システム制御工学シリーズ　8

システム制御のための数学（2）

―関数解析編―

工学博士　太田　快人　著

コロナ社

刊行のことば

わが国において，制御工学が学問として形を現してから，50 年近くが経過した。その間，産業界でその有用性が証明されるとともに，学界においてはつねに新たな理論の開発がなされてきた。その意味で，すでに成熟期に入っているとともに，まだ発展期でもある。

これまで，制御工学は，すべての製造業において，製品の精度の改善や高性能化，製造プロセスにおける生産性の向上などのために大きな貢献をしてきた。また，航空機，自動車，列車，船舶などの高速化と安全性の向上および省エネルギーのためにも不可欠であった。最近は，高層ビルや巨大橋梁（きょうりょう）の建設にも大きな役割を果たしている。将来は，地球温暖化の防止や有害物質の排出規制などの環境問題の解決にも，制御工学はなくてはならないものになるであろう。今後，制御工学は工学のより多くの分野に，いっそう浸透していくと予想される。

このような時代背景から，制御工学はその専門の技術者だけでなく，専門を問わず多くの技術者が習得すべき学問・技術へと広がりつつある。制御工学，特にその中心をなすシステム制御理論は難解であるという声をよく耳にするが，制御工学が広まるためには，非専門のひとにとっても理解しやすく書かれた教科書が必要である。この考えに基づき企画されたのが，本「システム制御工学シリーズ」である。

本シリーズは，レベル 0 (第 1 巻)，レベル 1 (第 2 〜 7 巻)，レベル 2 (第 8 巻以降) の三つのレベルで構成されている。読者対象としては，大学の場合，レベル 0 は 1，2 年生程度，レベル 1 は 2，3 年生程度，レベル 2 は制御工学を専門の一つとする学科では 3 年生から大学院生，制御工学を主要な専門としない学科では 4 年生から大学院生を想定している。レベル 0 は，特別な予備知識なしに，制御工学とはなにかが理解できることを意図している。レベル 1 は，少

し数学的予備知識を必要とし，システム制御理論の基礎の習熟を意図している。レベル 2 は少し高度な制御理論や各種の制御対象に応じた制御法を述べるもので，専門書的色彩も含んでいるが，平易な説明に努めている。

1990 年代におけるコンピュータ環境の大きな変化，すなわちハードウェアの高速化とソフトウェアの使いやすさは，制御工学の世界にも大きな影響を与えた。だれもが容易に高度な理論を実際に用いることができるようになった。そして，数学の解析的な側面が強かったシステム制御理論が，最近は数値計算を強く意識するようになり，性格を変えつつある。本シリーズは，そのような傾向も反映するように，現在，第一線で活躍されており，今後も発展が期待される方々に執筆を依頼した。その方々の新しい感性で書かれた教科書が制御工学へのニーズに応え，制御工学のよりいっそうの社会的貢献に寄与できれば，幸いである。

1998 年 12 月

編集委員長　池　田　雅　夫

□□□□□□□□□ ま　え　が　き □□□□□□□□□

最適制御やロバスト制御の理論構成や計算方法においては，複素関数や関数解析の手法が幅広く用いられている。1960 年代に多く刊行された最適制御の教科書や 1980 年代以降活発になったロバスト制御に関する成書を読むと，これらの手法がいかに大きく貢献してきているかがわかる。

工学系の多くの大学課程では，伝達関数や状態方程式を用いた制御工学に関する講義が設定されている。これらの講義では複素関数や関数解析の手法が際立って見えてこないかもしれないが，原理からより深い理解を得るためにはこれらの知識が必須となる。例えば，周波数応答を図上に表したナイキスト軌跡は，複素平面の閉曲線となっており，その回転数がフィードバック系の安定性と関連している。また，ラプラス変換やフーリエ変換についても複素関数や関数解析の考え方が支柱となっていることに気が付く。

本シリーズで刊行された「システム制御のための数学 (1)—線形代数編—」を著してから 20 年近くが経過してしまった。その間にシステム制御理論ではロバスト制御の研究が進み，ネットワーク化したシステムや確率的なシステムに対する研究が広がっている。研究者として新しい方向に挑んだり新規理論成果を応用展開するためには，基礎として複素関数や関数解析を使う力が必要になってくる。そのために続編を完成させたいという思いは持ち続けていた。辛抱強く待っていただいた皆様にお礼申し上げる。

本書は，システム制御を研究あるいは学習する人のために複素関数や関数解析の基本を記述することを目的としている。システム制御から派生する例題や演習問題をなるべく多く含めているので，システム制御と複素関数や関数解析との関連性を意識し，抽象的な話のみで終わらないように読んでいただければ幸いである。定理の証明，例題や演習問題の解答についてはなるべく省略せず

に記述しているが，ページ数の制約から本書で完結していない部分もある。例えば，ルベーグ積分は確率を理解するには避けて通れないが，これに関する教科書も多いので参照していただきたい。また，関数解析のいくつかの定理については，記述が長くなりすぎることを避けるために結果のみを記述している。詳細は参考文献を見ていただきたい。

本書は，まず 1 章において以降の章を読むために必要な集合と関数の基礎概念を述べている。この章については初読時には概念をおおまかに理解することで差し支えない。2 章から 6 章までは複素関数と調和関数について記述している。7 章ではフーリエ級数，フーリエ変換，ラプラス変換について，システム制御に関する大学課程の講義よりもやや数学寄りの観点から述べている。8 章から 12 章までは関数解析についてであり，大学院課程の講義や研究論文を理解するときに活用していただきたい。また，付録 A では位相空間と順序集合について補足的に述べている。やや抽象性が高いが，10.5 節，12.2.2 項を読むときに参考にしてほしい。本文中随所に現れる畳み込みについては付録 B で説明している。

本書を著すにあたって多くの先生方の助けをいただいた。特に，児玉慎三先生，故 前田肇先生にはシステム制御研究への道に誘っていただいた。制御関連学会でお会いした諸先生方には研究の議論をさせていただいた。また，家族は研究生活を長きにわたって支えてくれた。このようにして著者がシステム制御の分野で仕事を継続できたことに感謝したい。

2020 年 11 月

太　田　快　人

記　号　一　覧

A^{H}, x^{H}	複素行列またはベクトルの共役転置
A^{T}, x^{T}	実行列またはベクトルの転置
A^*	ヒルベルト空間の共役作用素
A^*	バナッハ空間の双対作用素
$\arg z$	複素数 z の偏角
$\mathcal{B}(X)$	バナッハ空間 X の上の有界線形作用素全体
$\mathcal{B}(X,Y)$	バナッハ空間 X から Y への有界線形作用素全体
c_0	零に収束する数列からなる空間
$C[a,b]$	区間 $[a,b]$ での連続関数からなる空間
$\mathbb{C}$	複素数の集合
$\mathbb{C}^n$	n 次複素ベクトルの集合
$\mathbb{C}^{m\times n}$	$m\times n$ 複素行列の集合
$\mathbb{C}_+$	複素数の右半面（$\mathrm{Re}\, s>0$ となる複素数の集合）
$\mathrm{cl}\, S$	集合 S の閉包
$D(z_0;r)$	中心 z_0 半径 r の複素平面の開円板
$\overline{D}(z_0;r)$	中心 z_0 半径 r の複素平面の閉円板
e^x, $\exp x$	指数関数
$\mathrm{gra}\, A$	線形作用素 A のグラフ
H^1	開単位円板で正則，半径 1 未満の円上で絶対可積分で，それらの積分値は有界となる関数からなる空間
$H^2(\mathbb{C}_+)$	右半面で正則，虚軸に沿って自乗可積分で，それらの積分値は有界となる関数からなる空間
$H^2(D)$	開単位円板で正則，半径 1 未満の円上で自乗可積分で，それらの積分値は有界となる関数からなる空間
H^∞	開単位円板で正則かつ有界となる関数からなる空間
$H^\infty(\mathbb{C}_+)$	右半面で正則かつ有界となる関数からなる空間
$\mathrm{Im}\, z$	複素数 z の虚部
$\mathrm{Ind}_\gamma(z)$	閉曲線 γ の z に関する回転数
ℓ^p	p 乗総和可能な数列からなる空間　$(1\leqq p<\infty)$
ℓ^∞	有界な数列からなる空間
$\ker A$	線形作用素 A の零空間

log	対数関数
L^p	p 乗可積分な可測関数からなる空間 （$1 \leqq p < \infty$）
L^∞	有界な可測関数からなる空間
$N(x;\varepsilon)$	距離空間で中心 x 半径 ε の開球
$N(x;\varepsilon;f_1,\ldots,f_k)$	バナッハ空間の有界線形汎関数 $f_1,\ldots,f_k$ に対して値の差が ε 未満となる x の近傍
$N(f;\varepsilon;x_1,\ldots,x_k)$	バナッハ空間の点 $x_1,\ldots,x_k$ における値の差が ε 未満となる有界線形汎関数 f の近傍
$\Omega \setminus S$	差集合
$\mathbb{R}$	実数の集合
$\mathbb{R}^n$	n 次実ベクトルの集合
$\operatorname{ran} A$	線形作用素 A の像
$\operatorname{Re} z$	複素数 z の実部
$\operatorname{Res}(f;z_0)$	関数 f の z_0 における留数
$S^\perp$	ヒルベルト空間における閉部分空間 S の直交補空間
$S^\perp$	バナッハ空間における部分空間 S の零化空間
${}^\perp T$	バナッハ空間の双対空間における部分空間 T の零化空間
$\text{wk-}\lim_{k\to\infty} x_k$	弱位相による極限
$\text{wk}^*\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k$	汎弱位相による極限
$\text{wk-cl}\, S$	S の弱閉包
$\text{wk}^*\text{-cl}\, S$	S の汎弱閉包
$\langle x,y\rangle$	ヒルベルト空間の内積
$\langle x,f\rangle$ または $\langle f,x\rangle$	バナッハ空間 X とその双対空間 X^* について，$f \in X^*$ の $x \in X$ での値
X^*	バナッハ空間 X の双対空間
X/S	線形空間 X の部分空間 S による商空間
$\mathbb{Z}$	整数の集合
$\bar{z}$	複素数 z の共役複素数
$\lvert z\rvert$	複素数 z の絶対値
(0)	線形空間の 0 のみからなる集合
$\emptyset$	空集合
$\mathbb{1}$	バナッハ環の単位元

□□□□□□□□□ 目　　　次 □□□□□□□□□

1.　集合と関数の基礎概念

2.　複素数と複素関数

3.　曲線と線積分

4.　コーシーの定理と級数展開

5.　ローラン級数と孤立特異点

6.　調和関数の基本性質

7.　フーリエ級数・変換とラプラス変換

8.　ヒルベルト空間

9.　ヒルベルト空間上の線形作用素

10.　バ ナ ッ ハ 空 間

11.　バナッハ空間上の線形作用素

12.　バ ナ ッ ハ 環

付録 **A.**　位相空間・順序集合

付録 **B.**　関数空間 L^p と畳み込み

1 集合と関数の基礎概念

まず，集合や関数を扱うときに必要となる基礎概念を整理しておく。距離空間は距離を用いて要素間の遠近を表し，それによって開集合や閉集合を決めている。距離空間における連続関数，完備性，コンパクト集合という考え方もまとめておく。

1.1 距離空間

システム制御で扱う信号あるいは制御対象を集合として考えると，多くの場合，その要素間に近い遠いという考え方が含まれている。集合の要素間に距離を与えると遠近を表すことができる。

1.1.1 集合

距離空間の話に入るまえに集合の基礎概念を確認しておく。集合 A および B について，**共通集合**（intersection）$A \cap B$，**合併集合**（union）$A \cup B$ ならびに**差集合**（difference set）$A \setminus B$ を

$$
\begin{aligned}
x \in A \cap B \quad &\Leftrightarrow \quad x \in A \ \text{かつ} \ x \in B \\
x \in A \cup B \quad &\Leftrightarrow \quad x \in A \ \text{または} \ x \in B \\
x \in A \setminus B \quad &\Leftrightarrow \quad x \in A \ \text{かつ} \ x \notin B
\end{aligned}
$$

と定める。添字集合 Λ（これは無限個の要素をもっていてもよい）に対応して集合 A_λ があるとき，それらの共通集合ならびに合併集合を

$$x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \text{任意の}\ \ \lambda \in \Lambda\ \ \text{について}\ \ x \in A_\lambda$$
$$x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \text{ある}\ \ \lambda \in \Lambda\ \ \text{について}\ \ x \in A_\lambda$$

と定める。

全体集合 X が与えられているとき，$A \subset X$ について差集合 $X \setminus A$ を A の**補集合**（complement）という。補集合に関連した**例題 1.1** の関係を**ドモルガンの法則**（de Morgan's law）という。

【例題 1.1】　全体集合 X とその部分集合 A, B, A_λ（$\lambda \in \Lambda$）を考える。このとき

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B),\quad X \setminus \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus A_\lambda)$$
$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B),\quad X \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus A_\lambda)$$

が成り立つことを示せ。

【解答】　$x \in X \setminus (A \cap B)$ とする。すると $x \notin A \cap B$ であるので，$x \notin A$ または $x \notin B$ である。つまり $x \in X \setminus A$ または $x \in X \setminus B$ となるので，$x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ が成り立つ。逆に $x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ であるとすれば，$x \in X \setminus A$ または $x \in X \setminus B$ であるが，これより $x \notin A$ または $x \notin B$ であることになり，$x \notin A \cap B$ である。つまり $x \in X \setminus (A \cap B)$ である†。他の関係も同様に示すことができるので省略する。　◇

集合の濃度（potency）は集合の要素数を一般化した概念である。もし集合 S_1 と S_2 の間に一対一対応があるならば，S_1 と S_2 は等しい濃度をもつという。要素数が有限な集合については，S_1 と S_2 が等しい濃度をもつためには要素数

---

† 左辺の任意の要素が右辺の要素であること，右辺の任意の要素が左辺の要素であることの確認を行う。

が相等しいことが必要十分である。自然数の集合と等しい濃度をもつ集合を**可算集合**（enumerable set）という。また，有限集合と可算集合をあわせてたかだか可算といういい方もする。例えば，整数の集合は $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$ と順番にならべると可算集合であることがわかる。証明するには一工夫必要であるが，有理数の集合も可算集合である。要素数が無限の集合の中には可算集合でない集合がある。例えば，実数の集合は自然数の集合と一対一対応を構成できない†。実数の集合は**連続**（continuum）**の濃度**をもつ。

1.1.2　距離空間の定義

集合の 2 要素間に距離を与えることにより遠近を定める方法は直感に合うので理解しやすい。実数集合の 2 数の差の絶対値を距離であると考えるのは自然である。実数集合 $\mathbb{R}$ について，$x, y \in \mathbb{R}$ に対して $\rho(x, y) = |x - y|$ と定めると，関数 ρ は

(a) $\rho(x, y) \geqq 0$ であり，等号は $x = y$ のときそのときにかぎる。

(b) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

(c) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqq \rho(x, z)$

を満たしている（確認されたい）。性質 (c) を**三角不等式**（triangle inequality）という。

これらの 3 性質が一般に集合の 2 要素間の距離を定めるために本質的であると考え，一般の集合 X にも二つの要素間に上記 3 性質を満たす関数 ρ が定義されるならば，これを**距離**（metric）と呼ぶ。距離の定義された集合を**距離空間**（metric space）と呼ぶ。例えば 10 章で考えることになるノルム空間はつぎに示すように距離空間でもある。

【例題 1.2】　ノルムをもった線形空間 X を考え，$x, y \in X$ に対して

---

† 対角線論法を用いて証明することができる。例えば文献[3]を参照されたい（肩付き数字は，巻末の引用・参考文献の番号を表す）。

$\rho(x, y) = \|x - y\|$ と定めると，X は距離空間である。

【解答】 距離の性質 (a) はノルムの性質 (a) より明らかである。距離の性質 (b) はノルムの性質 (b) を用いて

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = |-1| \, \|y - x\| = \|y - x\| = \rho(y, x)$$

より示される。距離の性質 (c) は同じくノルムの性質 (c) より

$$\begin{aligned}\rho(x, z) &= \|x - z\| \\ &= \|x - y + y - z\| \\ &\leqq \|x - y\| + \|y - z\| = \rho(x, y) + \rho(y, z)\end{aligned}$$

より示される。 ◇

ノルムを有する線形空間 X の距離を**例題 1.2** のようにノルムを用いて定めると，移動に関する不変性（$\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y)$）ならびにスカラー倍に関する性質（$\rho(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \, \rho(x, y)$）を満たす。しかし，距離空間においてはそのような性質を一般的には満たす必要はない。また，集合 X が線形空間である必要もない。

【例題 1.3】 複素平面の単位円板 $D(0; 1) = \{z : |z| < 1\}$ を考える。このとき $z, w \in D(0; 1)$ について

$$\rho(z, w) = \tanh^{-1} d(z, w), \quad d(z, w) = \frac{|z - w|}{|1 - \overline{w}z|}$$

と定めると，$D(0; 1)$ は距離空間である。ただし

$$\tanh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

は双曲線正接である。

【解答】 距離の 3 性質を確認する。

(a) 演習問題【**4**】に示したことから $0 \leqq d(z, w) < 1$ である。ここで双曲線正接は $[0, \infty)$ を $[0, 1)$ の上に一対一に写すので，関数 ρ は定義可能であり $\rho(z, x) \geqq 0$

索　引

—— 著 者 略 歴 ——

1980 年　大阪大学工学部電子工学科卒業
1982 年　大阪大学大学院博士前期課程修了（電子工学専攻）
1983 年　大阪大学大学院博士後期課程中退
1983 年　大阪大学助手
1986 年　工学博士（大阪大学）
1991 年　大阪大学講師
1994 年　大阪大学助教授
1999 年　大阪大学教授
2006 年　京都大学教授
　　　　　現在に至る

システム制御のための数学(2)
—関数解析編—
Mathematics and Its Role in Systems and Control Theory, Part 2
—Function Analysis—

2021 年 1 月 25 日　初版第 1 刷発行

検印省略

著　　者　太　田　快　人
発 行 者　株式会社　コ ロ ナ 社
　　　　　代 表 者　牛 来 真 也
印 刷 所　三 美 印 刷 株 式 会 社
製 本 所　有限会社　愛千製本所

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発 行 所　株式会社　コ ロ ナ 社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ　https://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–03308–3　C3355　Printed in Japan　（新井）