システム制御工学シリーズ 16

むだ時間・分布定数系の制御

工学博士 阿部 直人
工学博士 児島 晃 共著

コロナ社

刊行のことば

わが国において，制御工学が学問として形を現してから，50年近くが経過した。その間，産業界でその有用性が証明されるとともに，学界においてはつねに新たな理論の開発がなされてきた。その意味で，すでに成熟期に入っているとともに，まだ発展期でもある。

これまで，制御工学は，すべての製造業において，製品の精度の改善や高性能化，製造プロセスにおける生産性の向上などのために大きな貢献をしてきた。また，航空機，自動車，列車，船舶などの高速化と安全性の向上および省エネルギーのためにも不可欠であった。最近は，高層ビルや巨大橋梁（きょうりょう）の建設にも大きな役割を果たしている。将来は，地球温暖化の防止や有害物質の排出規制などの環境問題の解決にも，制御工学はなくてはならないものになるであろう。今後，制御工学は工学のより多くの分野に，いっそう浸透していくと予想される。

このような時代背景から，制御工学はその専門の技術者だけでなく，専門を問わず多くの技術者が習得すべき学問・技術へと広がりつつある。制御工学，特にその中心をなすシステム制御理論は難解であるという声をよく耳にするが，制御工学が広まるためには，非専門のひとにとっても理解しやすく書かれた教科書が必要である。この考えに基づき企画されたのが，本「システム制御工学シリーズ」である。

本シリーズは，レベル0 (第1巻)，レベル1 (第2 ～ 7巻)，レベル2 (第8巻以降) の三つのレベルで構成されている。読者対象としては，大学の場合，レベル0は1，2年生程度，レベル1は2，3年生程度，レベル2は制御工学を専門の一つとする学科では3年生から大学院生，制御工学を主要な専門としない学科では4年生から大学院生を想定している。レベル0は，特別な予備知識なしに，制御工学とはなにかが理解できることを意図している。レベル1は，少

し数学的予備知識を必要とし，システム制御理論の基礎の習熟を意図している。レベル 2 は少し高度な制御理論や各種の制御対象に応じた制御法を述べるもので，専門書的色彩も含んでいるが，平易な説明に努めている。

1990 年代におけるコンピュータ環境の大きな変化，すなわちハードウェアの高速化とソフトウェアの使いやすさは，制御工学の世界にも大きな影響を与えた。だれもが容易に高度な理論を実際に用いることができるようになった。そして，数学の解析的な側面が強かったシステム制御理論が，最近は数値計算を強く意識するようになり，性格を変えつつある。本シリーズは，そのような傾向も反映するように，現在，第一線で活躍されており，今後も発展が期待される方々に執筆を依頼した。その方々の新しい感性で書かれた教科書が制御工学へのニーズに応え，制御工学のよりいっそうの社会的貢献に寄与できれば，幸いである。

1998 年 12 月

編集委員長　池　田　雅　夫

□□□□□□□□□□ ま　え　が　き □□□□□□□□□□

制御工学は1970年代から著しい発展を遂げ，古典制御論，現代制御論と呼ばれる理論体系を基礎に新しい展開を見せはじめている。中でも，集中定数系の理論はきわめて高度な発展を遂げ，制御対象の不確かさと性能の関係を解明するなどシステム理論の核心に迫る重要な成果が明らかにされつつある。しかしながら一方では，信号・情報の遅延を考慮しなければならないシステム(むだ時間系)，ダイナミクスを支配するパラメータが空間的に分布したシステム(熱系，振動系などの分布定数系)の制御問題に直面したとき，指針は必ずしも明らかでなく，古典制御の教科書にさかのぼりながら実践的な解決法を探る事例が多く見受けられる。

本書は，「システム制御工学シリーズ」の一連の教科書の中で，特にむだ時間系，分布定数系のシステム理論と制御における基本的な結果を，工学部3，4年生の知識を前提に解説したものである。そして，1) これらの分野の常識と有用な成果を無理なく学べること，2) 近年発展を遂げた強力な設計法の中で，現代制御までの知識で学べるものをわかりやすく解説すること，に留意して執筆した。これらの試みが，制御工学の学修を続ける学生の一助となり，また産業界で活躍される技術者の参考となり，新しい制御法が定着するきっかけとなれば望外の喜びである。

各章の内容紹介

本書は，むだ時間系(1，2，3章)，分布定数系(4，5，6章)の部分からなり，これらは独立に読み進めることも可能である。

むだ時間系(1，2，3章)

1章　一般的なむだ時間系について押さえておきたい基本的な性質がまとめら

れている。むだ時間要素の性質と近似法，フィードバック制御に与える影響，安定性の解析法が述べられている。

2章　入力むだ時間系に対する制御法のうち，古典制御に基礎を置く代表的な制御法 (PID 制御，スミス法，IMC 制御，ほか) がまとめられている。これらの手法は，制御現場で広く用いられているものが含まれている。

3章　状態予測制御の考え方に基づき，最適レギュレータ，オブザーバの構成，サーボ問題など，現代制御の重要な成果を入力むだ時間系に適用する方法が述べられている。また後半では，むだ時間系の H^∞ 制御，ロバスト制御法が，状態予測制御の考え方に沿って述べられている。

分布定数系 (4，5，6章)

4章　一般の分布定数系の分類と基本的な性質が，制御を考える側面からまとめられている。輸送型分布系 (熱拡散系)，振動系から選ばれた例題を用いながら，基本的な性質が紹介されている。4.3 節には，分布系に共通する近似法が述べられている。

5章　輸送型分布系の中から，特に熱交換器 (単管，向流型) を採り上げ，制御系の性質，システムの近似法，制御則の設計法が述べられている。これらは，4 章の一般論の具体的な応用例 (事例) として位置づけられる。

6章　振動系の中から，柔軟ビーム (オイラー・ベルヌーイ梁) の制御問題を採り上げ，制御対象のモデル化，システムのモード解析と近似，制御系設計で留意すべき点 (スピルオーバ現象) が述べられている。

最後に，著者をむだ時間系・分布定数系の制御研究に導いて下さった示村悦二郎先生 (早稲田大学名誉教授)，内田健康先生 (早稲田大学)，ならびに本稿の執筆に有益な助言を下さった藤田政之先生 (東京工業大学)，コロナ社諸氏に深く謝意を表する。

2007 年 1 月

阿部直人
児島　晃

□□□□□□□□□□ 目　次 □□□□□□□□□□

1.　むだ時間系とは

2.　むだ時間系の制御
― 伝達関数によるアプローチ ―

3.　むだ時間系の制御
— 状態予測制御によるアプローチ —

4.　分布定数系

5.　輸送型分布定数系

6. 振　動　系

1 むだ時間系とは

本章では，フィードバック制御系において，むだ時間要素の紹介とむだ時間系と呼ばれるシステムにはどのようなシステムがあるのかを示し，その特徴を無限個存在する極の配置から述べる。また，むだ時間系に対する安定性の定理を紹介する。

1.1 むだ時間とは

「むだ時間系」と一言で表しているが，「むだ時間」とはいったい何なのであろうか。まずは簡単なむだ時間要素としてベルトコンベアモデル**図 1.1** を考えてみる。

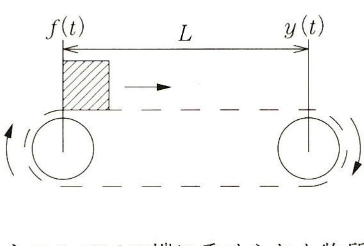


図 1.1　ベルトコンベアモデル

ベルトコンベアの端に乗せられた物質 (信号も含む) はなにも変化せず反対側にある時間かかって到達する。このような状態を**むだ時間**という[†]。

入力を f，出力を y，時刻を t，ベルトの到達時間を $L(>0)$ として，この入

---

† 英語では time delay，time lag，dead time などと呼ばれる。

出力関係を式で表すと，入力された f が時刻 L だけ遅れて出力されるので

$$y(t) = f(t - L) \tag{1.1}$$

という関係式で表される。このときの L を**むだ時間**と呼ぶ。むだ時間 L は一般には時変の場合が考えられるが，本書では定数の場合を扱う。

むだ時間要素を伝達関数で表現すると

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = e^{-Ls} \tag{1.2}$$

となる†。これをブロック線図で書き表すと**図 1.2** となり，むだ時間要素を書き表す記法として広く使われている。

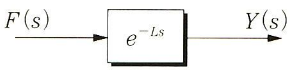


図 1.2　むだ時間要素のブロック線図

入出力関係式の式 (1.1)，伝達関数の式 (1.2) は，ともに入力と出力の関係にのみ着目した外部記述モデルであるが，内部記述モデルはどのようになるのだろうか。**図 1.1** のベルトコンベアモデルでは移動中の動作はなにも考慮していなかった。そこでもう少し詳しく**図 1.3** のように単純に固体が移動しているだけでなく，液体のような媒体を通して情報が伝達する分布定数モデルを考えてみる。

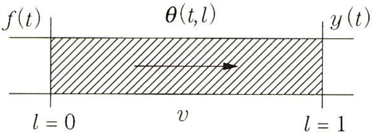


図 1.3　むだ時間要素の分布定数モデル

ここで移動距離を正規化して 1 として，距離の変数 $l(0 \leqq l \leqq 1)$ を導入する。また移動中の物質の各時刻 t において l という位置にある物質が $\theta(t,l)$ という状態であるとする。また移動速度を $v > 0$ (一定値) とする。

移動物質は $l = 0$ において入力 $f(t)$ を信号として受け取り，$l = 1$ においてその位置と時間の信号を出力 $y(t)$ として出す。この関係を式で表すと

$$\theta(t, 0) = f(t) \tag{1.3}$$

† 1 章の演習問題【1】参照。

$$y(t) = \theta(t, 1) \tag{1.4}$$

が成立する。むだ時間系では移動物質とともに移動する信号の時間的変化率はゼロであるから，θ はつぎの式を満足しなければならない。

$$\frac{\partial \theta(t,l)}{\partial t} + v\frac{\partial \theta(t,l)}{\partial l} = 0, \qquad 0 < l < 1 \tag{1.5}$$

内部の状態に注目してむだ時間要素を表すと，式 (1.5) のような偏微分方程式と，境界条件の式 (1.3)，(1.4) で表される。よって，むだ時間要素は式 (1.5) から分布定数を持つ系の一つであることがわかる。

1.2　むだ時間要素の近似

むだ時間要素は近似を用いなければ常微分方程式や有理伝達関数で表せない。しかし，簡便な方法で精度よく近似ができれば，簡単な解析に有用なことが多い。むだ時間要素 e^{-Ls} の近似には**パディ(Padé) 近似**と呼ばれる方法がよく用いられる†。例えば 1 次のパディ近似を用いると，むだ時間要素 e^{-Ls} はつぎのように表される。

$$e^{-Ls} \fallingdotseq \frac{1 - \dfrac{Ls}{2}}{1 + \dfrac{Ls}{2}} \tag{1.6}$$

むだ時間のパディ近似というと 1 次の近似式 (1.6) が代表的であるが，周波数特性を見ると必ずしも十分な近似とはいえない (**図 1.4** (a) 参照)。

パディ近似の考え方は，むだ時間要素 $G(s) = e^{-Ls}$ を高次の有理伝達関数である $G_a(s)$，式 (1.7) に近似しようというものである。

$$G_a(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{1.7}$$

いま，むだ時間要素 e^{-Ls} をテイラー (Taylor) 展開すると

† 一般にパディ近似はむだ時間要素に限らず，テイラー展開に基づいて有理式に近似する方法である。

$$
\begin{aligned}
G(s) &= e^{-Ls} \\
&= 1 - Ls + \frac{1}{2}s^2L^2 - \frac{1}{6}s^3L^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(-Ls)^n + \cdots
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

となる。$G_a(s) = G(s)$ となるように，$a_i, i = 0, 1, \cdots n$ と $b_j, j = 0, 1, \cdots m$ の係数を定めよう。

$$
\begin{aligned}
&b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \\
&\quad = (a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) \cdot \left(1 - Ls + \frac{1}{2}s^2L^2 - \cdots\right)
\end{aligned} \tag{1.9}
$$

式 (1.9) を計算し，両辺の s の次数の等しい係数ごとに $n+m$ 本の連立方程式を立て，$a_i, i = 0, 1, \cdots n, b_j, j = 0, 1, \cdots m$ を求めると (m, n) 次のパディ近似が求められる。

実際，(2, 2) 次の場合を求めてみよう。s に関して定数項から s^4 までの係数を比較すると，式 (1.9) から方程式 (1.10) が導かれる。

$$
\begin{aligned}
b_0 &= a_0 \\
b_1 &= -a_0 L + a_1 \\
b_2 &= \frac{1}{2}a_0L^2 - a_1L + a_2 \\
0 &= -\frac{1}{6}a_0L^3 + \frac{1}{2}a_1L^2 - a_2L \\
0 &= \frac{1}{24}a_0L^4 - \frac{1}{6}a_1L^3 + \frac{1}{2}a_2L^2
\end{aligned} \tag{1.10}
$$

いま，$a_0 = 1$ とすると†，(2,2) 次の近似が式 (1.11) のように求められる。

$$
e^{-Ls} \fallingdotseq \frac{1 - \frac{1}{2}Ls + \frac{1}{12}L^2s^2}{1 + \frac{1}{2}Ls + \frac{1}{12}L^2s^2} \tag{1.11}
$$

この考え方を高次にまで進めると，パディ近似の一般形が得られる。

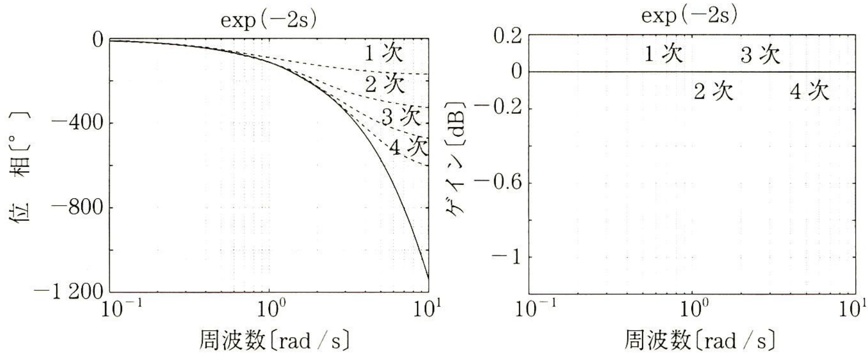
† 分母をモニックな多項式で考えるならば，$a_n = 1$ としてもよい。

$$e^{-Ls} \fallingdotseq \frac{1+\dfrac{m(-Ls)}{(n+m)}+\cdots+\dfrac{(n+m-j)!m!(-L)^j}{(n+m)!(m-j)!j!}+\cdots}{1+\dfrac{(-1)n(-Ls)}{(n+m)}+\cdots+\dfrac{(-1)^i(n+m-i)!n!(-L)^i}{(n+m)!(n-i)!i!}+\cdots} \tag{1.12}$$

ただし，$i=0,\cdots,n \quad j=0,\cdots,m$

通常，むだ時間要素のみの近似には同次形 $(n=m)$ を用いることが多い。もちろん次数が高いほど近似精度は上がる。

図 1.4 (a) は e^{-2s} の位相の変化を近似次数 1，2，3，4 次と真値を表した位相特性のグラフである。**図 1.4** (b) はゲイン特性のグラフで，近似次数にかかわらずつねに 0 dB となり，完全にむだ時間要素と一致する。



(a) 位 相 特 性　　(b) ゲイン特性

図 1.4 パディ近似

むだ時間要素の近似は，一般には高次の近似を用いれば精度は上がるが，近似する目的に合わせて次数を選ぶことが重要になる。次数を何次にするかは，考えている制御対象と構成したい制御系の周波数帯が十分に近似されるように決める必要がある。また，パディ近似には不安定零点が含まれるので閉ループ系の設計モデルに用いるには特に注意が必要である。

他の近似方法としては

索　　　引

—— 著者略歴 ——

阿部　直人（あべ　なおと）

1984年　早稲田大学理工学部電気工学科卒業
1986年　早稲田大学大学院博士前期課程修了（電気工学専攻）
1989年　早稲田大学大学院博士後期課程修了（電気工学専攻）
　　　　工学博士
1989年　明治大学助手
2002年　明治大学助教授
2009年　明治大学教授
　　　　現在に至る

児島　晃（こじま　あきら）

1987年　早稲田大学理工学部電気工学科卒業
1989年　早稲田大学大学院博士前期課程修了（電気工学専攻）
1991年　早稲田大学大学院博士後期課程修了（電気工学専攻）
　　　　工学博士
1991年　東京都立科学技術大学講師
1997年　東京都立科学技術大学助教授
2005年　首都大学東京教授
2020年　東京都立大学教授（校名変更）
　　　　現在に至る

むだ時間・分布定数系の制御

Control in Time-delay and Distributed Parameter Systems

2007年3月8日　初版第1刷発行
2020年10月25日　初版第2刷発行

検印省略

著　者　阿部　直人
　　　　児島　晃
発行者　株式会社　コロナ社
　　　　代表者　牛来真也
印刷所　三美印刷株式会社
製本所　有限会社　愛千製本所

112-0011　東京都文京区千石 4-46-10
発行所　株式会社　コロナ社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)
ホームページ　https://www.coronasha.co.jp

ISBN 978-4-339-03316-8　C3353　Printed in Japan　（佐藤）