

機械系 教科書シリーズ 18

---

# 機械力学 (増補)

工学博士 青木 繁 著

コロナ社

## 機械系 教科書シリーズ編集委員会

編集委員長	木本 恭司	(元大阪府立工業高等専門学校・工学博士)
幹 事	平井 三友	(大阪府立工業高等専門学校・博士(工学))
編 集 委 員	青木 繁	(東京都立産業技術高等専門学校・工学博士)
(五十音順)	阪部 俊也	(奈良工業高等専門学校・工学博士)
	丸茂 榮佑	(明石工業高等専門学校・工学博士)

(2007年3月現在)

## 刊行のことば

大学・高専の機械系のカリキュラムは、時代の変化に伴い以前とはずいぶん変わってきました。

一番大きな理由は、機械工学がその裾野を他分野に広げていく中で境界領域に属する学問分野が急速に進展してきたという事情にあります。例えば、電子技術、情報技術、各種センサ類を組み込んだ自動工作機械、ロボットなど、この間のめざましい発展が現在の機械工学の基盤の一つになっています。また、エネルギー・資源の開発とともに、省エネルギーの徹底化が緊急の課題となっています。最近では新たに地球環境保全の問題が大きくクローズアップされ、機械工学もこれを従来にも増して精神的支柱にしなければならない時代になってきました。

このように学ぶべき内容が増えているにもかかわらず、他方では「ゆとりある教育」が叫ばれ、高専のみならず大学においても卒業までに修得すべき単位数が減ってきているのが現状です。

私は1968年に高専に赴任し、現在まで三十数年間教育現場に携わってまいりました。当初に比べて最近では機械工学を専攻しようとする学生の目的意識と力がじつにさまざまであることを痛感しております。こうした事情は、大学をはじめとする高等教育機関においても共通するのではないかと思います。

修得すべき内容が増える一方で単位数の削減と多様化する学生に対応できるように、「機械系教科書シリーズ」を以下の編集方針のもとで発刊することに致しました。

1. 機械工学の現分野を広く網羅し、シリーズの書目を現行のカリキュラムに則った構成にする。
2. 各書目においては基礎的な事項を精選し、図・表などを多用し、わかり

ii 刊 行 の こ と ば

やすい教科書作りを心がける。

3. 執筆者は現場の先生方を中心とし、演習問題には詳しい解答を付け自習も可能なように配慮する。

現場の先生方を中心とした手作りの教科書として、本シリーズを高専はもとより、大学、短大、専門学校などで機械工学を志す方々に広くご活用いただけることを願っています。

最後になりましたが、本シリーズの企画段階からご協力いただいた、平井三友 幹事、阪部俊也、丸茂榮佑、青木繁の各委員および執筆を快く引き受けていただいた各執筆者の方々に心から感謝の意を表します。

2000年1月

編集委員長 木本 恭司

## まえがき

機械力学は、機械の運動に関することを扱うものである。「機械力学」のタイトルのついた多くの本が出版されているが、その内容は広範囲にわたっている。本によっては主として工業力学を扱ったもの、機構学を扱ったもの、場合によっては材料力学あるいは自動制御に関連する内容を扱ったものなどがある。一般には、物体の運動を説明するために用いられる動力学を扱い、特に振動に関連する内容を扱ったものが多い。

本書では、おもに振動に関連する内容を取り入れた。振動といっても対象としては、ばねにおもりをつるしたものや、糸におもりを付けた振り子のような簡単なものから大形のプラントのような複雑なものまでである。近年、振動が大きな社会問題となっている。例えば、家庭用機器、産業用機械や交通機関などによって発生する振動・騒音や、大地震における建物などの振動がある。このような振動を防止し、問題を解決することも振動を学ぶ一つの目的である。

これらのことを踏まえ、本書では、振動の基礎的なことについて記述することにする。1章では、振動を学ぶうえで知らなければならない、力学の基礎、および振動問題を解くために必要な数学を扱う。これらの知識がある読者は、2章から始めて、必要に応じて参考にして欲しい。

2章と3章では、振動を考えるうえで最も基本となる1自由度系振動について述べる。2章では、最初に条件を与えて、その後は力を加えない場合の振動である、自由振動を扱う。衝撃的な力を受けた場合の振動についてもこの章で示す。この章で出てくる「固有振動数」および「減衰比」は、3章以降でも頻繁に出てくる。3章では、正弦波で表される規則的な力や変位を入力として受ける1自由度系の強制振動について述べる。4章では、多自由度系の振動を解くための基礎となる2自由度系の振動について述べる。2自由度系になると

計算が複雑になる。まず、自由振動を求める方法を示し、自由振動の特徴について述べる。さらに強制振動についても示す。5章では、2自由度系で述べたことを応用して、多自由度系の振動を解くための方法について述べる。6章では、連続体の振動について述べ、弦、棒およびはりの振動を扱う。連続体の振動を求める方法を示し、振動の特徴についても扱った。

7章では、回転体に伴う振動問題の基礎について述べ、おもに不釣合いのある回転体の振動を扱う。不釣合いのある回転体を釣り合わせる方法も示した。8章では、3章および4章の内容を応用した振動の防止について述べる。3章および4章で述べたことを別の観点から見ることにより、振動を防止する方法を示した。また、動吸振器およびフードダンパについても述べる。9章および10章では、2~4章で扱ったことを、それぞれ複素数およびラプラス変換を用いて解く方法について述べる。複素数またはラプラス変換を用いると、振動の計算を容易に解くことができる。

理工系の教科書は、最初から最後まで読んで理解するというものではない。途中の式の展開や、得られた結果と実際の現象との対応を考え、問題も自分で解いてみなければなかなか力はつかない。本書では、できるだけ式の展開をわかりやすく記述した。しかしながら、読者自身もノートなどに式の展開をして、確実に自分のものにして欲しい。式の展開方法には、いくつかの方法があり得るので、本書で示した方法とは別の展開方法などもあり得る。演習問題<sup>†</sup>についても別の解き方もあり得る。演習問題も例題などを参考に、できるだけ解答に頼らずに解いて欲しい。

振動は奥の深い分野である。本書で扱った内容のほかに、不規則振動や非線形振動、あるいは音響なども振動を考えるうえで重要である。また、連続体や平面や立体の振動も興味のある問題であるし、振動の計測や測定の原理なども重要である。これらについては専門書も数多く出版されているので、さらに知識を深めて欲しい。

2004年7月

著 者

<sup>†</sup> 13刷にあたり、演習問題(☆印)を追加した。

# 目 次

## 1. 総 論

1.1	力学の基礎	1
1.2	力学モデル	2
1.3	運動方程式	3
1.4	三角関数	5
1.5	行 列	6
1.6	行列式	8
1.7	慣性モーメント	12
1.8	平行軸の定理	14
	演習問題	14

## 2. 1自由度系の振動

2.1	減衰のない1自由度系	16
2.1.1	運動方程式	16
2.1.2	1自由度系の例	20
2.2	減衰のある1自由度系	26
2.2.1	運動方程式	26
2.2.2	減衰振動	29
2.3	衝撃入力を受ける1自由度系	34
2.3.1	単位インパルス応答関数	34
2.3.2	任意の入力を受ける系の応答	36
	演習問題	40

### 3. 1 自由度系の強制振動

3.1	力入力を受ける1自由度系	42
3.2	半パワー法	48
3.3	変位入力を受ける1自由度系	49
	演習問題	55

### 4. 2 自由度系の振動

4.1	運動方程式	57
4.2	固有振動数および固有振動モード	59
4.3	力入力を受ける2自由度系の強制振動	65
4.4	変位入力を受ける2自由度系の強制振動	67
	演習問題	70

### 5. 多自由度系の振動

5.1	多自由度系の自由振動	72
5.2	多自由度系の強制振動	75
	演習問題	78

### 6. 連続体の振動

6.1	弦の振動	79
6.2	棒の縦振動	82
6.3	棒のねじり振動	83
6.4	棒のせん断振動	85
6.5	はりの横振動	86
	演習問題	93



## 7. 回転体の振動

7.1	回転体の危険速度	94
7.2	不釣合いによる励振を受ける振動	97
7.3	回転体の釣合せ	99
7.3.1	1面釣合せ	99
7.3.2	2面釣合せ	100
	演習問題	105

## 8. 振動の防止

8.1	振動絶縁	106
8.2	基礎絶縁	108
8.3	動吸振器	109
8.3.1	減衰のない動吸振器	109
8.3.2	減衰のある動吸振器	111
8.3.3	フードダンパ	116
	演習問題	120

## 9. 複素数による振動計算

9.1	複素数の基礎	121
9.1.1	複素数とは	121
9.1.2	複素数の表し方	121
9.1.3	複素数の計算	124
9.1.4	オイラーの公式	126
9.1.5	特殊な場合の絶対値と偏角の求め方	127
9.2	複素数を用いた1自由度系の振動の解法	128
9.2.1	減衰のない1自由度系	128
9.2.2	減衰のある1自由度系	129
9.3	複素数を用いた1自由度系の強制振動の解法	130

9.3.1	力入力を受ける1自由度系	131
9.3.2	変位入力を受ける1自由度系	132
9.4	複素数を用いた2自由度系の固有振動数の求め方	133
9.5	複素数を用いた2自由度系の強制振動の解法	134
9.5.1	力入力を受ける2自由度系	134
9.5.2	変位入力を受ける2自由度系	135
	演習問題	137

## 10. ラプラス変換による振動計算

10.1	ラプラス変換とは	138
10.2	ラプラス変換を用いた1自由度系の振動の解法	140
10.2.1	減衰のない1自由度系	140
10.2.2	減衰のある1自由度系	141
10.2.3	衝撃入力を受ける1自由度系	142
10.2.4	任意の入力を受ける系の応答	144
10.3	ラプラス変換を用いた1自由度系の強制振動の解法	145
10.3.1	力入力を受ける1自由度系	146
10.3.2	変位入力を受ける1自由度系	147
10.4	ラプラス変換を用いた2自由度系の固有振動数の求め方	148
10.5	ラプラス変換を用いた2自由度系の強制振動の解法	149
10.5.1	力入力を受ける2自由度系	149
10.5.2	変位入力を受ける2自由度系	150
	演習問題	152

参 考 文 献	153
---------	-----

演習問題解答	154
--------	-----

索 引	192
-----	-----

# 総論

振動を扱ううえで大切なことは、運動を数学的に記述し、それを数学的に解くことである。そのためには、力の釣合いを考えるための力学について知らなければならない。さらに、力学でものを考える場合には、実際の構造物をモデル化しなければならない。ここでは、これらの基本的なことについて記述する。

## 1.1 力学の基礎

力学の基礎になる法則は、有名なニュートンの法則 (Newton's laws of motion) である。第1法則は慣性の法則で、物体に力が加わらない限り静止している物体は静止し、運動している物体は等速直線運動をする。第2法則は力が作用する物体の運動に関する法則で、物体に力が作用すると質量に応じた加速度を生じる。力は質量と加速度の積となる。第3法則は作用・反作用の法則で、物体に力を加えるとその物体から反対向きで同じ大きさの力を受ける。これらの法則の中で振動に関するものは第2法則である。

力を  $F$  とし、 $m$  を質量、 $a$  を加速度とすると次式で表される。

$$ma = F \quad (1.1)$$

この式から次式が得られる。

$$F - ma = 0 \quad (1.2)$$

この式は、**ダランベールの原理** (d'Alembert's principle) と呼ばれ、 $ma$  で表される慣性力を見かけの力と考え、物体に作用する力との差が0になること

を表している。すなわち、振動のように時間的に変化するような運動に対しても、静的な力の釣合いと同様に考えてよいことを示している。

振動では、慣性力と物体に作用する力を別に扱ったほうが考えやすいので、本書では式 (1.1) を使う。

## 1.2 力学モデル

振動を数学的に解くためには、**運動方程式** (equation of motion) と呼ばれる**微分方程式** (differential equation) を導く必要がある。そのためには、運動する物体あるいは構造物に対する運動方程式を導きやすいようにしなければならない。その過程で、理想化や簡略化などをすることもある。このことをモデル化という。

例えば、図 1.1 に示すような自由端におもりの付いた片持ばりの振動を解く場合を考える。片持ばりの振動は、自由端が一番揺れやすいことが予測される。自由端の振動だけを知りたい場合には、質量を自由端に集中させ、はり自体をばねとすると、図 1.2 に示すようなおもりとばねによって形成される力学モデルを考えればよい。このモデルで、おもりに相当する部分は質点と呼ばれる。質点は大きさが点で、そこに質量が集中していると考えられる点である。このような点として重心を選ぶことが多い。

力学モデルで使われる記号としては、図 1.3 に示すようなものがある。

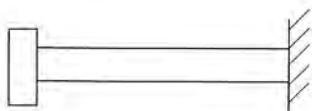


図 1.1 自由端におもりの付いた片持ばり



図 1.2 おもりとばねによる力学モデル

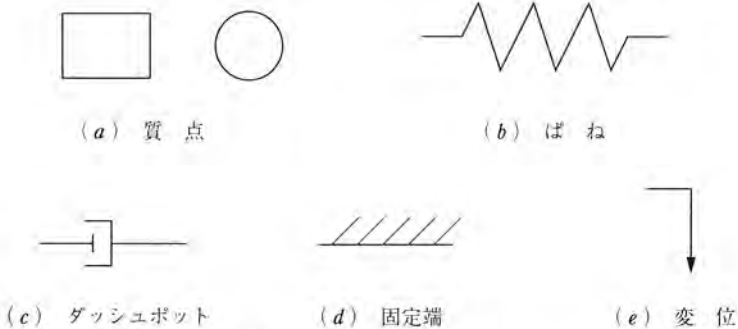


図 1.3 力学モデルで使われる記号

### 1.3 運動方程式

本書で扱う運動方程式として記述される微分方程式は、一般に、2階の定数係数線形微分方程式である。数学では関数として  $y(x)$  を用いることが多く、この場合は  $x$  が独立変数、 $y$  が従属変数である。したがって、導関数は  $dy/dx$  で表される。振動では時間に関する量を扱うので、関数として  $x(t)$  を用いる。この場合は  $t$  が独立変数で  $x$  が従属変数である。したがって、導関数は  $dx/dt$  で表される。詳細は 2 章で述べるが、つぎの微分方程式を考える。

$$a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0 \quad (1.3)$$

この微分方程式の解は  $x = e^{\lambda t}$  とおいて式 (1.3) に代入すると

$$(a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda t} = 0 \quad (1.4)$$

両辺を  $e^{\lambda t}$  で割ると

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (1.5)$$

式 (1.5) は  $\lambda$  に関する 2 次方程式であるから、判別式  $b^2 - 4ac$  によって、異なる 2 実根、重根、虚根をもつ場合がある。それぞれの場合について式 (1.3) の微分方程式の解はつぎのようになる。

(1) 異なる 2 実根  $\lambda_1$  および  $\lambda_2$  をもつ ( $b^2 - 4ac > 0$ ) 場合

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (1.6)$$

(2) 重根  $\lambda$  をもつ ( $b^2 - 4ac = 0$ ) 場合

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t} \quad (1.7)$$

(3) 虚根 (共役複素数)  $\lambda_1 = A + Bi$  および  $\lambda_2 = A - Bi$  をもつ ( $b^2 - 4ac < 0$ ) 場合

$$x = e^{At} (C_1 \cos Bt + C_2 \sin Bt) \quad (1.8)$$

ここで、 $C_1$  および  $C_2$  は任意定数であり、初期条件 ( $t = 0$  のときの  $x$  および  $dx/dt$  の条件) によって決まる。

**例題 1.1** つぎの微分方程式の解を求めよ。

$$(1) \frac{d^2 x}{dt^2} + 8 \frac{dx}{dt} + 15x = 0$$

$$(2) \frac{d^2 x}{dt^2} - 4 \frac{dx}{dt} + 4x = 0$$

$$(3) \frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 4x = 0$$

**【解答】** (1)  $x = e^{\lambda t}$  とおくと式 (1.5) は

$$\lambda^2 + 8\lambda + 15 = 0$$

となり、判別式より

$$8^2 - 4 \times 1 \times 15 > 0$$

であるから異なる 2 実根をもつ。 $\lambda_1 = -5$  および  $\lambda_2 = -3$  となるので、式 (1.6) から

$$x = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-3t}$$

(2)  $x = e^{\lambda t}$  とおくと式 (1.5) は

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

となり、判別式より

$$(-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$$

であるから重根をもつ。 $\lambda = 2$  となるので、式 (1.7) から

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{2t}$$

(3)  $x = e^{\lambda t}$  とおくと式 (1.5) は

$$\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$$

となり、判別式より

$$2^2 - 4 \times 1 \times 4 < 0$$

であるから虚根をもつ。 $\lambda_1 = -1 + \sqrt{3}i$  および  $\lambda_2 = -1 - \sqrt{3}i$  となるので、式 (1.8) から

$$x = e^{-t}(C_1 \cos \sqrt{3}t + C_2 \sin \sqrt{3}t) \quad \diamond$$

## 1.4 三角関数

本書では振動を扱うので、微分方程式が式 (1.8) の解をもつ場合を対象とする。規則正しい振動は、図 1.4 に示すような一定の角速度で円運動をする点の  $x$  軸または  $y$  軸上への投影となる。点が  $x$  軸上の  $(r, 0)$  から反時計回りに一定の角速度  $\omega$  で回転すると

$$x = r \cos \omega t \quad (1.9)$$

$$y = r \sin \omega t \quad (1.10)$$

で表される。式 (1.9) および式 (1.10) の時間  $t$  に関する微分は

$$\frac{dx}{dt} = -r\omega \sin \omega t \quad (1.11)$$

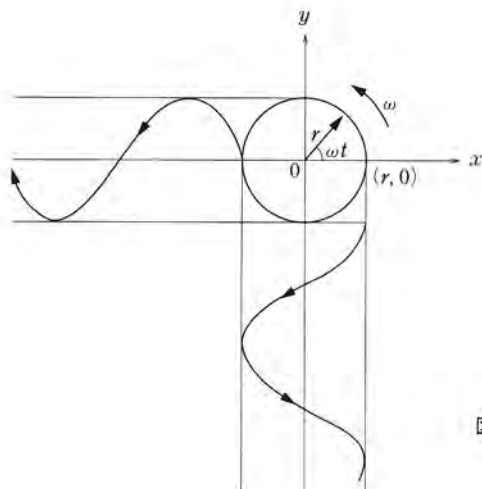


図 1.4 一定の角速度で円運動をする点の  $x$  軸および  $y$  軸上への投影

# 索 引

<b>【い】</b>	強制振動	42	振幅倍率	45	
位相角	19	共役複素数	125	<b>【す】</b>	
位相曲線	45	行列	6	ステップ応答	39
1自由度系	16	行列式	8	ステップ入力	38
一般化座標	76	極形式	123	<b>【せ】</b>	
		虚数部	121	制振	106
<b>【う】</b>	<b>【け】</b>			絶対値	122
運動方程式	2, 16, 25, 72	減衰係数	27	ゼロベクトル	72
運動量	35	減衰固有円振動数	32	全振幅	18
		減衰比	27	せん断応力	85
<b>【え】</b>	<b>【こ】</b>			せん断弾性係数	86
遠心力	99	剛性行列	72	せん断ひずみ	85
		固有円振動数	19	せん断力	85
<b>【お】</b>		固有周期	19	<b>【た】</b>	
オイラーの公式	126	固有振動数	19	対数減衰率	32
		固有振動モード	62	多自由度系	57
<b>【か】</b>		固有値	72	畳込み積分	38
回転運動	12, 94	固有ベクトル	73	縦弾性係数	83
回転中心	94	<b>【き】</b>		グランベールの原理	1
ガウス平面	122	最適減衰比	116	単位インパルス応答関数	36
過減衰	28	<b>【し】</b>		単位インパルス関数	35
加速度ベクトル	72	実数部	121	単振り子	21
片振幅	19	質点	2	<b>【ち】</b>	
過渡振動	43	質量行列	72	力の伝達率	107
慣性モーメント	12	自由振動	16	力ベクトル	72
慣性力	42	修正不釣合い量	101	直線運動	12
		主振動体	109	<b>【て】</b>	
<b>【き】</b>		純虚数	124	定常応答	45
危険速度	96	振動絶縁	106	定常振動	43
基礎絶縁	108	振動の節	62	転置行列	73
逆ラプラス変換	138	振 幅	18		
共 振	45				
共振曲線	45				
共振点	45				



<b>【と】</b>		複素数	121	<b>【も】</b>	
動吸振器	109	複素平面	122	モード解析法	71
特性方程式	27, 128	不釣り合い量	100	モード行列	73
<b>【に】</b>		物理振り子	23	モードベクトル	73
2自由度系	57	フードダンパ	116	<b>【ら】</b>	
ニュートンの法則	1	<b>【へ】</b>		ラプラス演算子	138
<b>【ね】</b>		平行軸の定理	14	ラプラス変換	138
粘性減衰力	27	並進運動	12	<b>【り】</b>	
<b>【は】</b>		変位ベクトル	72	力学モデル	2
半パワー法	48	偏角	122	力積	34
<b>【ひ】</b>		<b>【ほ】</b>		臨界減衰	29
ひずみ	83	防振	106	臨界減衰係数	27
微分方程式	2	<b>【ま】</b>		<b>【れ】</b>	
<b>【ふ】</b>		曲げ剛性	86	連続体	57
		<b>【め】</b>			
		免震	106		

— 著者略歴 —

- 1976年 東京都立大学工学部機械工学科卒業  
1976年 東京都立大学工学部機械工学科助手  
1985年 工学博士（東京都立大学）  
1987年 東京都立工業高等専門学校講師  
1990年 東京都立工業高等専門学校助教授  
2001年 東京都立工業高等専門学校教授  
2006年 東京都立産業技術高等専門学校教授  
2019年 東京都立産業技術高等専門学校名誉教授

機械力学（増補）

Dynamics of Machinery

© Shigeru Aoki 2004

- 2004年 9月10日 初版第1刷発行  
2018年 4月30日 初版第13刷発行（増補）  
2020年 1月10日 初版第15刷発行（増補）

検印省略

著者	あおき	き	しげる
	青	木	繁
発行者	株式会社	コロナ社	
	代表者	牛来真也	
印刷所	新日本印刷株式会社		
製本所	有限会社	愛千製本所	

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844・電話 (03) 3941-3131 (代)

ホームページ <https://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-04484-3 C3353 Printed in Japan

（安達）



JCOPY <出版者著作権管理機構 委託出版物>

本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつど事前に、出版者著作権管理機構（電話 03-5244-5088, FAX 03-5244-5089, e-mail: info@jcopy.or.jp）の許諾を得てください。

本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めていません。落丁・乱丁はお取替えいたします。