システム制御工学シリーズ　**23**

行列不等式アプローチによる
制御系設計

工学博士　小原　敦美　著

コ ロ ナ 社

刊行のことば

わが国において，制御工学が学問として形を現してから，50 年近くが経過した。その間，産業界でその有用性が証明されるとともに，学界においてはつねに新たな理論の開発がなされてきた。その意味で，すでに成熟期に入っているとともに，まだ発展期でもある。

これまで，制御工学は，すべての製造業において，製品の精度の改善や高性能化，製造プロセスにおける生産性の向上などのために大きな貢献をしてきた。また，航空機，自動車，列車，船舶などの高速化と安全性の向上および省エネルギーのためにも不可欠であった。最近は，高層ビルや巨大橋梁の建設にも大きな役割を果たしている。将来は，地球温暖化の防止や有害物質の排出規制などの環境問題の解決にも，制御工学はなくてはならないものになるであろう。今後，制御工学は工学のより多くの分野に，いっそう浸透していくと予想される。

このような時代背景から，制御工学はその専門の技術者だけでなく，専門を問わず多くの技術者が習得すべき学問・技術へと広がりつつある。制御工学，特にその中心をなすシステム制御理論は難解であるという声をよく耳にするが，制御工学が広まるためには，非専門のひとにとっても理解しやすく書かれた教科書が必要である。この考えに基づき企画されたのが，本「システム制御工学シリーズ」である。

本シリーズは，レベル 0 (第 1 巻)，レベル 1 (第 2 〜 7 巻)，レベル 2 (第 8 巻以降) の三つのレベルで構成されている。読者対象としては，大学の場合，レベル 0 は 1，2 年生程度，レベル 1 は 2，3 年生程度，レベル 2 は制御工学を専門の一つとする学科では 3 年生から大学院生，制御工学を主要な専門としない学科では 4 年生から大学院生を想定している。レベル 0 は，特別な予備知識なしに，制御工学とはなにかが理解できることを意図している。レベル 1 は，少

し数学的予備知識を必要とし，システム制御理論の基礎の習熟を意図している。レベル 2 は少し高度な制御理論や各種の制御対象に応じた制御法を述べるもので，専門書的色彩も含んでいるが，平易な説明に努めている。

1990 年代におけるコンピュータ環境の大きな変化，すなわちハードウェアの高速化とソフトウェアの使いやすさは，制御工学の世界にも大きな影響を与えた。だれもが容易に高度な理論を実際に用いることができるようになった。そして，数学の解析的な側面が強かったシステム制御理論が，最近は数値計算を強く意識するようになり，性格を変えつつある。本シリーズは，そのような傾向も反映するように，現在，第一線で活躍されており，今後も発展が期待される方々に執筆を依頼した。その方々の新しい感性で書かれた教科書が制御工学へのニーズに応え，制御工学のよりいっそうの社会的貢献に寄与できれば，幸いである。

1998 年 12 月

編集委員長　池　田　雅　夫

まえがき

身近なところから極限状況までも含めたさまざまな現象の時間的な振る舞いについて，その仕組みを解き明かし役立てようという営みの一つとして，システム制御工学は発展しその重要性を増してきている。この分野は，工学のみならず，微分方程式，関数解析，最適化などの諸分野との交流を続けながら多岐にわたって成長してきたが，その中心は「線形時不変システム」と呼ばれる，定係数の線形常微分方程式に支配されるシステムの構造や動特性の理論である。

本書は，有限次元の線形時不変システムの安定性，受動性，有界実性などの基礎的諸性質を，最適化と関連する線形行列不等式（LMI）という概念を軸に詳しく解説する。つぎに，これらの結果が凸最適化を通してシステム解析，ロバスト制御系設計，ゲインスケジュールド制御系設計などの応用とどのように関わってくるかを概説する。

今日 LMI を取り巻く環境には，内点法と呼ばれる優れた解法とそのフリーウェアが簡単に入手可能な上，これを活かす学問的成果と技術の蓄積も備わっているので，われわれはこの，いわば知的社会基盤の恩恵を容易に享受できる。執筆にあたり，このような最適化分野との接点を重視するとともに，線形時不変システム理論のある特定の部分がいかに構築されているかを，LMI とその背後の数理的な仕組みから俯瞰・解釈できるようにも配慮した。二兎を追うようなこの野心的な試みにより，本書が初学者に役立つだけでなく，すでにこの分野に従事している読者にもなんらかの新しい見方や着想を提供できたとしたら，望外の喜びである。

想定する読者は，一般教養課程の線形代数・微積分の基礎的な知識を有し，専門課程での制御工学の講義をある程度学んだことがある人である。それら以上の必要事項や予備知識は最小限を本書内に準備し，自己完結できるように記し

たつもりである。

本書の草稿に丁寧に目を通していただき，貴重なコメントを賜った土谷 隆，増淵 泉の両氏に深謝します。また，恩師の北森俊行先生，須田信英先生や，多くの同僚や学生の諸氏には，さまざまな機会を通じて，この分野について幾多もの点から啓発していただいた。謝意を表します。

最後に，本書執筆の機会をいただいた編集委員の方々，執筆から刊行まで長い間お世話になったコロナ社の方々，そして著者を励まし続けてくれた家族にも心から感謝したい。

2016 年 1 月

小原敦美

記号一覧

$\forall x, P(x)$　$(P(x), \forall x)$	任意の x について命題 $P(x)$ が成り立つ（$\forall$：全称記号）
$\exists x, P(x)$　$(P(x), \exists x)$	ある x が存在して命題 $P(x)$ が成り立つ（$\exists$：存在記号）
x s.t. $P(x)$	条件 $P(x)$ を満たす x (<u>s</u>ubject <u>t</u>o または <u>s</u>uch <u>t</u>hat)
$\{x \vert P(x)\}$	条件 $P(x)$ を満たす x を要素とする集合
$X \Rightarrow Y$	X ならば Y（X は Y の十分条件，Y は X の必要条件）
$X \Leftrightarrow Y$	X と Y は同値（X は Y の必要十分条件）
$X := Y$	X を Y と定義する
$\mathcal{A} \pm \mathcal{B}$	集合 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ のミンコフスキ和（9 ページ参照）
$\mathcal{A} \backslash \mathcal{B}$	集合 $\mathcal{A}$ に属し，かつ集合 $\mathcal{B}$ には属さない要素の集合
A^*	行列 A の複素共役転置，$A^* := \bar{A}^T$
A^{-*}	行列 A^* の逆行列，$A^{-*} := (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$
A^{-T}	行列 A^T の逆行列，$A^{-T} := (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
$A^{1/2}$	$A^{1/2} \succeq 0$ かつ $(A^{1/2})^2 = A$ を満たす行列
$\mathrm{aff}\mathcal{A}$	集合 $\mathcal{A}$ のアファイン包
$\mathrm{bd}\mathcal{A}$	集合 $\mathcal{A}$ の境界
$\text{block-diag}\{A_1, \cdots, A_r\}$	行列 $A_1, \cdots, A_r$ を対角ブロックに持つブロック対角行列
$\mathcal{B}[T_1, T_2; x_0]$	88 ページ参照
$\mathbf{C}_{+e}$	実部が非負の複素数集合と $\{\infty\}$ の和集合
$\mathrm{cl}\mathcal{A}$	集合 $\mathcal{A}$ の閉包
$\mathrm{conv}\mathcal{A}$	集合 $\mathcal{A}$ の凸包
$\mathrm{diag}\{\sigma_1, \cdots, \sigma_r\}$	対角要素が σ_i である $r \times r$ 対角行列
$F(\mathcal{A})$	写像 F による集合 $\mathcal{A}$ の像（10 ページ参照）
$\mathrm{Herm}(n; \mathbf{C})$	n 次エルミート行列集合
I, I_q	単位行列，q 次単位行列
$\mathrm{Im}[s]$, $\mathrm{Re}[s]$	複素数 s の虚部と実部

$\mathrm{im}A$	行列（線形写像）A の像空間，$\mathrm{im}A := \{y \mid \exists x,\ y = Ax\}$
$\mathrm{int}\mathcal{A}$	集合 $\mathcal{A}$ の内部
$\mathcal{K}^\circ$	錐 $\mathcal{K}$ の極錐（11 ページ参照）
$\mathrm{ker}A$	行列（線形写像）A の核（零空間），$\mathrm{ker}A := \{x \mid 0 = Ax\}$
$\lambda(A)$	行列 A の固有値集合
$\lambda_i(A)$	適当に順番 i を付けた，行列 A の各固有値
$\lambda_{\max}(A)$	行列 A のすべての固有値が実数の場合の最大固有値
$\lambda_{\min}(A)$	行列 A のすべての固有値が実数の場合の最小固有値
$\mathrm{nonneg}\mathcal{A}$	集合 $\mathcal{A}$ の非負包
$\mathrm{PD}(n)$, $\mathrm{PD}(n;\mathbf{R})$	n 次実対称正定値行列集合
$\mathrm{PD}(n;\mathbf{C})$	n 次エルミート正定値行列集合
$\mathrm{ri}\mathcal{A}$	集合 $\mathcal{A}$ の相対的内部
$\sigma_i(A)$	大きさが i 番目の行列 A の特異値
$\sigma_{\max}(A)$, $\bar{\sigma}(A)$	行列 A の最大特異値（$= \sigma_1(A)$）
$\mathrm{span}\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$ の線形包
$\mathrm{Sym}(n)$, $\mathrm{Sym}(n;\mathbf{R})$	n 次実対称行列集合
$0_{p\times q}$	要素がすべて 0 の $p \times q$ 行列
$\mathbf{1}$	要素がすべて 1 のベクトル

□□□□□□□□□ 目　　次 □□□□□□□□□

1. はじめに

2. 線形行列不等式とその性質

3. 数理計画との関連

4. 線形システムの性質と線形行列不等式

5. 線形行列不等式の利用に役立つ技法

6.　多目的ロバスト制御への応用

7.　ゲインスケジュールド制御

1 はじめに

この章では，本書で主要な役割を果たす線形行列不等式とはどのようなものかを具体的に知ってもらうために，まず，システム制御の分野で非常になじみ深い例を一つ挙げる。

次に，そのような線形行列不等式を扱うことがこの分野にもたらした進展を端的に述べ，この背景を踏まえた本書の趣旨を述べる。最後に，本書の構成と書き方を説明する。

1.1　線形行列不等式の一つの例

A を $n \times n$ の正方行列，$x(t)$ を n 次元ベクトルとして，行列 A によって記述されたつぎのような線形時不変な常微分方程式系を考える。

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0$$

ここで“ $\dot{}$ ”は時間微分を表す。任意の初期値 x_0 に対する解 $x(t)$ が，$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$ を満たすとき，**原点は漸近安定**あるいは**系（システム）は安定**といわれる。

システム制御および隣接した信号処理や機械・ロボット工学などの分野において，与えられたシステムの安定性を調べることは，理論的な興味以上に，速い応答性や安全性などと絡んで工学的にもしばしば非常に重要な問題となる。

状態方程式とも呼ばれる上のような微分方程式系が安定であるための必要十

分条件として,「A のすべての固有値の実部が負であること」がよく知られている。一方，システム制御工学では，行列の固有値を求めることなくシステムの安定性を判別したい状況がしばしば起こる。そのような場合に適した別の必要十分条件の一つで有用なものは,「行列に関する不等式

$$A^T X + XA \prec 0, \quad X \succ 0$$

を満たす解行列 X が存在すること」である†。ここで，$\prec$ や $\succ$ は行列に関する不等号であり，後に詳しく説明する。

この不等式が**線形行列不等式**（linear matrix inequality; LMI）と呼ばれるものの一例であり，本書でおもにシステム制御の側面から線形行列不等式の性質や応用を考察していく際の最も基本的な不等式でもある。

一方, LMI を満たす行列を変数とするある最適化問題は**半正定値計画**（semidefinite programming; SDP）問題と呼ばれ，多くの理論的興味と重要な応用の存在が明らかになり，数理計画分野で理論・アルゴリズム・実装の研究が盛んとなった。

現在では，LMI や SDP の応用はシステム制御だけでなく，さまざまな工学に加え，自然科学や社会科学にも及んでいる。

1.2　何ができるのか？ 本書の趣旨

LMI を特に制御系設計に用いることがもたらした最も大きな恩恵は，これまで仕様を満足する制御器を解析的に導けなかった設計問題に対して理論的な保証を持つ数値解を与えられるようになったことである。典型的な例として，本書でも扱う複数の制御仕様を満たす制御系やゲインスケジュールド制御系の設計問題がある。

LMI がシステム制御でいかに活用されるかを解説することが本書第一の目的であるが，本書ではつぎの 2 点も試みる。

† この結果はリアプノフ（Lyapunov）の定理と呼ばれる。

- 長い歴史がありシステム制御の基礎である「時不変な線形システム」の理論を，（できれば少ない予備知識でスタートし）基礎的な部分からLMIという観点で見つめ直し理解を深める。
- 上述したように多くの理工学の分野で必須の計算技術となりつつあるSDPをはじめとする凸最適化をやや丁寧に紹介し，システム制御で培われたモデリングなどのウザと併せて他分野でも使えるようにする。

この企てが少しでも奏功していれば幸いである。なお，LMIのシステム制御への応用に関してはすでにいくつかの特色のある良書[1)~3)†]もあるので，参照されたい。

1.3 全体の流れ，書き方

本書は当初大学院生向けの企画であった。しかし，結果的にはシステム制御工学についての予備知識として，多くの大学の学部で講義される「古典制御」から伝達関数の計算とブロック線図の変形，また「現代制御」から状態方程式，安定性，可制御・可観測性などの前半部分を一通り理解している程度でよいと思われる。したがって，興味ある学部生も十分読み始めることができる。ただし，本書の内容上，行列やベクトルの基本計算は多い。また，線形時不変システム理論をLMIで基礎から捉え直すという副次的な目的のため，類書に比べて凸解析の一部の基本的概念にページを割いている。

本書の全体の流れは，以下のようになっている。上記の予備知識でまとめや解説が必要な部分を2章と付録で述べる。さらに詳細な説明は，線形システム理論については文献4)~6)など，線形代数については文献7), 8)など，凸解析については文献9), 10)などを参照されたい。

3章ではLMIやSDPの数理計画における位置付けや話題を概説し，4章では線形システムの基本的かつ重要な性質とLMIの関係を詳説する。5章ではLMIの有用でかつ興味深い結果をまとめる。6章では4章の内容に基づくロバ

† 肩付き番号は巻末の引用・参考文献を示す。

スト制御系設計について，積分 2 次制約を中心に据えて解説する。7 章はゲインスケジュールド制御への応用である。7 章の各論の詳細は参考文献で補った。

節や項の見出しの最後に付与した "*" の記号はやや詳細な議論を展開していることを意味しており，これらの節や項は結果を利用するのみでも十分役立つだろう。

本書では，説明を簡潔に記すため，近年のシステム制御の専門書では珍しくなくなってきた，数学書のような以下の書き方を比較的多用した。

$\forall x, P(x)$	任意の x について命題 $P(x)$ が成り立つ（全称記号）
$\exists x, P(x)$	ある x が存在して命題 $P(x)$ が成り立つ（存在記号）
x s.t. $P(x)$	条件 $P(x)$ を満たす x（subject to または such that）
$\{x \mid P(x)\}$	条件 $P(x)$ を満たす x を要素とする集合
$:=$	右辺による左辺の定義

2 線形行列不等式とその性質

この章では，本書で必要となる予備的な知識を解説する。巻頭に記号表があり，付録にはわずかながら集合と位相，線形代数の基礎的事項をまとめてあるので，適宜参考にして読み進めていただきたい。

2.1 凸集合と凸関数

2.1.1 凸　　集　　合

【定義 2.1】（凸集合）
$\mathbf{R}^n$ の部分集合 $\mathcal{C}$ が**凸集合**（convex set）であるとは

$$\forall\alpha \in [0,\ 1],\ \forall x_1, x_2 \in \mathcal{C}, \qquad \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in \mathcal{C}$$

が成り立つことである。空集合 $\emptyset$ は凸集合と約束する。

例 **2.1**　以後，本書では $\mathbf{R}^n$ の内積を $\langle y, x\rangle := x^T y$ とする。

$\mathbf{R}^n$ 自身，$\mathbf{R}^n$ の 1 点 x のみからなる集合 $\{x\}$ は凸集合である。線形部分空間も凸集合である。$\mathbf{R}^n$ の $q+1$ 本のベクトル $v_0, \cdots, v_q$ に対して

□□□□□□□□□ 索　　引 □□□□□□□□□

── 著 者 略 歴 ──

1984年　東京大学工学部計数工学科卒業
1986年　東京大学大学院工学系研究科修士課程修了（計数工学専攻）
1989年　東京大学大学院工学系研究科博士課程修了（計数工学専攻），工学博士
1989年　大阪大学助手
1993年　大阪大学講師
1996年　大阪大学助教授
2007年　大阪大学准教授
2011年　福井大学教授
　　　　現在に至る

行列不等式アプローチによる制御系設計

Matrix Inequality Approach to Control System Design

2016 年 3 月 25 日　初版第 1 刷発行

検印省略

著　者　小(お)　原(はら)　敦(あつ)　美(み)
発 行 者　株式会社　コロナ社
　　　　　代 表 者　牛来真也
印 刷 所　三美印刷株式会社

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発行所　株式会社　コ　ロ　ナ　社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–03323–6　（新宅）　（製本：愛千製本所）G

Printed in Japan