機械系 教科書シリーズ 18

機械力学（増補）

工学博士 青木　繁 著

コロナ社

刊行のことば

大学・高専の機械系のカリキュラムは，時代の変化に伴い以前とはずいぶん変わってきました。

一番大きな理由は，機械工学がその裾野を他分野に広げていく中で境界領域に属する学問分野が急速に進展してきたという事情にあります。例えば，電子技術，情報技術，各種センサ類を組み込んだ自動工作機械，ロボットなど，この間のめざましい発展が現在の機械工学の基盤の一つになっています。また，エネルギー・資源の開発とともに，省エネルギーの徹底化が緊急の課題となっています。最近では新たに地球環境保全の問題が大きくクローズアップされ，機械工学もこれを従来にも増して精神的支柱にしなければならない時代になってきました。

このように学ぶべき内容が増えているにもかかわらず，他方では「ゆとりある教育」が叫ばれ，高専のみならず大学においても卒業までに修得すべき単位数が減ってきているのが現状です。

私は 1968 年に高専に赴任し，現在まで三十数年間教育現場に携わってまいりました。当初に比べて最近では機械工学を専攻しようとする学生の目的意識と力がじつにさまざまであることを痛感しております。こうした事情は，大学をはじめとする高等教育機関においても共通するのではないかと思います。

修得すべき内容が増える一方で単位数の削減と多様化する学生に対応できるように，「機械系教科書シリーズ」を以下の編集方針のもとで発刊することに致しました。

1. 機械工学の現分野を広く網羅し，シリーズの書目を現行のカリキュラムに則った構成にする。
2. 各書目においては基礎的な事項を精選し，図・表などを多用し，わかり

やすい教科書作りを心がける。

3. 執筆者は現場の先生方を中心とし，演習問題には詳しい解答を付け自習も可能なように配慮する。

現場の先生方を中心とした手作りの教科書として，本シリーズを高専はもとより，大学，短大，専門学校などで機械工学を志す方々に広くご活用いただけることを願っています。

最後になりましたが，本シリーズの企画段階からご協力いただいた，平井三友幹事，阪部俊也，丸茂榮佑，青木繁の各委員および執筆を快く引き受けていただいた各執筆者の方々に心から感謝の意を表します。

2000年1月

編集委員長　木本　恭司

まえがき

機械力学は，機械の運動に関することを扱うものである。「機械力学」のタイトルのついた多くの本が出版されているが，その内容は広範囲にわたっている。本によっては主として工業力学を扱ったもの，機構学を扱ったもの，場合によっては材料力学あるいは自動制御に関連する内容を扱ったものなどがある。一般には，物体の運動を解明するために用いられる動力学を扱い，特に振動に関連する内容を扱ったものが多い。

本書では，おもに振動に関連する内容を取り入れた。振動といっても対象としては，ばねにおもりをつるしたものや，糸におもりを付けた振り子のような簡単なものから大形のプラントのような複雑なものまである。近年，振動が大きな社会問題となっている。例えば，家庭用機器，産業用機械や交通機関などによって発生する振動・騒音や，大地震における建物などの振動がある。このような振動を防止し，問題を解決することも振動を学ぶ一つの目的である。

これらのことを踏まえ，本書では，振動の基礎的なことについて記述することにする。***1*** 章では，振動を学ぶうえで知らなければならない，力学の基礎，および振動問題を解くために必要な数学を扱う。これらの知識がある読者は，***2*** 章から始めて，必要に応じて参考にして欲しい。

2 章と ***3*** 章では，振動を考えるうえで最も基本となる1自由度系振動について述べる。***2*** 章では，最初に条件を与えて，その後は力を加えない場合の振動である，自由振動を扱う。衝撃的な力を受けた場合の振動についてもこの章で示す。この章で出てくる「固有振動数」および「減衰比」は，***3*** 章以降でも頻繁に出てくる。***3*** 章では，正弦波で表される規則的な力や変位を入力として受ける1自由度系の強制振動について述べる。***4*** 章では，多自由度系の振動を解くための基礎となる2自由度系の振動について述べる。2自由度系になると

計算が複雑になる。まず，自由振動を求める方法を示し，自由振動の特徴について述べる。さらに強制振動についても示す。**5**章では，2自由度系で述べたことを応用して，多自由度系の振動を解くための方法について述べる。**6**章では，連続体の振動について述べ，弦，棒およびはりの振動を扱う。連続体の振動を求める方法を示し，振動の特徴についても扱った。

7章では，回転体に伴う振動問題の基礎について述べ，おもに不釣合いのある回転体の振動を扱う。不釣合いのある回転体を釣り合わせる方法も示した。**8**章では，**3**章および**4**章の内容を応用した振動の防止について述べる。**3**章および**4**章で述べたことを別の観点から見ることにより，振動を防止する方法を示した。また，動吸振器およびフードダンパについても述べる。**9**章および**10**章では，**2**〜**4**章で扱ったことを，それぞれ複素数およびラプラス変換を用いて解く方法について述べる。複素数またはラプラス変換を用いると，振動の計算を容易に解くことができる。

理工系の教科書は，最初から最後まで読んで理解するというものではない。途中の式の展開や，得られた結果と実際の現象との対応を考え，問題も自分で解いてみなければなかなか力はつかない。本書では，できるだけ式の展開をわかりやすく記述した。しかしながら，読者自身もノートなどに式の展開をして，確実に自分のものにして欲しい。式の展開方法には，いくつかの方法があり得るので，本書で示した方法とは別の展開方法などもあり得る。演習問題†についても別の解き方もあり得る。演習問題も例題などを参考に，できるだけ解答に頼らずに解いて欲しい。

振動は奥の深い分野である。本書で扱った内容のほかに，不規則振動や非線形振動，あるいは音響なども振動を考えるうえで重要である。また，連続体や平面や立体の振動も興味のある問題であるし，振動の計測や測定の原理なども重要である。これらについては専門書も数多く出版されているので，さらに知識を深めて欲しい。

2004年7月　　　　著　者

† 13刷にあたり，演習問題（☆印）を追加した。

目　　次

1.　総　　論

2.　1自由度系の振動

3. 1自由度系の強制振動

4. 2自由度系の振動

5. 多自由度系の振動

6. 連続体の振動

7.　回転体の振動

8.　振 動 の 防 止

9.　複素数による振動計算

10. ラプラス変換による振動計算

1

総　　　論

振動を扱ううえで大切なことは，運動を数学的に記述し，それを数学的に解くことである。そのためには，力の釣合いを考えるための力学について知らなければならない。さらに，力学でものを考える場合には，実際の構造物をモデル化しなければならない。ここでは，これらの基本的なことについて記述する。

1.1 力学の基礎

力学の基礎になる法則は，有名な**ニュートンの法則**（Newton's laws of motion）である。第1法則は慣性の法則で，物体に力が加わらない限り静止している物体は静止し，運動している物体は等速直線運動をする。第2法則は力が作用する物体の運動に関する法則で，物体に力が作用すると質量に応じた加速度を生じる。力は質量と加速度の積となる。第3法則は作用・反作用の法則で，物体に力を加えるとその物体から反対向きで同じ大きさの力を受ける。これらの法則の中で振動に関するものは第2法則である。

力を F とし，m を質量，a を加速度とすると次式で表される。

$$ma = F \tag{1.1}$$

この式から次式が得られる。

$$F - ma = 0 \tag{1.2}$$

この式は，**ダランベールの原理**（d'Alember's principle）と呼ばれ，ma で表される慣性力を見かけの力と考え，物体に作用する力との差が0になること

を表している。すなわち，振動のように時間的に変化するような運動に対しても，静的な力の釣合いと同様に考えてよいことを示している。

振動では，慣性力と物体に作用する力を別に扱ったほうが考えやすいので，本書では式（*1.1*）を使う。

1.2 力学モデル

振動を数学的に解くためには，**運動方程式**（equation of motion）と呼ばれる**微分方程式**（differential equation）を導く必要がある。そのためには，運動する物体あるいは構造物に対する運動方程式を導きやすいようにしなければならない。その過程で，理想化や簡略化などをすることもある。このことをモデル化という。

例えば，**図 *1.1*** に示すような自由端におもりの付いた片持ばりの振動を解く場合を考える。片持ばりの振動は，自由端が一番揺れやすいことが予測される。自由端の振動だけを知りたい場合には，質量を自由端に集中させ，はり自体をばねとすると，**図 *1.2*** に示すようなおもりとばねによって形成される力学モデルを考えればよい。このモデルで，おもりに相当する部分は質点と呼ばれる。質点は大きさがない点で，そこに質量が集中していると考えられる点である。このような点として重心を選ぶことが多い。

力学モデルで使われる記号としては，**図 *1.3*** に示すようなものがある。

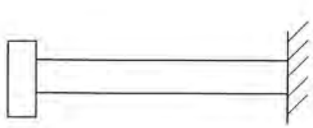

図 *1.1* 自由端におもりの付いた片持ばり

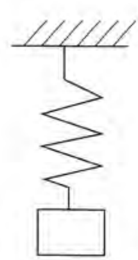

図 *1.2* おもりとばねによる力学モデル

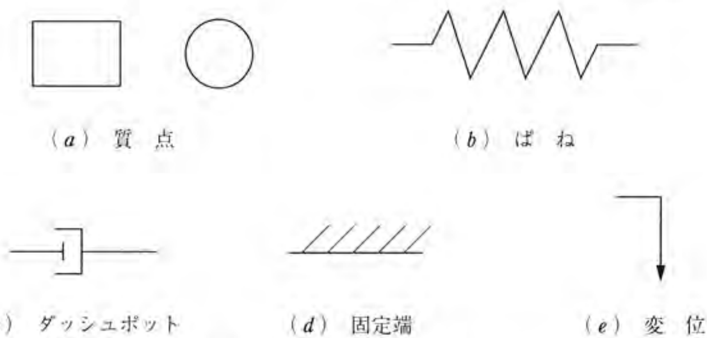

図 *1.3*　力学モデルで使われる記号

1.3 運 動 方 程 式

本書で扱う運動方程式として記述される微分方程式は，一般に，2 階の定数係数線形微分方程式である。数学では関数として $y(x)$ を用いることが多く，この場合は x が独立変数，y が従属変数である。したがって，導関数は dy/dx で表される。振動では時間に関する量を扱うので，関数として $x(t)$ を用いる。この場合は t が独立変数で x が従属変数である。したがって，導関数は dx/dt で表される。詳細は **2** 章で述べるが，つぎの微分方程式を考える。

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0 \tag{1.3}$$

この微分方程式の解は $x = e^{\lambda t}$ とおいて式 (*1.3*) に代入すると

$$(a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda t} = 0 \tag{1.4}$$

両辺を $e^{\lambda t}$ で割ると

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{1.5}$$

式 (*1.5*) は λ に関する 2 次方程式であるから，判別式 $b^2 - 4ac$ によって，異なる 2 実根，重根，虚根をもつ場合がある。それぞれの場合について式 (*1.3*) の微分方程式の解はつぎのようになる。

(1)　異なる 2 実根 λ_1 および λ_2 をもつ ($b^2 - 4ac > 0$) 場合

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \tag{1.6}$$

（2） 重根λをもつ（$b^2 - 4ac = 0$）場合

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t} \tag{1.7}$$

（3） 虚根（共役複素数）$\lambda_1 = A + Bi$ および $\lambda_2 = A - Bi$ をもつ（$b^2 - 4ac < 0$）場合

$$x = e^{At}(C_1 \cos Bt + C_2 \sin Bt) \tag{1.8}$$

ここで，C_1 および C_2 は任意定数であり，初期条件（$t = 0$ のときの x および dx/dt の条件）によって決まる。

例題 *1.1* つぎの微分方程式の解を求めよ。

（1） $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 8\dfrac{dx}{dt} + 15x = 0$

（2） $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 4\dfrac{dx}{dt} + 4x = 0$

（3） $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} + 4x = 0$

【解答】（1） $x = e^{\lambda t}$ とおくと式（*1.5*）は

$$\lambda^2 + 8\lambda + 15 = 0$$

となり，判別式より

$$8^2 - 4 \times 1 \times 15 > 0$$

であるから異なる2実根をもつ。$\lambda_1 = -5$ および $\lambda_2 = -3$ となるので，式（*1.6*）から

$$x = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-3t}$$

（2） $x = e^{\lambda t}$ とおくと式（*1.5*）は

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

となり，判別式より

$$(-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$$

であるから重根をもつ。$\lambda = 2$ となるので，式（*1.7*）から

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{2t}$$

（3） $x = e^{\lambda t}$ とおくと式（*1.5*）は

$$\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$$

となり，判別式より

$$2^2 - 4 \times 1 \times 4 < 0$$

であるから虚根をもつ。$\lambda_1 = -1 + \sqrt{3}\,i$ および $\lambda_2 = -1 - \sqrt{3}\,i$ となるので，式 (1.8) から

$$x = e^{-t}(C_1 \cos \sqrt{3}\,t + C_2 \sin \sqrt{3}\,t)$$ ◇

1.4 三 角 関 数

本書では振動を扱うので，微分方程式が式 (1.8) の解をもつ場合を対象とする。規則正しい振動は，**図 1.4** に示すような一定の角速度で円運動をする点の x 軸または y 軸上への投影となる。点が x 軸上の $(r,\ 0)$ から反時計回りに一定の角速度 ω で回転すると

$$x = r \cos \omega t \tag{1.9}$$

$$y = r \sin \omega t \tag{1.10}$$

で表される。式 (1.9) および式 (1.10) の時間 t に関する微分は

$$\frac{dx}{dt} = -r\omega \sin \omega t \tag{1.11}$$

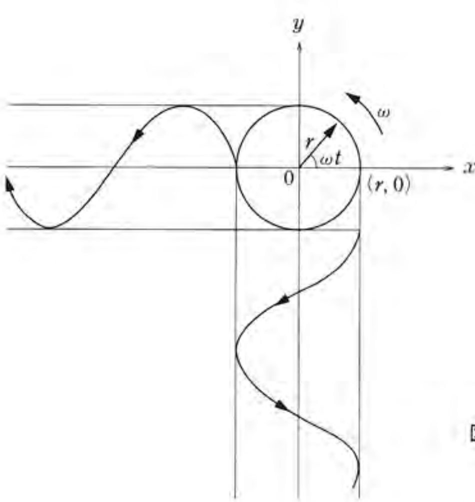

図 1.4 一定の角速度で円運動をする点の x 軸および y 軸上への投影

索　　　　引

―― 著者略歴 ――

1976年　東京都立大学工学部機械工学科卒業
1976年　東京都立大学工学部機械工学科助手
1985年　工学博士（東京都立大学）
1987年　東京都立工業高等専門学校講師
1990年　東京都立工業高等専門学校助教授
2001年　東京都立工業高等専門学校教授
2006年　東京都立産業技術高等専門学校教授
2019年　東京都立産業技術高等専門学校名誉教授

機械力学（増補）
Dynamics of Machinery

2004年9月10日　初版第1刷発行
2018年4月30日　初版第13刷発行（増補）
2020年1月10日　初版第15刷発行（増補）

検印省略

著　者　青木　繁
発行者　株式会社　コロナ社
　　　　代表者　牛来真也
印刷所　新日本印刷株式会社
製本所　有限会社　愛千製本所

112-0011　東京都文京区千石4-46-10
発行所　株式会社　コロナ社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)
ホームページ　https://www.coronasha.co.jp

ISBN 978-4-339-04484-3　C3353　Printed in Japan　(安達)