

---

---

**出版委員会**（平成 23 年度）

委員 長 黒 川 哲 明  
委 員 伊 丹 哲 郎  
（五十音順） 稲 垣 克 彦  
小 野 功  
倉 田 成 人  
末 富 隆 雅  
滑 川 徹  
温 井 一 光  
早 川 朋 久  
村 上 弘 記  
山 口 晃 生

---

---

# ま え が き

本書は、フィードバック制御系を解析・設計するための理論を述べた教科書であり、その構成は以下のとおりである。

**1**章でフィードバック制御の概要を説明した後、**2~6**章で状態方程式に基づく理論の基礎的事項、すなわち遷移行列、等価変換、システムの極、可制御性と可観測性、伝達行列などについて述べている。そのなかで、モード分解やシステムの安定性などを自然な形で導入している。また、安定判別の代数的な手法（ラウスおよびフルビッツの安定判別法）、ラプラス変換を用いた遷移行列の計算法、一般化固有ベクトルに関する簡単な解説、ブロック線図で表現されたシステムの状態方程式の導出方法なども紹介しておいた。

**7**章と**8**章で、フィードバック制御系設計の基礎となる事項を述べている。この2つの章に含まれる状態フィードバックによる極配置、オブザーバ、サーボ系の内部モデル原理、2次形式評価に基づく最適制御系などは、フィードバック制御系設計にとって本質的な事項である。また、この2つの章では、実用的に重要な2自由度性についても説明を加えておいた。

**9~11**章では、フィードバック制御を周波数特性という立場から考察しており、フィードバックと安定性の関連やフィードバック制御系の性能とロバストネスを扱っている。また、古典的と呼ばれているフィードバック制御系の設計手法（位相進み・遅れ制御およびPID制御）の原理も紹介している。

**12**章では、実用上避けることのできない非線形性の取扱い方について簡単な説明を加えた。

自動制御の（より一般的に工学の）教科書の書き方として、2通りの重点の

置き方があると考え。ひとつは「データを入れれば結果が得られる」といったタイプの知識に重点を置いて、即戦力を養成しようという書き方である。もうひとつは、基礎的な考え方や理論をよく理解してもらって、新しいタイプの問題にも応用が効く実力を付けてもらおうという姿勢である。もちろん、この2つの目標は決して矛盾するものではなく、十分なページ数があれば両方を目指すべきところであろう。しかし、実際にはページ数の制約があるので（これは決して出版社の責任ではなく、大学における講義時間の制約を反映したものにほかならないのであるが）、いずれかに偏らざるをえない。その結果、最近では、前者のタイプの教科書が多くなっている。本書は、決して時代の趨勢に逆らうつもりはないが、結果的に後者の姿勢を保った教科書に仕上がったと思う。

本書は企画から10年以上経ってやっと刊行できることになった。著者両名がそれぞれ大病を患ったという事情があったわけだが、その間、辛抱強くお待ちいただいた関係者の方々、特にコロナ社の方には深く感謝している。また、本書は1名の著者が講義に使っていたプリントを種として、もう1名が不十分な部分を補足する形で完成させたものであり、当初のプリント作成に協力していただいた助教授（当時）および秘書の方々にも感謝したい。

2012年3月

荒木光彦  
細江繁幸

# 目 次

## 1. フィードバック制御について

## 2. システムの状態とその変化

2.1 状態方程式	5
2.2 遷移行列	8
2.3 遷移行列の基本的な性質	10
2.4 遷移行列の計算法と固有ベクトル	14
問 題	17

## 3. 等価変換とモード分解

3.1 状態方程式の等価変換	19
3.2 モード分解	21
3.3 実数の範囲のモード分解	24
3.4 一般化固有ベクトルについて	27
問 題	30

## 4. システムの極と安定性

4.1 $A$ の固有値・固有ベクトルを使った遷移行列の表現	31
4.2 システムの極と遷移行列に含まれる関数	34
4.3 システムの安定性	35
4.4 ラウスの安定判別法	37
4.5 フルビッツの安定判別法	39

4.6	リアプノフ方程式	41
問	題	43

## 5. 可制御性と可観測性

5.1	可制御性と可観測性の定義	44
5.2	可制御性の条件	45
5.3	可観測性の条件	49
問	題	50

## 6. 伝達行列 — システムの入出力特性

6.1	伝達行列と伝達関数	51
6.2	伝達関数の最小実現	54
6.3	伝達関数の入出力応答	55
6.4	ブロック線図	58
6.5	ブロック線図で表されるシステムの状態空間表現	60
6.6	システム結合と可制御・可観測性	62
問	題	64

## 7. 極配置法によるレギュレータの設計と追従制御系

7.1	状態フィードバックによる極配置	65
7.2	オブザーバ	69
7.3	オブザーバを用いた出力フィードバックによる極配置	70
7.4	サーボ系と内部モデル原理	73
7.5	2自由度追従制御系	76
問	題	78

## 8. 2次形式評価に基づく最適制御系設計

8.1	最適レギュレータシステム	79
-----	--------------	----

8.2	2自由度 LQI サーボ系	83
問	題	87

## 9. フィードバック制御系の周波数特性と安定性

9.1	システムの周波数特性	88
9.2	ベクトル線図とボード線図	90
9.3	周波数応答とフィードバック制御系の安定性 — ナイキストの安定判別法	96
9.4	安定性のロバストネス	101
9.5	最適システムの円板条件	105
問	題	107

## 10. フィードバック制御系の制御性能と周波数特性

10.1	対目標値応答と感度関数, 相補感度関数	108
10.2	感度条件と相補感度条件の競合	110
10.3	ボード線図における不等式制約	112
10.4	応答の速さと周波数特性	115
問	題	116

## 11. 周波数応答法による制御系設計

11.1	位相進み・遅れ補償	117
11.2	$H_\infty$ 制御	126
11.3	PID 補償	130
問	題	133

## 12. 非線形システム

12.1	非線形システムの線形化	134
12.2	非線形システムの安定性	140

12.3 リアプノフの安定解析.....143

12.4 線形化による非線形システムのリアプノフ安定解析.....146

問 題.....149

**付 録**

ラプラス変換.....150

引用・参考文献.....152

問 題 解 答.....155

索 引.....189

# 1

## フィードバック制御について

本書では、位置・速度・温度・レベル<sup>†</sup>・流量・圧力などの物理量を自動制御する方法について考えていく。この種の自動制御においては、**フィードバック制御** (feedback control) が重要手段である。フィードバック制御システムの基本的な構造は図 1.1 のとおりである。

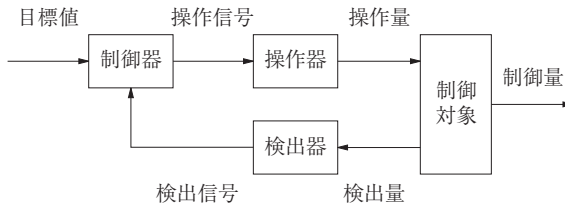


図 1.1 フィードバック制御システムの基本的な構造

図 1.1 で、**制御対象** (controlled object) とは自動制御を行いたい対象、例えば台車、電車、電気炉、タンクなどである (図 1.2)。制御対象のことを**プラント** (plant) と呼ぶことも多い。**制御量** (controlled variable) が「制御したい物理量」で、台車の位置、電車の速度、電気炉の温度、タンク内の液体のレベル<sup>†</sup> などである。**操作量** (manipulating variable) は制御量を変化させるのに使う別の物理量であり、台車に加える力、電車の駆動用モータにかかる電圧、電気炉の加熱用電流、タンクの注入口のバルブ開度などである。

**操作器** (manipulator) は、操作量をつくり出す装置であり、例えばリニアモータ、電圧源、電流源、バルブを動かす駆動装置などになる。これを**アクチュエータ** (actuator) と呼ぶことも多い。操作量の大きさを決めるために操作

<sup>†</sup> タンクなどに蓄えられている液体の「表面の高さ」のことで、プロセス制御分野の専門用語である。「液位」ともいう。



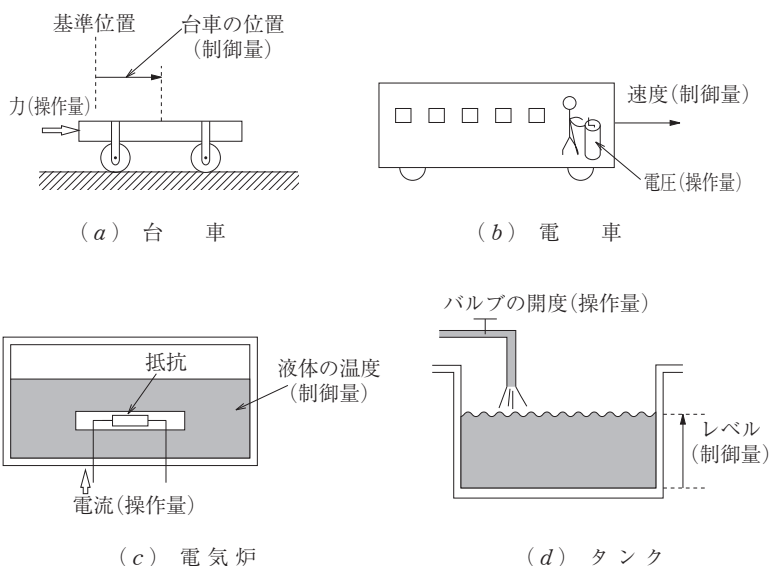


図1.2 制御対象の例

器に与えられる信号を**操作信号** (manipulating signal) と呼ぶ。**制御器** (controller) はこの操作信号をつくる要素で、現在ではほとんどの場合、コンピュータとなっている。このコンピュータのなかで、どのような計算をして操作信号を決めればよいかが本書のおもなテーマとなる。

**目標値** (reference variable) は、制御量をどのように変化させたいかという指令値であり、**設定値** (set-point variable) と呼ぶこともある。**検出器** (detector) は、制御対象の物理量を時々刻々 (すなわちオンラインで) 測定する測定器のことで、測定される物理量を**検出量** (detected variable) と呼ぶ。検出量は制御量そのものを含むことが望ましい。検出器によって得られる測定データが**検出信号** (detected signal) である。

フィードバック制御とは、「結果 (すなわち検出量) をもと (すなわち操作器) に戻して制御する」という意味であり、フィードバック制御システムにおける検出器、制御器、操作器がちょうど人間の感覚器、頭脳、手足に対応する。先に述べたように、現在ではほとんどの制御器がコンピュータであるが、

コンピュータは時間軸においても空間軸においても離散的な動作しかできない。一方、制御対象の諸量は連続的に変化する。両者の整合をとるために、制御装置の入口と出口に、それぞれサンプラー（A-D 変換器）とホールド回路（D-A 変換器）という要素を挿入する。実際の制御の問題では、このような離散/連続間の整合問題をも含めて検討しておく必要がある。しかし、そこまでの話題を1冊の書物でカバーすることは難しいので、本書では制御器も連続的な動作をするものとして考察する。制御器がコンピュータであるために生じる諸問題については、他の書物を参照されたい<sup>7)†</sup>。

なお、フィードバック制御は、目標値がつねに一定の場合と、時間的に変化する場合で設計の方法がわずかだが異なる。この違いに応じて、制御系を**レギュレータ系**と**サーボ系**に分類することがある。前者は定置制御系とも呼ばれ、制御量を一定値に保つことを目的とする。温度、圧力、流量、レベル、成分などのプロセス変量を制御するプロセス制御系は代表例である。一方、サーボ系は追従制御系とも呼ばれ、物体の位置、方位、姿勢など、力学量を制御する制御系が多い。

最後に用語と記号について述べておく。何らかの物理量  $u$  を変化させると他の物理量  $y$  が変化するような対象を、**システム** (system) または系と呼び、 $u$  のことを**入力** (input)、 $y$  のことを**出力** (output) と呼ぶ。制御対象は、操作量を入力、制御量および検出量を出力とする“システム”である。また、フィードバック制御システムは、目標値を入力、制御量を出力とする“システム”である。記号については、虚数単位を  $j$  で表す。

---

† 肩付き数字は、巻末の引用・参考文献の番号を表す。

### コーヒーブレイク

#### フィードバック制御の歴史

浅い水盤に水を満たしてボトルを逆さに入れておくと、水の深さがボトルの口の位置あたりに維持できる。これもフィードバック制御の一種であり、このようなメカニズムは昔から使われてきた (図 1)。

現在の技術に直結するような形でフィードバック制御が重要な役割を果たすようになったのは、産業革命の原動力となった Watt の蒸気機関においてである (図 2)。蒸気機関では、遠心力によって蒸気流量を調節して回転数を制御するガバナーという装置が使われた。ガバナーからオフセットをなくす工夫が積分性補償を生み出し、その振動現象の解析がフィードバック制御理論の出発点となった。

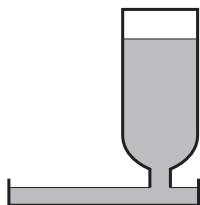


図 1 水位を一定に保つ簡単なメカニズム

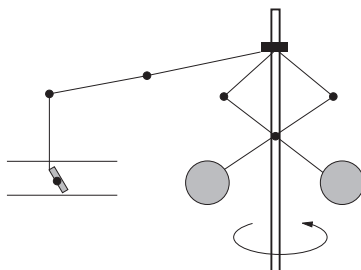


図 2 蒸気機関のガバナー

19 世紀のイギリスでは天文学者 Airy, 物理学者 Maxwell, そして安定性の基本的な解析法である「ラウスの方法」の生みの親 Routh らが活躍した。一方, 19 世紀末から 20 世紀初頭にかけての第 2 次産業革命の進展とともに, 温度, レベル, 流量, 圧力などを計測して自動的に記録する計器が数多く使われるようになった。

1920 年代になると, この計器の動作を利用したフィードバック制御が広まり, 1939 年には比例・積分・微分の 3 動作を備えた汎用型の PID 調節計が発売された。その後, PID 調節計はハードウェア面で著しく改良されてきたが, 制御則としては基本的に同じものが現在でも広く使われている。制御工学, 制御理論の歴史についてより詳しく知りたい方は, 巻末の文献 1)~4)などを参照されたい。

# 2



## システムの状態とその変化



自動制御をうまく行うには、制御対象やフィードバック制御システムの諸量の変化を正確に把握することが重要である。そのためには、状態の概念が中心的役割を果たす。

### 2.1 状態方程式

本書では、つぎの形の常微分方程式で書き表されるシステムを取り扱う。

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad (2.1)$$

$$y = Cx + Du \quad (2.2)$$

ここで、 $u$  はシステムへの入力  $u_i$  がつくる  $m$  次元ベクトルで、**入力ベクトル** (input vector) と呼ぶ。 $y$  はシステムからの出力  $y_i$  がつくる  $p$  次元ベクトルで、**出力ベクトル** (output vector) と呼ぶ。 $x$  は、システムの性質を微分方程式で書き表すために使われる変数  $x_i$  がつくる  $n$  次元ベクトルである。 $x_i$  を**状態変数** (state variable)、 $x$  を**状態ベクトル** (state vector) と呼ぶ。 $A \sim D$  はそれぞれ  $n \times n$ 、 $n \times m$ 、 $p \times n$ 、 $p \times m$  次元の実数行列である。方程式 (2.1)、(2.2) をシステムの**状態方程式** (state equation) と呼び、特に式 (2.1) を、**状態遷移方程式** (state transition equation)、式 (2.2) を**出力方程式** (output equation) という。

#### 例 2.1 おもりとばねのシステム

図 2.1 のように、おもりとばねからなる制御対象を考える。ただし、下の

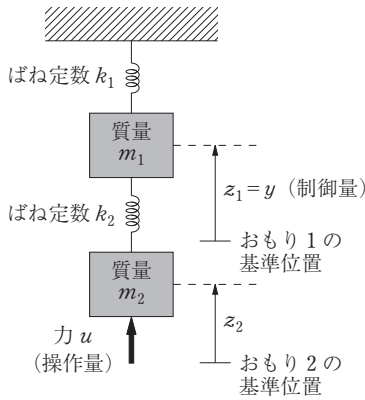


図 2.1 おもりとばねのシステム

おもりに力  $u$  を加えて上のおもりの位置  $y$  を制御するものとする。この制御対象の状態方程式は、つぎのようになる（導出は例 2.2 で行う）。

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{k_1+k_2}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = x_4,$$

$$\frac{dx_4}{dt} = \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{k_2}{m_2}x_3 + \frac{1}{m_2}u \quad (2.3)$$

$$y = x_1 \quad (2.4)$$

ただし、式(2.3)、(2.4)はひとつひとつの変数を使って方程式を書いたもので、ベクトル

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$$

と行列を使えば、式(2.1)、(2.2)のようにまとめることができる。この場合の各ベクトルの次元はつぎのとおりである。

$$m=1, \quad n=4, \quad p=1 \quad (2.5)$$

また

$$a_1 = \frac{k_1}{m_1}, \quad a_2 = \frac{k_2}{m_1}, \quad a_3 = \frac{k_2}{m_2}, \quad b = \frac{1}{m_2} \quad (2.6)$$

とおけば、係数行列はつぎのとおりになる。

# 索 引

<b>【あ】</b>	<b>【け】</b>	
アクチュエータ 1	ゲイン補償器 119	状態方程式 5
安 定 37,37	ゲイン余裕 102	乗法的なモデルの不確かさ 103
安定化補償器 72	限界感度法 132	ジョルダンセル 22
安定極 36	検出器 2	ジョルダンの標準形 21
安定限界 36	検出信号 2	ジョルダンブロック 22
安定である 36	検出量 2	自励系 10
安定判別法 37		<b>【す】</b>
	<b>【こ】</b>	スカラール系 7
<b>【い】</b>	コンパニオンフォーム 23	<b>【せ】</b>
位相遅れ補償 123	<b>【さ】</b>	制御器 2
位相進み補償 120	最小位相推移系 114	制御対象 1
位相余裕 102	最適レギュレータ問題 79	制御量 1
	サーボ系 3,73	正定関数 143
<b>【お】</b>	<b>【し】</b>	接線近似による線形化 137
折れ点周波数 94	時間応答 8	設定値 2
	システム 3	遷移行列 8
<b>【か】</b>	——の軌道 9	(全状態) オブザーバ 70
外部変数 44	——の極 34	<b>【そ】</b>
可観測 44	——の次数 7	操作器 1
可観測性行列 49	実システム 134	操作信号 2
可観測性グラミアン 49	実数の範囲のモード分解 24	操作量 1
可制御 44	時定数 55	相 似 21
可制御性行列 47	時不要システム 7	相似変換 21
可制御性グラミアン 45	時変システム 7	相補感度関数 109
過渡応答 8	自由運動 10	<b>【た】</b>
過渡応答法 131	出 力 3	対角化可能 22
感度関数 109	出力ベクトル 5,136	代数的重複度 22
	出力方程式 5,136	多変数系 7
<b>【き】</b>	状態空間 9	<b>【ち】</b>
幾何学的重複度 22	状態遷移方程式 5,136	直流サーボモータ 117
逆ラプラス変換 150	状態ベクトル 5,136	
狭義のナイキストの安定判別法 98	状態変数 5,136	
行列指数関数 12		

直列結合系	63	非線形システムの線形化 134	
		非線形状態方程式 134, 136	
<b>【つ】</b>		<b>【ふ】</b>	<b>【も】</b>
追従制御系	73	ファンデアポールの方程式	目標値 2
		140	目標値に対してL型 75
<b>【て】</b>		不安定 36	モード分解 23
定常偏差	75	不安定極 36	<b>【よ】</b>
伝達関数	51	フィードバック結合系 64	余因子行列 15
伝達行列	14, 51	フィードバック制御 1	<b>【ら】</b>
<b>【と】</b>		フィードフォワードコント	ラウス表 37
等 価	19	ローラ 77	ラプラス変換 150
等価変換	19	プラント 1	ラプラス変換可能である 150
特性多項式	15	フルビッツである 37	<b>【り】</b>
<b>【な】</b>		フルビッツの行列式 40	リアプノフ関数 42
ナイキストの安定判別法	97	<b>【へ】</b>	リアプノフの安定定理 145
内部変数	45	平衡点 136	リアプノフの意味で漸近安定 36
内部モデル原理	76	—の方程式 136	リアプノフ方程式 41
<b>【に】</b>		閉ループ極 67, 74	<b>【れ】</b>
入 力	3	閉ループ系の特性多項式 74	レギュレータ系 3
入力ベクトル	5, 136	閉ループ特性方程式 66	<b>【ろ】</b>
<b>【は】</b>		並列結合系 63	ロバスト安定 74
ハミルトン行列	82	ベクトル線図 90	ロバスト追従性能 74
<b>【ひ】</b>		<b>【ほ】</b>	
非縮退行列	22	ボード線図 92	
<b>【Z】</b>		<b>【数字】</b>	1 自由度制御系 77
Ziegler-Nichols の方法 131		1 次遅れ系 55	2 自由度制御系 77

— 著者略歴 —

<b>荒木 光彦</b> (あらき みつひこ)	<b>細江 繁幸</b> (ほそえ しげゆき)
1966年 京都大学工学部電子工学科卒業	1965年 名古屋大学工学部金属学科卒業
1968年 京都大学大学院工学研究科修士課程修了(電子工学専攻)	1967年 名古屋大学大学院工学研究科博士前期課程修了(金属学専攻)
1971年 京都大学大学院工学研究科博士課程単位修得退学(電子工学専攻)	1967年 名古屋大学助手
工学博士(京都大学)	1973年 工学博士(名古屋大学)
1971年 京都大学助手	1974年 名古屋大学講師
1976年 京都大学講師	1976年 名古屋大学助教授
1981年 京都大学助教授	1989年 名古屋大学教授
1986年 京都大学教授	1999年 理化学研究所 BMC センター
2006年 京都大学名誉教授	2006年 名古屋大学名誉教授
2006年 松江工業高等専門学校校長	2007年 理研-東海ゴム人間共存ロボット連携センター 連携センター長
2012年 松江工業高等専門学校名誉教授	現在に至る

**フィードバック制御**  
Feedback Control Systems

© 公益社団法人 計測自動制御学会 2012

2012年 5月 25日 初版第1刷発行

検印省略

編者 公益社団法人  
計測自動制御学会  
東京都文京区本郷 1-35-28-303

著者 荒木 光彦  
細江 繁幸

発行者 株式会社 コロナ社  
代表者 牛来真也

印刷所 新日本印刷株式会社

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

**発行所** 株式会社 コロナ社

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)

ホームページ <http://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-03357-1 (新宅) (製本:愛千製本所)

Printed in Japan



本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられております。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めておりません。

落丁・乱丁本はお取替えいたします