順次社会に送り出し、博士課程の卒業生も輩出するに及んで、執筆予定の教員方からの脱稿が始まり、出版にこぎつけることとなった。

この10年は、しかし、待つ必要があった。工学部の伝統的な学科群とは異なり、ロボティクス学科の設立は、当時、世界初の試みであった。教育は手探りで始まり、実験的であった。試行錯誤を繰り返して得た経験が必要だった。教える前に書いたテキストではなく、何回かの講義、テストによる理解度の確認、演習や実習、実験を通じて練り上げるプロセスが必要であった。各巻の講述内容にも改訂と洗練を加え、各章、各節の取捨選択も必要だった。ロボティクス教育は、電気工学や機械工学といった単独の科学技術体系を学ぶ伝統的な教育法と違い、二つの専門(T型)を飛び越えて、電気電子工学、機械工学、計算機科学の三つの専門(π 型)にまたがって基礎を学ばせ、その上にロボティクスという物づくりを指向する工学技術を教授する必要があった。もっとたいへんなことに、2000年を迎えると、パーソナル利用を指向する新しいさまざまなロボットが誕生するに及び、本来は人工知能が目指していた“人間の知性の機械による実現”がむしろロボティクスの直接の目標となった。そして、ロボティクス教育は単なる物づくりの科学技術から、知性の深い理解へと視野を広げつつ、新たな科学技術体系に向かう一歩を踏み出したのである。

本シリーズは、しかし、新しいロボティクスを視野に入れつつも、ロボットを含めたもっと広いメカトロニクス技術の基礎教育コースに必要な科目をそろえる当初の主旨は残した。三つの専門にまたがる π 型技術者を育てるとき、広くてもそれぞれが浅くなりがちである。しかし、各巻とも、ロボティクスに

ii 刊 行 の こ と ば

直接的にかかわり始めた章や節では、技術深度が格段に増すことに学生諸君も、そして読者諸兄も気づかれよう。恐らく、工学部の伝統的な電気工学，機械工学の学生諸君や，情報理工学部の諸君にとっても，本シリーズによってそれぞれの科学技術体系がロボティクスに焦点を結ぶときの意味を知れば，工学の面白さ，深さ，広がり，といった科学技術の醍醐味が体感できると思う。本シリーズによって幅の広いエンジニアになるための素養を獲得されんことを期待している。

2005年9月

編集委員長 有本 卓

まえがき

本書では、機械システムのモデリングと制御の原理と手法を、実際の例に即して述べる。現在の機械システムは、機械系と電気電子系が融合している系である。その機械システムにおいて制御系を構成するためには、対象の物理的な理解が欠かせない。そこで本書では、機械システムの物理モデリングから数値シミュレーションの技法、制御系の安定解析法をカバーする。さらに機械システム制御の具体例として、宇宙機と移動ロボットを取り上げ、モデリングから制御系の設計までがどのようになされているかを示す。

本書の特徴は、システムを表す微分方程式を時間領域で直接扱っている点である。このようにした一つ目の理由は、解析的な手法と数値計算による手法を同一の表現で扱うためである。二つ目の理由（こちらのほうが重要だが）は、線形と非線形を必要以上に区別することなく、非線形の特別な場合が線形であるという見方からである。線形制御理論に関しては多くの良書が出版されているので、本書の執筆にあたっては線形系の話を抑え、非線形の微分方程式を時間領域で扱う手法や例を多く採用した。われわれの意図が満たされているかどうかは、読者の方々のご判断を仰ぎたい。

なお、1～7章を平井が、8章を秋下が、9章を坪内が、それぞれ分担して執筆した。

2021年3月

平井 慎一
坪内 孝司
秋下 貞夫

目 次

1. 機械システムのモデリングと制御とは

2. 機械システムのモデリング

2.1 単振り子のモデリング	3
2.2 電磁モータのモデリング	10
2.2.1 DC モータのモデリング	10
2.2.2 パルス幅変調	13
2.2.3 サーボモータのモデリング	14
2.3 リンク機構のモデリング	15
2.3.1 開リンク機構	15
2.3.2 閉リンク機構	18
2.4 自動車の運動のモデリング	21
章 末 問 題	24

3. 常微分方程式の数値解法

3.1 ルンゲ・クッタ型数値解法	25
3.2 制約安定化法	30
3.3 パフィアン制約の安定化	32
3.4 リプシッツ条件	35
章 末 問 題	36

4. フィードバック制御

4.1	リニアテーブルのフィードバック制御	38
4.2	1自由度開リンク機構のフィードバック制御	41
4.3	2自由度開リンク機構のフィードバック制御	46
	章末問題	48

5. 線形常微分方程式

5.1	線形常微分方程式の解析解	49
5.1.1	状態遷移行列による解の表現	49
5.1.2	状態遷移行列の計算	51
5.1.3	2階の線形常微分方程式の解析解	55
5.1.4	入力を有する線形常微分方程式	58
5.1.5	固有値が重根の場合の状態遷移行列	59
5.2	複素数	61
5.2.1	複素平面	61
5.2.2	回転を表す複素数	63
5.2.3	複素数の指数関数	66
5.3	線形システムの安定性	67
	章末問題	70

6. 変分原理をもとにしたモデリング

6.1	静力学の変分原理	73
6.2	動力学の変分原理	76

6.3 リンク機構のモデリング	80
6.3.1 開リンク機構のモデリング	80
6.3.2 閉リンク機構のモデリング	83
6.4 ビームのモデリング	86
6.4.1 静力学モデル	86
6.4.2 動力学モデル	90
6.5 剛体の回転	93
章末問題	100

7. 安定性

7.1 安定と漸近安定	103
7.2 線形化による安定解析	104
7.3 単振り子の運動の安定性	106
7.4 リアプノフの安定定理とラサールの安定定理	110
7.5 リニアテーブルの位置制御の安定性	111
章末問題	115

8. 宇宙機の姿勢運動の制御

8.1 宇宙機の分類と構造	118
8.1.1 宇宙機の軌道	118
8.1.2 スピン衛星と三軸制御衛星	119
8.1.3 宇宙機のセンサ	120
8.2 受動制御による安定化	121
8.2.1 軸対称な剛体のスピン運動の安定性	121
8.2.2 円軌道においてスピンする宇宙機の姿勢運動とその安定性	127

8.2.3	回転運動のエネルギーと運動量	133
8.2.4	宇宙環境における外乱トルク	134
8.2.5	重力傾度を利用した宇宙機の姿勢運動の安定化	136
8.2.6	スピン衛星に外部トルクを与えることによる姿勢角の変化	138
8.3	能動制御による安定化	141
8.3.1	バイアスモーメントムホイールによる姿勢制御	141
8.3.2	リアクションホイールによる姿勢制御	145
章 末 問 題		147

9. 移動ロボットの制御

9.1	車輪移動体の特徴と制御	149
9.2	車輪移動体の運動学	151
9.3	車輪移動体の走行制御	154
9.4	経路追従制御	158
9.5	独立2輪駆動型の移動体の駆動輪速度制御	163
9.5.1	独立2輪駆動型の移動体の動特性	163
9.5.2	必要トルクを計算する駆動輪速度制御器の構成	164
9.6	目標走行経路に関する考察	169
章 末 問 題		171

引用・参考文献	172
---------	-----

章末問題解答	174
--------	-----

索 引	200
-----	-----

1

機械システムの モデリングと制御とは

現在の機械システムは、機械系と電気電子系が融合している系である。例えば、コピー機やプリンタは、紙を送る機械システムと、トナーやインクの吐出を制御する電気システムを含む。掃除機や洗濯機などの家電は、そのメカニズムを電磁モータにより駆動している。このようなメカトロニクス機器はマイクロコントローラを内蔵しており、センサ信号に応じて動作を変更したり制御したりすることができる。このような機械システムの制御系を構成するためには、対象の物理的な理解が欠かせない。本書では、機械システムの物理モデリングから数値シミュレーションの技法、制御系の安定解析法をカバーする。

機械システムの**モデリング** (modeling) とは、機械システムの挙動を、数式やコンピュータプログラムで表すことである。モデリングによって作られる数式やコンピュータプログラムを、**モデル** (model) と呼ぶ。特に前者を**数式モデル** (mathematical model)、後者を**コンピュータモデル** (computer model) と呼ぶ。数式を解析的/数值的に解く、あるいはコンピュータプログラムをコンピュータ上で実行することにより、機械システムの挙動を知ることができる。実物が存在しない場合でも、このようなモデルの解析を通して、機械システムの挙動を推定することができる。機械システムの設計では、設計した機械システムのモデル解析を通して、機械システムの挙動を評価し、設計に反映させることが不可欠になっている。本書では、機械システムのモデリングと、それに基づく制御系の解析に焦点を当てる。

本書の構成を述べよう。前半では基礎的な概念と手法を説明する。2章では、常微分方程式を用いて機械システムの挙動を記述する手法を述べる。単振り子、

2 1. 機械システムのモデリングと制御とは

電磁モータ，リンク機構，自動車を例として，システムの挙動を微分方程式で表す。さらに，ホロノミック制約とパフィアン制約について述べる。3章では，常微分方程式を数値的に解く手法を紹介する。システムの挙動を表す微分方程式を数値的に解き，結果をグラフやアニメーションで提示することにより，機械電気システムの挙動を理解することを，シミュレーション (simulation) と呼ぶ。常微分方程式の数値解法は，このシミュレーションに不可欠である。4章では，フィードバック制御について述べる。リニアテーブルの位置決め制御とリンク機構の運動制御を例にして，比例制御，積分制御，微分制御を説明する。5章では，線形常微分方程式の解について述べる。線形常微分方程式は解析的に解くことができ，解析解は微分方程式の安定性を考察するときの基礎になる。6章では，変分原理に基づいたシステムのモデリングについて述べる。開リンク機構，閉リンク機構，ビームの変形，剛体の回転を例として，システムの挙動をモデリングする。7章では，安定性について述べる。線形化による局所的な安定解析とリアプノフ関数を用いた大域的な安定解析について述べる。後半は機械システムの制御の例として，8章では宇宙機の姿勢制御，9章では移動ロボットの制御について述べる。

2

機械システムのモデリング

モデリングとは、機械システムの挙動を計算可能な形式で記述することである。機械システムの挙動は、常微分方程式 (ordinary differential equation; 略して ODE) を用いてモデリングすることができる。これは、機械システムの挙動は運動方程式という常微分方程式、電気電子システムの挙動は回路方程式という常微分方程式で定式化されることに起因する。本章では、典型的な例を用いて、常微分方程式を用いた機械システムのモデリングの手法を述べる。

2.1 単振り子のモデリング

図 2.1 に示す単振り子の運動をモデリングする。単振り子は先端の質量 m と長さ l の棒からなる。棒は先端の質量と比較すると十分軽く、その質量は無視できると仮定する。棒の一端は単振り子の支点 C に、他端は質量に接続されている。単振り子の振れ角を θ で表す。角度 θ が満たす回転の運動方程式を求め

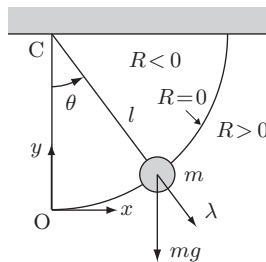


図 2.1 単振り子

よう。支点 C まわりの慣性モーメントは $J = ml^2$ である。重力により支点 C まわりに作用するモーメントは、 $-mgl \sin \theta$ で与えられる。振れ角の角加速度は $\ddot{\theta}$ であるので、支点 C まわりの回転に関する運動方程式は

$$J\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta \quad (2.1)$$

と表される。これは変数 θ に関する 2 階の常微分方程式である。

この運動方程式を 1 階の運動方程式に変換しよう。新しい変数 $\omega \triangleq \dot{\theta}$ (記号 \triangleq は定義を表す) を導入すると、上式は

$$J\dot{\omega} = -mgl \sin \theta \quad (2.2)$$

と書き換えることができる。変数 ω は角速度を表す。新しい変数 ω の定義式と上式の両辺を $J = ml^2$ で割った式をまとめて書くと

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= -\frac{g}{l} \sin \theta \end{aligned} \quad (2.3)$$

が得られる。上式は、二つの変数 θ と ω に関する 1 階の微分方程式である。すなわち、1 変数 2 階の常微分方程式 (2.1) を、2 変数 1 階の常微分方程式 (2.3) に変換することができた。さらに、上式の右辺には変数 θ と ω は現れるが、その時間微分 $\dot{\theta}$ と $\dot{\omega}$ は現れない。時間微分が現れるのは左辺のみであり、変数 θ と ω の値を与えると、それらの時間微分 $\dot{\theta}$ と $\dot{\omega}$ の値を上式よりただちに計算することができる。このような常微分方程式を標準形 (canonical form) と呼ぶ。1 階微分とともに標準形に現れる変数を状態変数 (state variable) と呼ぶ。この例では、 θ と ω が状態変数である。一般に、時刻 0 における状態変数の値を定めると、以降の時刻 t における状態変数の値を求めることができる。時刻 0 における状態変数の値を初期値 (initial value) と呼ぶ。

3 章で紹介する常微分方程式の数値解法を用いると、微分方程式の標準形を数値的に解くことができる。例えば、 $m = 0.01 \text{ kg}$, $l = 0.99 \text{ m}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ と定め、初期値 $\theta(0) = \pi/6 \text{ [rad]}$, $\omega(0) = 0 \text{ rad/s}$ のもとで式 (2.3) を数値的

に解き、その結果をグラフにすると、**図 2.2** が得られる。図 (a) は角度 $\theta(t)$ 、図 (b) は角速度 $\omega(t)$ を表している。これらの図からわかるように、振れ角 $\theta(t)$ は正弦波である。図 (c) に示す平面内の点は、状態変数 θ と ω の組に対応する。これを位相図 (phase plot) と呼ぶ。時間 t の経過とともに θ と ω の組は図に示す長円内を時計回りに移動する。別の初期値 $\theta(0) = 0 \text{ rad}$ 、 $\omega(0) = \pi/3 \text{ [rad/s]}$ のもとで解くと、**図 2.3** が得られる。この例においても、振れ角 $\theta(t)$ は正弦波である。

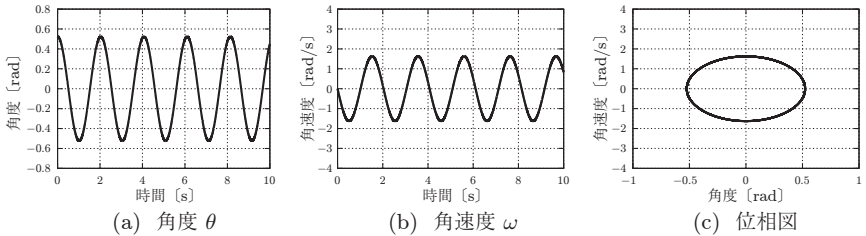


図 2.2 単振り子の運動のシミュレーション結果
($\theta(0) = \pi/6 \text{ [rad]}$ 、 $\omega(0) = 0 \text{ rad/s}$)

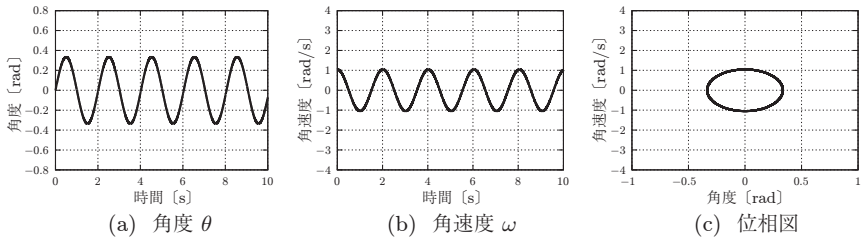


図 2.3 単振り子の運動のシミュレーション結果
($\theta(0) = 0 \text{ rad}$ 、 $\omega(0) = \pi/3 \text{ [rad/s]}$)

図 2.2 と図 2.3 からわかるように、式 (2.3) の解は正弦波の振動である。これは、振り子が往復運動を繰り返すという現象を確かに表している。一方、式 (2.3) の解では振動の振幅は一定のまま変わらない。実際の振り子では、時間の経過とともに振幅は減少し、最終的には振り子の運動は止まる。モデルの解と実際の挙動が一致しないということは、モデルで考慮されていない要素がある

索引

【あ】	
安定	67, 103, 138
【い】	
位相図	5, 36
移動体	149
【う】	
宇宙機	118
運動エネルギー	76, 81, 91, 95, 106, 115, 133, 189
運動方程式	4, 11, 16, 19, 22, 42, 102, 163
【お】	
オイラー角	124
オイラーの運動方程式	98, 121, 139, 142, 145
オイラー法	26
オフセット	40
【か】	
回転	63, 93
回転行列	94
外乱トルク	134
開リンク機構	15, 80
角運動量	133
角運動量ベクトル	122, 142, 145
過減衰	56
慣性行列	91, 96
慣性座標系	127
慣性主軸モーメント	121

慣性モーメント	77, 96, 164
【き】	
基準座標系	123, 127
機体座標系	123, 127
逆起電力	11
極座標表現	65
キルヒホッフの法則	11
近傍	103
【く】	
区分線形補間	87, 91
クリストッフエル記号	100
【け】	
減衰振動	57
【こ】	
剛性行列	89
固有多項式	67, 104
固有値	53, 67
固有方程式	41, 53, 68, 138, 143
【さ】	
サーボモータ	14
作用積分	77
三軸制御衛星	120
【し】	
四元数	101
仕事	73, 76, 81, 87, 90
姿勢制御	118
シミュレーション	2, 13, 25

重根	59
重力傾度トルク	135
状態遷移行列	51
状態変数	4, 17, 25
状態変数ベクトル	29, 44, 50
常微分方程式	3, 11, 110, 160
初期値	4, 103
【す】	
ステップ幅	25, 28
スピン衛星	119
スピン速度	121
【せ】	
制約	7, 19, 21, 74, 87, 89, 92, 94, 101
制約安定化法	30, 92, 99
制約付き最小化問題	74, 90
制約力	20, 32, 75
静力学の変分原理	73, 87
積分ゲイン	40, 43
積分制御	43
節点	87
節点変位ベクトル	88
漸近安定	67, 103, 110, 131, 145
線形化	104, 130, 140, 142, 145
線形常微分方程式	49, 50, 58, 65
【そ】	
相対スピン速度	122
操舵角	152

【た】

対角化 53, 100
 対角化行列 52
 対角行列 51
 たたみ込み 58
 単振動 57

【て】

定常状態 12, 40, 104, 112
 デューティ比 13

【と】

動力学の変分原理 76, 80, 90

【な】

ナイフエッジモデル 151
 内部エネルギー 73, 87

【に】

ニュートン角 122

【は】

パフイアン制約 22, 33, 99
 パルス幅変調 13
 汎関数 87

【ひ】

微分ゲイン 39
 — を数值的に解く 25
 非ホロノミック制約 21, 150

標準形 4, 14, 17, 25, 40,
 42, 46, 47, 82, 86,
 93, 131, 138, 144
 比例ゲイン 39, 43
 比例制御 39, 42
 比例積分制御 45
 比例積分微分制御 40, 111
 比例微分制御 39

【ふ】

不安定 67, 103
 ファンデルポールの方程式 36
 フィードバック制御 38

【へ】

閉リンク機構 18, 83
 変分 74, 77

【ほ】

ホイン法 26
 ポテンシャルエネルギー 73,
 76, 81, 87, 90, 106, 111
 ボールホード 133
 ホロノミック制約 7, 78, 85, 92, 150

【も】

モータ定数 11
 モデリング 1, 3, 10, 15, 18, 21, 41
 モデル 1
 コンピュータ — 1

数式 — 1
 モーメントベクトル 98

【や】

ヤコビ行列 20, 85

【ゆ】

有限要素法 90

【ら】

ラウスの安定判別法 44, 68, 144
 ラグランジアン 77, 83, 92, 96, 189
 ラグランジュの運動方程式 77, 82, 85, 92, 97, 189
 ラグランジュの未定乗数 20, 74, 78, 90, 96
 ラサールの安定定理 110

【り】

リアプノフ関数 109, 113, 132
 リアプノフの安定定理 110
 力学的エネルギー 106, 116
 リプシッツ条件 35
 リミットサイクル 176
 臨界減衰 30, 61

【る】

ルンゲ・クッタ・フェール
 ベルグ法 28
 ルンゲ・クッタ法 26, 141

【C】

CSM 30

【D】

DC モータ 10, 166

【F】

FEM 90

【P】

P 制御 39

PD 制御 39, 46
 PI 制御 45, 165
 PID 制御 40, 47
 PWM 13

—— 著者略歴 ——

平井 慎一（ひらい しんいち）

- 1985年 京都大学工学部数理工学科卒業
- 1987年 京都大学大学院工学研究科修士課程修了（数理工学専攻）
- 1989年 マサチューセッツ工科大学客員研究員
- 1990年 京都大学大学院工学研究科博士課程単位取得退学（数理工学専攻）
- 1991年 工学博士（京都大学）
- 1995年 大阪大学助教授
- 1996年 立命館大学助教授
- 2002年 立命館大学教授
- 現在に至る

坪内 孝司（つばうち たかし）

- 1983年 筑波大学第一学群自然科学類卒業
- 1988年 筑波大学大学院博士課程工学研究科修了（電子・情報工学専攻）
工学博士
- 1999年 筑波大学助教授
- 2006年 筑波大学教授
- 現在に至る

秋下 貞夫（あきした さだお）

- 1961年 京都大学工学部航空工学科卒業
- 1961年 プリンス自動車工業株式会社入社
- 1964年 三菱電機株式会社中央研究所
- 1980年 工学博士（東京大学）
- 1988年 立命館大学教授
- 2004年 立命館大学名誉教授

モデリングと制御

Modeling and Control

© Hirai, Tsubouchi, Akishita 2021

2021年5月26日 初版第1刷発行

検印省略

著者 平井 慎一
坪内 孝司
秋下 貞夫
発行者 株式会社 コロナ社
代表者 牛来 真也
印刷所 三美印刷株式会社
製本所 有限会社 愛千製本所

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844 · 電話 (03) 3941-3131(代)

ホームページ <https://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-04518-5 C3353 Printed in Japan

(柏原) G



JCCOPY <出版者著作権管理機構 委託出版物>

本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつと事前に、出版者著作権管理機構（電話 03-5244-5088, FAX 03-5244-5089, e-mail: info@jcopy.or.jp）の許諾を得てください。

本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めていません。落丁・乱丁はお取替えいたします。