刊行のことば

わが国において，制御工学が学問として形を現してから，50 年近くが経過した。その間，産業界でその有用性が証明されるとともに，学界においてはつねに新たな理論の開発がなされてきた。その意味で，すでに成熟期に入っているとともに，まだ発展期でもある。

これまで，制御工学は，すべての製造業において，製品の精度の改善や高性能化，製造プロセスにおける生産性の向上などのために大きな貢献をしてきた。また，航空機，自動車，列車，船舶などの高速化と安全性の向上および省エネルギーのためにも不可欠であった。最近は，高層ビルや巨大橋梁（きょうりょう）の建設にも大きな役割を果たしている。将来は，地球温暖化の防止や有害物質の排出規制などの環境問題の解決にも，制御工学はなくてはならないものになるであろう。今後，制御工学は工学のより多くの分野に，いっそう浸透していくと予想される。

このような時代背景から，制御工学はその専門の技術者だけでなく，専門を問わず多くの技術者が習得すべき学問・技術へと広がりつつある。制御工学，特にその中心をなすシステム制御理論は難解であるという声をよく耳にするが，制御工学が広まるためには，非専門のひとにとっても理解しやすく書かれた教科書が必要である。この考えに基づき企画されたのが，本「システム制御工学シリーズ」である。

本シリーズは，レベル０ (第１巻)，レベル１ (第２ ～ ７巻)，レベル２ (第８巻以降) の三つのレベルで構成されている。読者対象としては，大学の場合，レベル０は 1，２年生程度，レベル１は 2，３年生程度，レベル２は制御工学を専門の一つとする学科では３年生から大学院生，制御工学を主要な専門としない学科では４年生から大学院生を想定している。レベル０は，特別な予備知識なしに，制御工学とはなにかが理解できることを意図している。レベル１は，少

し数学的予備知識を必要とし，システム制御理論の基礎の習熟を意図している。レベル 2 は少し高度な制御理論や各種の制御対象に応じた制御法を述べるもので，専門書的色彩も含んでいるが，平易な説明に努めている。

1990 年代におけるコンピュータ環境の大きな変化，すなわちハードウェアの高速化とソフトウェアの使いやすさは，制御工学の世界にも大きな影響を与えた。だれもが容易に高度な理論を実際に用いることができるようになった。そして，数学の解析的な側面が強かったシステム制御理論が，最近は数値計算を強く意識するようになり，性格を変えつつある。本シリーズは，そのような傾向も反映するように，現在，第一線で活躍されており，今後も発展が期待される方々に執筆を依頼した。その方々の新しい感性で書かれた教科書が制御工学へのニーズに応え，制御工学のよりいっそうの社会的貢献に寄与できれば，幸いである。

1998 年 12 月

編集委員長　池　田　雅　夫

□□□□□□□□□□ ま え が き □□□□□□□□□□

最適制御問題とは，制御対象であるダイナミカルシステムに対して，与えられた評価関数を最小にするような制御入力を求める問題である。さまざまなシステムに対して評価関数さえ与えれば望ましい制御入力が求められるという問題設定は一般的な制御系設計論として魅力的であり，1960 年代以降活発に研究された。しかし，限られた問題設定を除くと実際に解を計算するのが難しく，計算機が未発達だったこともあって，線形システムの場合や一部の分野を除いて徐々に廃れていった。また，有限時間の最適化という問題設定が継続的なフィードバック制御には向かないという点も実用上の障害であった。有限時間の最適化によって継続的なフィードバック制御を実現するモデル予測制御のもととなるアイデアも最適制御と同じくらい古くまでさかのぼることができるが，過大な計算量により実現困難なアイデアに長く留まっていた。

ところが，近年，計算機と数値解法の進歩により，非線形システムに対して実時間で最適制御問題を解いてモデル予測制御などのフィードバック制御を実現することがいよいよ可能になりつつある。制御対象を限定する代わりに厳密な解析的結果を積み重ねてきた制御理論とは異なるアプローチであるが，制御対象を限定せず数値計算によって制御系を設計する手法にも価値があると考えられる。特に，非線形システムに対しては一般的な制御系設計手法が存在しないので，評価関数最小の意味で合理的な制御系を決定することが現時点で取りうるアプローチの一つであることは確かである。さらに実時間での最適化手法が発展すれば，制御系設計の枠組みが変わっていくほか，制御以外のさまざまな分野への応用も期待できる。

このような背景を踏まえて，本書は，最適制御およびモデル予測制御について興味を持った大学生・大学院生や技術者・研究者を対象として，最適化の基

礎から数値解法に関する最近の話題までを自己完結的かつ平易に解説することを目的とする。予備知識として，ベクトルと行列，多変数の微積分，そして常微分方程式の基礎程度を想定している。おもに扱うのが有限時間の最適制御問題であるため，必ずしも古典制御や現代制御のフィードバック制御理論を詳しく学んでいる必要はない。ただし，例題として線形システムも取り上げるので，状態空間表現に基づく線形制御理論を学んだ読者は，線形制御理論を別の観点から眺めることができるだろう。

本書の構成とスタイルは，最適制御やモデル予測制御の論文に現れる基本用語が一通りわかるようになることを念頭に置いて設定した。重要な概念や用語は一通り網羅するように努め，かつ，あまり厳密性にこだわらないものの，概念の意味や定理とアルゴリズムの導出過程についてはなるべく省略せず述べるようにした。ただし，本筋を見失わないよう，細部の式導出と証明や容易な拡張については演習問題へ回した。本書を足がかりとして読者諸氏に最先端の研究へ踏み出していただけたら幸甚である。

最後に，本書執筆に際してお世話になった方々への謝辞を記したい。恩師である藤井裕矩先生には，本書の内容を含む制御工学の分野へ著者を導いていただいた。池田雅夫先生はじめ本シリーズ編集委員各位には，浅学非才の著者に執筆の機会を与えていただき，構成や表現について助言をいただいた。図版作成は留田直子さんに協力していただき，LaTeX 入力の一部は片山聡君に協力していただいた。橋本智昭先生と河野佑君からは草稿に対して貴重なコメントをいただいた。研究室の学生諸君には校正を手伝っていただいた。コロナ社には脱稿を待っていただくとともに，さまざまな面でお世話になった。ここに厚くお礼申し上げたい。そして何より，家族の励ましと支えがなければ本書は出来上がらなかっただろう。心からの感謝と共に本書を捧げたい。

2010 年 12 月

大塚敏之

□□□□□□□□□□ 目　　　次 □□□□□□□□□□

1.　序　　　論

2.　非線形計画問題

3. 離散時間システムの最適制御

4. 変 分 法

5. 連続時間システムの最適制御

6.　動的計画法と最小原理

7.　最適制御問題の数値解法

8.　モデル予測制御

1 序　論

本章では，本書で扱う最適化問題を概観する。特に，ダイナミカルシステムの制御における最適化の役割について，新しい動向を含めて述べるとともに，実際に制御問題へ最適化を適用する際に注意すべき点についても整理しておく。併せて，本書を通じて用いる数学的表記をまとめる。

1.1 最適化とは

何らかの自由変数を含む工学的問題では，最も望ましい結果を達成するように自由変数を決めることがしばしば重要になる。特に，結果の望ましさが自由変数の関数として実数値で表される場合，その関数を**評価関数**（performance index）と呼び，自由変数を決定する問題は評価関数を最小化ないし最大化する自由変数を求める問題に帰着される。このような問題を**最適化問題**（optimization problem）といい，その解を**最適解**（optimal solution）という。現実的な最適化問題において自由変数を選ぶ範囲は制限されることが多い。自由変数が最低限満たさなければならない条件を**拘束条件**（constraint）という[†]。評価関数の符号を適宜付け替えることによって，評価関数はつねに最小化するものとしても一般性を失わない。そこで，本書ではつねに最小化を考えることにする。以

† 評価関数を**目的関数**（objective function）や**コスト関数**（cost function），拘束条件を**制約条件**と呼ぶこともある。

下では，典型的な最適化問題がどのようなものか例を通じて説明する。

例 1.1 （**数理計画問題**）　なるべく少ない量のプラスチックを使って与えられた容積のコップを作る問題を考える。簡単のため形状は**図 1.1** のような円筒とする。コップの厚さは一定で十分薄いとすると，プラスチックの量はコップの表面積で決まる。したがって，コップの半径を r，高さを h とすると，評価関数は

$$f(r,h) = 2\pi rh + \pi r^2$$

となる。第 1 項は側面積，第 2 項は底面積を表す。一方，与えられた容積を V とすると，拘束条件は

$$\pi r^2 h = V$$

となる。この拘束条件を満たし評価関数 $f(r,h)$ を最小にするように自由変数 r,h を決定することで，所望のコップが設計できる。

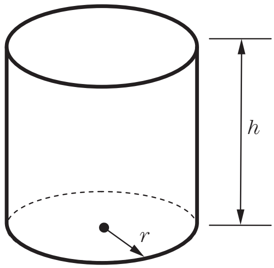

図 1.1　円筒形のコップ

この例題のように自由変数が有限個の変数である最適化問題を**数理計画問題**（mathematical programming problem）と呼ぶ。特に，評価関数と拘束条件が 1 次式の場合は**線形計画問題**（linear programming problem），2 次式の場合は **2 次計画問題**（quadratic programming problem）とそれぞれ呼ぶ。線形計画以外の問題を総称して**非線形計画問題**（nonlinear programming problem）と

呼ぶ。前述の**例 1.1** は手計算でも最適解が求められそうなくらい単純だが，より実際的な工業製品の設計と生産を最適化しようとすれば，たくさんの部品の仕様，価格，納期に加えて完成した製品の保管や輸送のコストも考慮して，利益を最大化したり汚染物質の生成を最小化したりすることになる。したがって，はるかに複雑な問題になって，解を求めるには計算機を使わざるを得ないだろうことは想像に難くない。

一般には，有限個の自由変数に限らず関数を決定したい場合も考えられる。このとき，評価関数は，関数に対応して結果の望ましさを実数値として与えるので，いわば関数の関数になる。関数の関数を**汎関数**（functional）と呼び，汎関数を最大化ないし最小化する問題を**変分問題**（variational problem）と呼ぶ。**変分**（variation）とは，関数の微分を汎関数に拡張した演算である。また，汎関数の変数に相当する関数を変関数という。通常の変数と区別するため，汎関数の変関数は [ ] で囲む。

例 1.2 （**変分問題**） **図 1.2** のように x 軸上の与えられた 2 点 $(x_0, 0)$, $(x_f, 0)$ を通り弧長一定の曲線 $(x, y(x))$ と x 軸とが囲む面積を最大にする問題を考える。この場合の評価関数は，関数 $y(x)$ を変関数とする以下の汎関数である。

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_f} y(x)dx$$

また，曲線の弧長を l とすると，拘束条件は

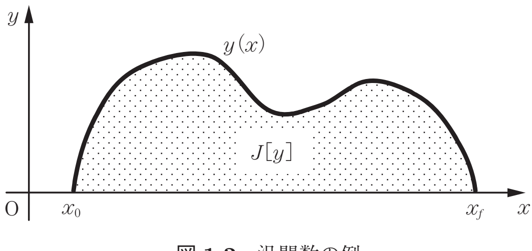

図 1.2 汎関数の例

$$y(x_0) = 0, \quad y(x_f) = 0, \quad \int_{x_0}^{x_f} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = l$$

となる。

上記以外に，例えば空気抵抗が最小になるように飛翔体の形状を決める問題も変分問題の例である。軸対称な形状を仮定すれば，飛翔体の形状は 1 変数関数で記述でき，空気抵抗はその関数に依存して決まる汎関数と見なせる。そして，飛翔体の体積や寸法に対する制約が拘束条件を与える。また，多変数関数の変分問題も考えることができ，例えば鉄道車両や飛行機の場合は軸対称な形状に限定できないので，その形状は曲面を表す 2 変数関数によって記述される。したがって，それらの空気抵抗を最小にする形状を求める問題は，2 変数関数の変分問題になる。これら工学的問題のほか，自然現象の記述においても変分問題は重要な役割を果たす。例えば，物体の運動や光の経路および弾性体の変形がそれぞれある汎関数を最小にするという**変分原理**（variational principle）が知られている。

さて，さまざまな制御の問題も，制御目的を評価関数の最小化として表すことができれば最適化問題になる。例えば，何らかのフィードバック制御を想定し，そのフィードバックゲインなどを自由変数と見なせば，制御系設計は数理計画問題に帰着される。他方，制御対象のシステムに対する制御入力を変関数，評価関数を汎関数と見なせば，制御問題は変分問題に帰着され，これを**最適制御問題**（optimal control problem）という。また，最適制御問題において制御入力を最適化する時刻の範囲を**評価区間**（horizon）といい，評価関数を最小にする制御入力を**最適制御**（optimal control）という。

例 1.3　（**最適制御問題**）　単位質量を持つ質点の位置を $x(t)$，制御入力として質点に加わる外力を $u(t)$ として，質点の運動方程式 $\ddot{x}(t) = u(t)$ を考える。そして，時刻 $t = 0$ で位置が x_0，速度が v_0 である質点を最短時間で原点 O に到達かつ静止させる制御入力 $u(t)$ を求める問題を考える（**図**

図 **1.3**　質点を最短時間で移動させる最適制御問題

1.3)。ただし，制御入力 $u(t)$ には大きさの制限があり，その絶対値が 1 以下であるとする。この場合，制御対象である質点の状態方程式は

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

であり，初期条件が $x(0) = x_0$，$\dot{x}(0) = v_0$ で，終端条件が $x(t_f) = 0$，$\dot{x}(t_f) = 0$ で，それぞれ与えられる。そして，評価関数は $J = t_f$ であり，制御入力 $u(t)$ $(0 \leqq t \leqq t_f)$ を変関数とする汎関数である。このように評価区間の長さ自体が評価関数になる場合もある。拘束条件は，状態方程式のほか，初期条件，終端条件，そして，$|u(t)| \leqq 1$ である。

例えば，地球から月へロケットを飛ばす場合，地球上の発射地点で静止している初期状態から月面の着陸地点で静止する終端状態へ最短時間で到達する最適制御問題が考えられる。その際，推力の大きさや方向に拘束条件が課せられることになる。もちろん，ロケットを支配する運動方程式も拘束条件である。また，移動の時間を最小にする以外にも，燃料の消費量を最小にする問題なども考えられる。拘束条件や評価関数に応じてどのような時間パターンで推力の大きさと向きを与えればよいかは決して自明ではないし，到達時間や燃料消費量を最小化することは月面到達の実現可能性やコストにとって重要であることも明らかである。

例 **1.3** のように，最適制御問題は有限な評価区間における制御入力を時刻の関数として決める問題であることが多い。その場合，最適制御はフィードフォワード制御として求められることになる。理想的な軌道をあらかじめ計画するなどの用途にはフィードフォワード制御であっても有用であるが，現実のシステムを制御する際には，モデルの誤差や外乱による悪影響を抑制するためにフィー

ドバック制御が用いられることが多い。そして，通常のフィードバック制御では，制御を行う時刻の範囲があらかじめ指定されることはなく，また，時刻ではなく状態の関数としてフィードバック制御則を決める。6 章で論じるように，ある種の偏微分方程式が解ければ最適制御が状態の関数として求められフィードバック制御則を決定できるが，一般には解くのが非常に困難である。したがって，線形システムに対する特殊な問題を除いて最適制御問題はフィードバック制御にあまり適さない。

そこで，制御入力を時刻の関数として求めながらもフィードバック制御を行う問題設定が考えられている。それが**モデル予測制御**（model predictive control）である†。この問題では，つねに現在の時刻を最適制御問題の初期時刻として有限時間未来までの最適制御を求め，そしてその初期値のみを実際の制御入力として用いる。評価区間の長さを T として，各時刻 t で最小化すべきモデル予測制御の評価関数を一般的な式で表せば

$$J = \varphi(x(t+T)) + \int_t^{t+T} L(x(\tau), u(\tau), \tau)d\tau$$

となる。ここで，φ と L が制御の目的を表す関数である。評価区間は t から $t+T$ までなので，時刻 t とともに後退（recede）していくことになる。そのため，モデル予測制御は **receding horizon 制御**（receding horizon control）††ないし moving horizon 制御とも呼ばれる。上の評価関数を最小にする最適制御を t から $t+T$ までの時間関数として求め，その初期値のみを実際の制御入力として制御対象に加える，という処理を各時刻 t ごとに行えば，結果的に状態フィードバック制御が行える。なぜなら，評価区間における初期状態である $x(t)$ に依存して最適制御が決まるからである。

モデル予測制御において，各時刻で有限時間未来までの最適制御を求めてその初期値のみを用いるという処理は，例えば自動車の運転との類似を考えるとわかりやすい。人間による自動車の運転も，時々刻々周りの状況に応じて運転

---

† 英語の頭文字を取って **MPC** という略称もよく用いられる。
†† 英語の頭文字を取って **RH 制御** または **RHC** という略称もしばしば用いられる。

□□□□□□□□□□ 索　　引 □□□□□□□□□□

【ほ】

【む】

【め】

【も】

【や】

【ゆ】

【よ】

【ら】

【り】

【わ】

―― 著 者 略 歴 ――

1990 年　東京都立科学技術大学工学部航空宇宙システム工学科卒業
1992 年　東京都立科学技術大学大学院工学研究科修士課程修了
　　　　（力学系システム工学専攻）
1995 年　東京都立科学技術大学大学院工学研究科博士課程修了
　　　　（工学システム専攻）
　　　　博士（工学）
1995 年　筑波大学講師
1999 年　大阪大学講師
2003 年　大阪大学助教授
2007 年　大阪大学教授
　　　　現在に至る

非線形最適制御入門

Introduction to Nonlinear Optimal Control

2011 年 2 月 25 日　初版第 1 刷発行

検印省略

著　者　大 塚 敏 之
発 行 者　株式会社　コ ロ ナ 社
　　　　代 表 者　牛 来 真 也
印 刷 所　三 美 印 刷 株 式 会 社

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10

発行所　株式会社　コ ロ ナ 社

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)

ホームページ http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–03318–2 （中原）（製本：愛千製本所）

Printed in Japan